Concours Commun INP (CCINP), France

# Session 2011, filière PSI

## Mathématiques 1

Durée : 4 heures

### Ce que traite le sujet

- Partie I : une étude de séries
- Partie II : limite d'une intégrale

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/psi/2011/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

**EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI**

# MATHEMATIQUES 1

**Durée : 4 heures**

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

---

**Les calculatrices sont autorisées**

***Le sujet comporte 6 pages.***

## Notations

On note : $|z|$ le module du nombre complexe $z$ ,

$J$ un intervalle de $[0,+\infty[$ ,

$f$ une fonction définie sur $J$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ,

$g$ une fonction définie sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ .

Sous réserve de son existence on note : $\tilde{f}_g(x) = \int_J f(t)g(xt)dt$ pour $x \in ]0,+\infty[$ .

Chaque fois qu'aucune confusion ne sera possible, on notera $\tilde{f}(x)$ au lieu de $\tilde{f}_g(x)$ .

## Objectifs

Pour différentes hypothèses sur la fonction *f,* sur l'intervalle *J* et pour deux choix de la fonction *g*, on se propose de déterminer la limite de $\tilde{f}_g(x)$ lorsque le nombre réel *x* tend vers $+\infty$ .
Dans la partie I, on étudie un exemple explicite avec application à des calculs de sommes de séries.
Dans la partie II, on considère une fonction $f$ définie sur $[0,+\infty[$ à valeurs réelles et l'objectif est d'obtenir la limite en $+\infty$ de $\tilde{f}_g(x)$ lorsque $g(t) = |\sin(t)|$ , lorsque *f* est de classe $C^1$ ou lorsque *f* est continue par morceaux.

# PARTIE I

## Une étude de séries

### I.1. Étude de la fonction *L*

Pour tout $x$ réel tel que la série entière $\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ converge, on note $L(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ sa somme.

**I.1.1.** Préciser le rayon de convergence de cette série entière, montrer que la fonction $L$ est définie sur l'intervalle $]-1,1]$ et expliciter $L(x)$ pour $x$ appartenant à $]-1,1[$.

**I.1.2.** Montrer, avec soin, que la fonction $L$ est continue sur l'intervalle $[0,1]$. En déduire que $L(1) = \ln(2)$ (où ln désigne la fonction logarithme népérien).

### I.2. Étude de la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$

On considère la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$ : $a_{3p}=-\frac{2}{3p}$ et pour tout $p\in\mathbb{N}$ : $a_{3p+1}=\frac{1}{3p+1}$ et $a_{3p+2}=\frac{1}{3p+2}$.

**I.2.1.** Montrer que : $\sum_{k=1}^{3p}a_k=\sum_{k=p+1}^{3p}\frac{1}{k}=\frac{1}{p}\sum_{h=1}^{2p}\frac{1}{1+\frac{h}{p}}$.

**I.2.2.** Déterminer la limite de la somme $\sum_{k=1}^{3p}a_k$ lorsque $p$ tend vers $+\infty$ (on pourra considérer la fonction qui à $t$ associe $\frac{1}{1+t}$ sur un intervalle convenable). En déduire la convergence de la série $\sum_{k\geq 1}a_k$ et préciser sa somme.

**I.2.3.** En déduire que la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$ converge et montrer que sa somme est égale à $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

**I.3. Étude des séries** $\sum_{k\geq 1}\frac{\cos(k\alpha)}{k}$ et $\sum_{k\geq 1}\frac{\sin(k\alpha)}{k}$

Pour $t\in\left]0,2\pi\right[$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on note : $\varphi(t)=\frac{1}{e^{it}-1}$ et $S_n(t)=\sum_{k=1}^{n}e^{ikt}$ .

On désigne par $\alpha$ un nombre réel fixé dans l'intervalle $\left]0,2\pi\right[$. Pour simplifier l'écriture des démonstrations, on supposera que $\pi\leq\alpha<2\pi$ .

**I.3.1.** Montrer que $S_n(t)=\varphi(t)\left[e^{i(n+1)t}-e^{it}\right]$.

**I.3.2.** Montrer que la fonction $\varphi$ est de classe $C^1$ sur le segment $\left[\pi,\alpha\right]$.

**I.3.3.** