Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2010, filière PSI

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : un exemple dans le plan
- Partie II : propriétés générales de r(l,u)

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/psi/2010/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

****

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Le sujet comporte 5 pages.

Notations

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, par $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 0.

Étant donné un endomorphisme l d'un espace vectoriel de dimension finie, on note det(l) son déterminant, tr(l) sa trace et χ_l son polynôme caractéristique. En notant id l'endomorphisme identité, on définit $l^0 = id$ et, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $l^{k+1} = l \circ l^k$.

On note $K[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Objectifs

Étant donné un vecteur non nul u et un endomorphisme l d'un espace vectoriel de dimension finie, on définit un entier $r(l,u)$ à partir des itérés du vecteur par l'endomorphisme. Le problème porte sur l'étude de propriétés de l'endomorphisme, liées à la valeur de l'entier $r(l,u)$.

Dans la première partie, on traite un exemple dans le cas relativement élémentaire de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Une première structure euclidienne permet d'obtenir les coordonnées des itérés d'un vecteur par l'endomorphisme ; une deuxième structure euclidienne permet de montrer que des points du plan, déduits des vecteurs précédents, sont sur une ellipse.

Dans la deuxième partie, on fait établir des résultats généraux sur les endomorphismes étudiés.

Les deux parties sont indépendantes l'une de l'autre.

PARTIE I

Soit θ un nombre réel tel que $0 < \theta < \pi$ et $\theta \neq \frac{\pi}{2}$.

I.1. Dans cette question, on considère l'espace vectoriel euclidien orienté $\mathbb{R}^2$ rapporté à une base orthonormale directe $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Étant donné deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^2$, on note $(u \mid v)$ leur produit scalaire et $\|u\|$ la norme du vecteur u.
On définit les vecteurs $v_1 = \varepsilon_1$ et $v_2 = \cos(\theta)\varepsilon_1 + \sin(\theta)\varepsilon_2$ et on considère la base $\mathcal{V} = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$. Soit l l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}$ relativement à la base $\mathcal{V}$.

I.1.1. Déterminer le polynôme caractéristique de l. En déduire les valeurs propres réelles ou complexes de l.

I.1.2. Soit $v = x_1 v_1 + x_2 v_2$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$. Calculer $\|v\|^2$ et $\|l(v)\|^2$. En déduire que l est un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^2$.

I.1.3. Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{V}$ ainsi que la matrice inverse P^{-1}.
On note M' la matrice de l'endomorphisme l relativement à la base $\mathcal{E}$. Exprimer M' en fonction des matrices P, P^{-1} et M. Donner l'expression de M' et caractériser l'endomorphisme l.

I.1.4. Le vecteur v_2 vérifie $v_2 = l(v_1)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, on définit les vecteurs v_k par $v_k = l(v_{k-1})$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $v_k = a_k v_1 + b_k v_2$.

I.1.4.1. En calculant de deux façons $\|v_k\|^2$, déduire de I.1.2 une relation entre a_k, b_k et $\cos(\theta)$.

I.1.4.2. Justifier que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $(v_1 \mid v_k) = \cos((k-1)\theta)$; en déduire la valeur de $(v_2 \mid v_k)$.

I.1.4.3. En utilisant les produits scalaires $(v_1 \mid v_k)$ et $(v_2 \mid v_k)$, donner un système linéaire de deux équations à deux inconnues a_k et b_k.
Montrer que $a_k = -\frac{\sin((k-2)\theta)}{\sin(\theta)}$ et $b_k = \frac{\sin((k-1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

I.2. Dans cette question, on prend la base précédente $\mathcal{V} = (v_1, v_2)$ comme base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Étant donné deux vecteurs $v = x_1 v_1 + x_2 v_2$ et $v' = x'_1 v_1 + x'_2 v_2$, on définit le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$ par : $(v, v') \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto x_1 x'_1 + x_2 x'_2 \in \mathbb{R}$.
La base $\mathcal{V}$ est alors une base orthonormale pour ce produit scalaire.

On considère le plan euclidien muni du repère orthonormal $\Re = (O, v_1, v_2)$ où O est un point du plan. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k les points du plan de coordonnées (a_k, b_k) dans le repère $\Re$, où a_k et b_k sont les réels donnés dans **I.1.4.**

I.2.1. On note (x,y) les coordonnées d'un point du plan. Déterminer trois réels p, q, r tels que la conique d'équation $px^2 + qxy + ry^2 = 1$ passe par les points A_1, A_2 et A_3. Montrer que tous les points A_k sont sur cette conique (on pourra utiliser **I.1.4.1.**).

I.2.2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & 1 \end{pmatrix}$. En déduire la nature de la conique.

On prend $\theta = \frac{\pi}{3}$. Donner une équation réduite de la conique et tracer cette conique dans le plan euclidien muni du repère $\Re$.

PARTIE II

Dans cette partie, E est un espace vectoriel de dimension n sur le corps K, avec $n \geq 2$ et l est un endomorphisme de E.

