Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2006, filière PSI

Mathématiques 2

Ce que traite le sujet

- Partie I : une matrice particulière d'ordre 5
- Partie II : matrices vérifiant la propriété (P)
- Partie III : construction par produits scalaires

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie recomposée du sujet officiel, sans retouche de son contenu ; la mise en page diffère de l'original.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/psi/2006/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CCP 2006 -PSI
seconde épreuve

Notations.

Etant donné un entier naturel non nul n, on note $[|1,n|]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $1 \leq k \leq n$.
Pour n entier naturel non nul, on note $M_n(\mathbb{R})$ (respectivement $M_{n,1}(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes (respectivement l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes) à coefficients dans $\mathbb{R}$.
Etant donnée une matrice A, la notation $A = (a_{i,j})$ signifie que le coefficient $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A.
On note I_n la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$ c'est à dire telle que $I_n = (a_{i,j})$ avec $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $a_{i,i} = 1$.
On note J_n la matrice carrée de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 et K_n la matrice colonne de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est rapporté à la base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Objectifs.

Le problème porte sur l'étude de matrices vérifiant une propriété (P).
Dans la partie I, on fait établir des résultats sur une matrice particulière vérifiant la propriété (P).
La partie II conduit, à travers l'étude des matrices vérifiant la propriété (P), à caractériser ces matrices à l'aide de matrices semblables.
Dans la partie III, on construit, à l'aide de produits scalaires, une matrice vérifiant la propriété (P).
Les trois parties sont indépendantes les unes des autres.

Partie I.

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$.

I.1. Calculer la matrice M^2.

I.2. Exprimer la matrice $M^2 + M$ en fonction des matrices J_5 et I_5.

I.3. Exprimer la matrice J_5^2 en fonction de la matrice J_5.

I.4. Déduire des questions précédentes un polynôme annulateur de M.

I.5. Quelles sont les valeurs propres possibles de la matrice M ?

I.6. Montrer que M possède une valeur propre entière (et une seule) ; déterminer cette valeur propre entière ainsi que le sous-espace propres associé.

Partie II.

Dans cette partie n et δ sont des nombres entiers tels que $2 \leq \delta \leq n-1$.
On dit qu'une matrice $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété (P) lorsqu'elle vérifie les quatre conditions suivantes :

(1) M est symétrique.

(2) Pour tout $i \in [|1,n|]$, $m_{i,i} = 0$.

(3) Chaque ligne de M comporte δ coefficients égaux à 1 et $n - \delta$ coefficients égaux à 0.

(4) Pour tout $(i,j) \in [|1,n|]^2$ avec $i \neq j$, le coefficient $m_{i,j}$ est nul si et seulement si il existe un entier $k \in [|1,n|]$ tel que $m_{i,k} = m_{j,k} = 1$. L'entier k est alors unique.

On pourra utiliser sans justification une conséquence de la propriété (P) : si $m_{i,j} = 1$ alors pour tout entier $k \in [|1,n|]$ on a $m_{i,k}m_{j,k} = 0$.
Soit $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que la matrice M vérifie la propriété (P).

II.1. Expression de M^2. On note $M^2 = (a_{i,j})$.

II.1.1. Pour $i \in [|1,n|]$, calculer les coefficients $a_{i,j}$.

II.1.2. Pour $(i,j) \in [|1,n|]^2$ avc $i \neq j$, déterminer le coefficient $a_{i,j}$ selon la valeur de $m_{i,j}$.

II.1.3. Montrer que $M^2 = J_n - M + dI_n$ où d est un nombre entier que l'on déterminera.

Dans la suite, on note f (respectivement ϕ) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, de matrice M (respectivement de matrice J_n), relativement à la base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.
Soit v le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice colonne des coordonnées relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est K_n.

II.2. Relation entre n et δ.

II.2.1. Déterminer $Im(\phi)$, l'image de l'application linéaire ϕ.

II.2.2. Soit u un vecteur du noyau de $f - \delta id$. En calculant $(f \circ f)(u)$, montrer que u est colinéaire à v.

II.2.3. Montrer que δ est une valeur propre de f et déterminer le sous-espace propre correspondant.

