Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2006, filière PSI

Mathématiques 1

Ce que traite le sujet

- Partie I : deux exemples
- Partie II : étude du procédé de sommation
- Partie III : une étude de fonctions

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie recomposée du sujet officiel, sans retouche de son contenu ; la mise en page diffère de l'original.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/psi/2006/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CCP 2006 -PSI
première épreuve

Notations.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on note $|z|$ son module.
Pour tout entier naturel n, on note :

- $n!$ la factorielle de n avec la convention $0! = 1$,
- $[|0, n|]$ l'ensemble des entiers naturels k vérifiant $0 \leq k \leq n$,
- $\binom{n}{k}$ le nombre de parties ayant k élément d'un ensemble de n éléments, pour $k \in [|0, n|]$.

On rappelle :

- la valeur de $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ pour $k \in [|0, n|]$,
- la formule du binôme : si z_1 et z_2 sont des nombres complexes et n un entier naturel, alors

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}$$

Enfin, si n est un entier naturel non nul, on note σ_n la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ et on pose $\sigma_0 = 0$.

Objectifs.

Dans les parties I et II, on étudie un procédé de sommation, la partie III est consacrée à l'étude de diverses fonctions et en particulier à une fonction ϕ à laquelle on applique ledit procédé de sommation.

Etude d'un procédé de sommation

Dans les parties I et II les notations utilisées sont les suivantes.
Toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ étant une suite complexe, si a est une telle suite, on utilise la notation usuelle $a(n) = a_n$.
A toute suite complexe a, on associee la suite a^* définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

L'objet des parties I et II est de comparer les propriétés de la série $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ aux propriétés de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$.

Partie I : deux exemples.

I.1. **Cas d'une suite constante.**
Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$; on suppose que la suite a est définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \alpha$.

I.1.1. Expliciter $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

I.1.2. Expliciter a_n^* pour $n \in \mathbb{N}$.

I.1.3. La série $\sum_{n\geq 0} a_n$ (resp. $\sum_{n\geq 0} a_n^*$) est-elle convergente ?

I.2. **Cas d'une suite géométrique.**
Soit $z \in \mathbb{C}$; on suppose que la suite a est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = z^n$.

I.2.1. Exprimer a_n^* en fonction de z et n.

I.2.2. On suppose que $|z| < 1$.

1.2.2.1. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ et expliciter sa somme $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

1.2.2.2. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ et expliciter sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$ en fonction de $A(z)$.

I.2.3. On suppose que $|z| \geq 1$.

I.2.3.1. Quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$?

I.2.3.2. Quelle est la nature de $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ si $z = -2$?

I.2.3.3. On suppose $z = e^{i\theta}$, avec θ réel tel que $0 < |\theta| < \pi$.
Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ est convergente. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$.

Partie II : étude du procédé de sommation.

Dans cette partie, et pour simplifier, on suppose que a est à valeurs réelles.

II.1. **Comparaison des convergences des deux suites.**

II.1.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une entier k fixé, $k \in [|0, n|]$.

II.1.1.1. Préciser un équivalent de $\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.1.2. En déduire la limite de $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.2. Soit a une suite réelle et q un entier naturel fixé.
On considère pour $n > q$ la somme $S_q(n, a) = \sum_{k=0}^{q} \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}$. Quelle est la limite de $S_q(n, a)$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?

II.1.3. On suppose que a_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Montrer que a_n^* tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.4. On suppose que a_n tend vers l (limite finie) lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de a_n^* lorsque n tend vers $+\infty$?

II.1.5. La convergence de la suite (a_n) est-elle équivalente à la convergence de la suite (a_n^*) ?

II.2. **Comparaison des convergences des séries $\sum(a_n)$ et $\sum(a_n^*)$.**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} a_k^*$, $U_n = 2^n T_n$.

II.2.1. Pour $n \in [|0, 3|]$, exprimer U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k, c'est à dire sous la forme $U_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} S_k$.

II.2.2. On se propose de déterminer l'expression explicite de U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k pour $k \in [|0, n|]$:

$$(\mathcal{E}) \quad U_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} S_k \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}$$

II.2.2.1. A quelle expression des coefficients $\lambda_{n,k}$ (en fonction de n et k) peut-on s'attendre compte-tenu des résultats obtenus à la question $II.2.1$?

II.2.2.2. Etablir la formule $(\mathcal{E})$ par récurrence sur l'entier n (on pourra remarquer que pour tout $k \in [|0, n|]$, $a_k = S_k - S_{k-1}$ avec la convention $S_{-1} = 0$).

II.2.3. On suppose que la série $\sum(a_n)$ est convergente. Montrer que la série $\sum(a_n^*)$ est convergente et exprimer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

II.2.4. La convergence de la série $\sum(a_n)$ est-elle équivalente à la convergence de la série $\sum(a_n^*)$?

Partie III : une étude de fonctions.

On rappelle que : $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma_0 = 0$.

Pour x réel, lorsque cela a du sens, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \ ; \ g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_n x^n}{n!} \ ; \ \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n x^n$$

III.1. **Etude de f.**

III.1.1. Vérifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

III.1.2. Expliciter $xf(x)$ pour tout x réel.

III.1.3. Expliciter $e^{-x} f(x)$ pour tout x réel.

III.2. **Etude de g.**

III.2.1. Montrer que g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

III.2.2. On désigne par g' la dérivée de la fonction g. Exprimer $g' - g$ en fonction de f.

III.2.3. Montrer que pour tout x réel :

$$g(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt$$

III.3. **La fonction F.**

On condidère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt$$

III.3.1. Montrer que la fonction F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et expliciter son développement.

III.3.2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\gamma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k k!(n-k)!}$. Exprimer γ_n en fonction de n et σ_n.

III.4. **La série $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\ln(n)$ le logarithme népérien de n.

III.4.1. Soit $w_k = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

III.4.1.1. Montrer que la série $\sum_{k\geq 1} w_k$ est convergente.

III.4.1.2. En déduire que la suite de terme général $\sigma_n - \ln(n)$ admet une limite finie (que l'on ne demande pas de calculer) lorsque n tend vers $+\infty$.

III.4.2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\tau_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Exprimer τ_{2n} en fonction de σ_{2n} et σ_n.

III.4.3. Montrer en utilisant $III.4.1$ et $III.4.2$ que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente et déterminer sa somme $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

III.5. **Etude de la fonction ϕ.**

III.5.1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 1} \sigma_n x^n$.

III.5.2. Préciser l'ensemble de définition Δ de la fonction ϕ, et étudier ses variations sur $[0, R[$.

III.5.3. **Valeur de $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$.**
En utilisant les résultat de la partie II et de la question $III.4.3$ expliciter la valeur de $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$.

III.5.4. Expliciter $\phi(x)$ pour $x \in \Delta$ et retrouver la valeur de $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Séries numériques et vectorielles
- Nombres complexes et trigonométrie
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires
- Nombres réels et suites numériques
- Séries entières
- Équations différentielles linéaires

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/psi