II.1. Soit u un vecteur non nul de E.

II.1.1. Montrer qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille de vecteurs $(u, l(u), \ldots, l^k(u))$ soit liée. Justifier qu'il existe un plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille de k+1 vecteurs $(u, l(u), \ldots, l^k(u))$ soit liée. On note $r(l,u)$ ce plus petit entier.

II.1.2. Justifier l'encadrement $1 \leq r(l,u) \leq n$.

II.1.3. Montrer que $r(l,u) = 1$, si et seulement si u est un vecteur propre de l. Montrer que $r(l,u) = n$, si et seulement si la famille $(u, l(u), \ldots, l^{n-1}(u))$ est une base de E.

II.2. Un exemple.

Dans cette question, on suppose $n = 4$ et on note $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E.

On considère l'endomorphisme f de E représenté par la matrice $Mat_{\mathfrak{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 4 & 1 \\ 1 & -8 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ relativement à la base $\mathfrak{B}$. Calculer det(f) et tr(f).
Montrer que la famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est libre. Déterminer trois réels x, y, z tels que $f^3(e_1) = xf^2(e_1) + yf(e_1) + ze_1$. En déduire $r(f, e_1)$.

On reprend le cas général où E est un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et l un endomorphisme de E. Soit u un vecteur non nul de E.

II.3. On suppose $r(l,u) = n$. D'après **II.1.3.**, la famille $\mathfrak{B}(u) = (u, l(u), ..., l^{n-1}(u))$ est une base de E. On note $l^n(u) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k l^k(u)$.

II.3.1. Déterminer la matrice $Mat_{\mathfrak{B}(u)}(l)$ de l'endomorphisme l relativement à la base $\mathfrak{B}(u)$. Calculer det(l) et tr(l).

II.3.2. Déterminer $\chi_l(\lambda) = \det(l - \lambda \mathrm{id})$, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme l (on pourra calculer ce déterminant en ajoutant à la première ligne, une combinaison linéaire des autres lignes ; opération codée $L_1 \leftarrow L_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda^{i-1} L_i$ où L_i est la ligne d'indice i).

II.4. On note $I(l,u)$ l'ensemble des polynômes $P \in K[X]$ tels que l'endomorphisme $P(l)$ vérifie $P(l)(u) = 0$.

II.4.1. Montrer que l'ensemble $I(l,u)$ est un idéal de $K[X]$. En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire, noté $G(l,u)$, tel que $I(l,u)$ est formé de tous les polynômes produit du polynôme $G(l,u)$ par un polynôme quelconque de $K[X]$.

II.4.2. Justifier que le polynôme $G(l,u)$ divise le polynôme χ_l. Montrer que le polynôme $G(l,u)$ est de degré $r(l,u)$.

II.4.3. On reprend l'exemple **II.2.** Déterminer le polynôme $G(f, e_1)$. En déduire le polynôme caractéristique de f puis les valeurs propres de f. Dans la question **II.2.** on montre que la famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est libre ; en utilisant ce résultat et le spectre de f, en déduire que l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

II.4.4. On suppose que l'endomorphisme l et le vecteur u vérifient les hypothèses de la question **II.3.** : $r(l,u)=n$ et $l^n(u)=\sum_{k=0}^{n-1} a_k l^k(u)$.

Déterminer le polynôme $G(l,u)$ et retrouver ainsi l'expression du polynôme caractéristique de l'endomorphisme l.

II.5. Dans cette question, on suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $l^p = 0$.

II.5.1. Déterminer le polynôme caractéristique de l.

II.5.2. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) Il existe un vecteur non nul u tel que $r(l,u) = n$

(2) $l^{n-1} \neq 0$.

II.6. On suppose que l'endomorphisme l est diagonalisable. Soit $\mathcal{W} = (w_1, w_2, ..., w_n)$ une base de vecteurs propres de E avec pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $l(w_k) = \lambda_k w_k$.

II.6.1. On suppose qu'il existe un vecteur non nul u de E tel que $r(l,u) = n$ et on considère la base de E : $\mathfrak{B}(u) = (u, l(u), ..., l^{n-1}(u))$. On note $u = \sum_{k=1}^{n} x_k w_k$. Ecrire la matrice de passage de la base $\mathcal{W}$ à la base $\mathfrak{B}(u)$. En déduire que les valeurs propres de l sont toutes distinctes.

II.6.2. On suppose que les valeurs propres λ_k de l sont toutes distinctes.

II.6.2.1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ et on note $C = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$ une matrice colonne telle que le produit $AC = 0$. Montrer que le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ est le polynôme nul. En déduire que la matrice A est inversible.

II.6.2.2. Montrer qu'il existe un vecteur u de E, non nul, tel que $r(l,u) = n$.

Fin de l'énoncé.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Nombres complexes et trigonométrie
- Compléments d'algèbre linéaire
- Structures algébriques usuelles
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/psi