II.2.4. Déduire des questions précédentes l'égalité $n = \delta^2 + 1$.

II.3. Valeurs propres de f.

Dans la suite de cette question $II.3$, λ est une valeur propre de f avec $\lambda \neq \delta$ et $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

II.3.1. Justifier l'affirmation : il existe une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f.

II.3.2. Justifier l'égalité $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Que vaut $\phi(u)$?

II.3.3. Montrer que λ est racine de l'équation (E) : $x^2 + x + 1 - \delta = 0$.

II.3.4. On note a et b les deux racines de l'équation (E). On suppose qu'une seule de ces racines est valeur propre de f, par exemple a. En utilisant la trace de l'endomorphisme f, exprimer a en fonction de δ. En déduire une impossibilité.

Les deux racines a et b de l'équation (E) sont donc des valeurs propres de f. Dans la suite, on suppose $a > b$.

II.4. Relations portant sur r, s, a, b et δ.
On note r la dimension du noyau de $f - aid$ et s la dimension du noyau de $f - bid$.

II.4.1. Exprimer $(a-b)^2$ en fonction de δ.

II.4.2. Exprimer le produit matriciel $\begin{pmatrix} r & s \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ en fonction de δ.

II.4.3. En déduire $(r-s)(a-b)$ en fonction de δ.

II.4.4. Pour quelle valeur de δ a-t-on $r = s$? Que valent alors r et s ?

Dans la suite, on caractérise la matrice M par une matrice diagonale semblable à M.

II.5. Premier cas. On suppose $a - b \notin \mathbb{Q}$.

II.5.1. Montrer que $r = s$. En déduire δ et n.

II.5.2. Déterminer a et b et donner une matrice diagonale semblable à M.

II.6. Deuxième cas. On suppose que $a - b \in \mathbb{Q}$.

II.6.1. On écrit $a - b = \frac{m}{q}$ avec $m, q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que tout nombre premier qui divise q divise m. En déduire que $a - b \in \mathbb{N}$.

II.6.2. Montrer que $a - b$ est un entier impair supérieur ou égal à 3. En notant $a - b = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, exprimer δ en fonction de p. En déduire a et b en fonction de p.

II.6.3. On note $c = a - b$. Montrer que c divise $(c^2 + 3)(c^2 - 5)$. En déduire que $c \in \{3, 5, 15\}$.

II.6.4. Pour les différentes valeurs de c, donner le tableau des valeurs de δ, n, a, b, r et s.

Partie III.

On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^5$ rapporté à la base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$.
On note $(u|w)$ le produit scalaire de deux vecteurs u et w de $\mathbb{R}^5$.
On considère tous les vecteurs u_i obtenus en ajoutant deux vecteurs distincts de $\mathcal{B}$: $u_i = e_\alpha + e_\beta$ avec $\alpha \neq \beta$.

III.1. Justifier que l'on définit ainsi 10 vecteurs u_i. On les indexe de façon arbitraire $u_i,\ i \in [|1, 10|]$.

III.2. Soit ψ un endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ qui réalise une bijection de la base $\mathcal{B}$ sur elle même. Montrer que

$$\forall i, j \in [|1, 10|],\ (u_i|u_j) = (\psi(u_i)|\psi(u_j))$$

III.3. Calcul des produits scalaires $(u_i|u_j)$.

III.3.1. Pour $i \in [|1, 10|]$, calculer $(u_i|u_i)$.

III.3.2. On suppose $u_i = e_\alpha + e_\beta$ et $u_j = e_\alpha + e_\gamma$ avec $\beta \neq \gamma$. Calculer $(u_i|u_j)$.

III.3.3. On suppose que $u_i : e_\alpha + e_\beta$ et que $u_j = e_\gamma + e_\epsilon$ avec les quatre indices $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$ tous différents. Calculer $(u_i|u_j)$.

III.4. Soit $A = (a_{i,j})$ avec $a_{i,j} = (u_i|u_j)$.

III.4.1. Ecrire une combinaison linéaire M de A, I_n et J_n susceptible de vérifier la propriété (P) définie dans la partie II.

III.4.2. Justifier que cette matrice M vérifie la propriété (P).

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs
- Compléments d'algèbre linéaire

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/psi