Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2005, filière PSI

Mathématiques 1

Ce que traite le sujet

- Partie I : propriétés de F
- Partie II : l'endomorphisme theta
- Partie III : une suite de fonctions propres

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie du sujet sans l'en-tête officiel du concours (zone blanchie) ; le texte de l'énoncé est complet.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/psi/2005/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Les calculatrices sont autorisées.

****

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Notation et Objectifs :

On note :

- $\mathbb{N}$: l'ensemble des nombres entiers naturels,
- $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels,
- $\mathbb{C}$: l'ensemble des nombres complexes,
- $\mathcal{C}^0$: le $\mathbb{R}$ – espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,
- $\mathcal{C}^0_1$: le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0$ des fonctions f 1-périodique (c'est-à-dire telles que $f(x+1)=f(x)$, pour tout $x\in\mathbb{R}$).

Dans tout ce problème, on désigne par q l'application de $\mathcal{C}^0$ dans $\mathcal{C}^0$, définie par :
pour tout $f\in\mathcal{C}^0$, $q(f)=F$ où F est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x, associe $\int_x^{x+1} f(t)dt$.

On admet que q est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0$.

L'objet de ce problème est l'étude de quelques propriétés de la fonction F et de l'endomorphisme q.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE I

Quelques propriétés de $F = q(f)$

I.1/ Exemples.

I.1.1/ Expliciter $F(x)$, si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 1$.

I.1.2/ Expliciter $F(x)$, si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t^k$ (où k est fixé dans $\mathbb{N}^*$).

I.2/ Variation de $F = q(f)$.

On désigne maintenant par f une fonction arbitraire de $\mathcal{C}^0$.

I.2.1/ Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Expliciter $F'(x)$ en fonction de f et de x.

I.2.2/ Montrer que si la fonction f est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle $J_{x_0} = [x_0, +\infty[$, alors la fonction F est croissante (respectivement décroissante) sur J_{x_0}.

I.2.3/ Montrer que la fonction $F = q(f)$ est constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f appartient à $\mathcal{C}^0_1$.

I.2.4/ Expliciter $F(x)$, si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = |\sin(\pi t)|$.

On suppose de nouveau que f désigne une fonction arbitraire de $\mathcal{C}^0$.

I.2.5/ On suppose que la fonction f admet une limite finie L_1 en $+\infty$.
Montrer que la fonction F admet une limite L_2 (que l'on explicitera) en $+\infty$; on pourra étudier d'abord le cas où $L_1 = 0$.

I.3/ Propriétés du graphe de F.

Soient $f \in \mathcal{C}^0$ et $F = q(f)$.

On considère la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(u) = F\left(u - \frac{1}{2}\right) = \int_{u-\frac{1}{2}}^{u+\frac{1}{2}} f(t)dt$.

I.3.1/ Comparer $y(-u)$ et $y(u)$, si la fonction f est impaire (respectivement paire).

I.3.2/ Quelle propriété géométrique de la représentation graphique de la fonction F peut-on déduire des résultats obtenus en **I.3.1,** si la fonction f est impaire (respectivement paire) ?

I.4/ Étude d'un exemple.

Soit $f(t)=\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-kt^2}}{k^2+1}$, pour t réel.

I.4.1/ Montrer que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

I.4.2/ La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

I.4.3/ La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$? Si oui, laquelle ?

I.4.4/ Indiquer l'allure de la représentation graphique de la fonction f (on ne cherchera pas à préciser $f(0)$).

I.4.5/ La fonction f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?

I.4.6/ Soit $F=q(f)$.

I.4.6.1/ Indiquer l'allure de la représentation graphique de la fonction F.

I.4.6.2/ La fonction F est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?
(on pourra comparer $F(x)$ et $f(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}_+$).

PARTIE II

L'endomorphisme q

II.1/ L'endomorphisme q est-il surjectif ?

II.2/ Sur le noyau de *?* .

On note désormais *Ker?* le noyau de l'endomorphisme q .

II.2.1/ Montrer que $f \in Ker? \Leftrightarrow [\ f \in \mathcal{C}^1$ et $\int_0^1 f(t)dt=0\ ]$.

II.2.2/ Soit $(f,g)\in(\mathcal{C}^1)^2$. On note $\langle f \mid g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$.

On admettra, sans justification, que $\langle .|. \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0_1$.

Soit $k\in\mathbb{N}^*$. On note φ_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_k(t)=\cos(2\pi kt)$.

II.2.2.1/ Vérifier que $\boldsymbol{c}_k$ appartient à $\mathbf{c}^0_1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et calculer $\langle \boldsymbol{c}_j \mid \boldsymbol{c}_k \rangle$ pour $(j,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

II.2.2.2/ *Ker?* est-il de dimension finie ?

II.2.3/ Soit $f \in \mathbf{c}^0_1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note : $j_n(x) = \int_n^x f(t)dt$ pour $x \in [n, n+1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $W_n = \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t} dt$.

II.2.3.1/ Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation : $W_n = \frac{j_0(1)}{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{j_n(t)}{t^2} dt$.

II.2.3.2/ Si on suppose que f appartient à *Ker?*, quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} W_n$?

II.2.3.3/ Si on suppose que f n'appartient pas à *Ker?*, quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} W_n$?

II.3/ Sur le spectre de q.

On note $Sp(q)$ l'ensemble des valeurs propres réelles de l'endomorphisme q.
Si a est un nombre réel fixé, on note h_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_a(t) = e^{at}$.

II.3.1/ Montrer que chaque h_a est un vecteur propre de l'endomorphisme q.

II.3.2/ Étudier les variations de la fonction $u \mapsto \frac{e^u - 1}{u}$ pour $u \in \mathbb{R}^*$.

II.3.3/ Expliciter l'ensemble $[Sp(q)] \cap \mathbb{R}_+$.

PARTIE III

Une suite de fonctions propres de l'endomorphisme q

Soit l une valeur propre de l'endomorphisme q .

On note E_l le sous-espace propre associé à la valeur propre l qui est fixée dans toute cette partie.

On suppose $l > 0$.

III.1/ Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note I_k l'intervalle $]2kp, (2k+1)p[$.

On pose, pour tout t de l'intervalle I_k : $g(t) = t\left(\frac{\cos t}{\sin t}\right) + \ln\left(\frac{\sin t}{l\, t}\right)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

III.1.1/ Soit r la fonction définie sur I_k, par : $r(t) = t\sin(2t) - t^2 - \sin^2 t$.
Étudier la fonction r sur I_k et préciser son signe.

III.1.2/ Montrer que g définit une bijection de I_k sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à préciser.

On se propose de montrer l'existence, dans E_l , d'une suite (non triviale) $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions propres.

III.2/ Soit $g = a + ib$, où $(a,b) \in \mathbb{R} \times]0,+\infty[$.

III.2.1/ Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\int_x^{x+1} e^{gt}dt$.

III.2.2/ À quelle condition nécessaire et suffisante la fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(t) = e^{at}\cos(bt)$ est-elle un vecteur propre de l'endomorphisme q associé à la valeur propre l ?

III.3/ En déduire une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions propres de l'endomorphisme q .

Fin de l'énoncé

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Techniques fondamentales de calcul en analyse
- Suites et séries de fonctions
- Intégration sur un intervalle quelconque
- Limites et continuité
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Séries numériques et vectorielles
- Compléments d'algèbre linéaire

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/psi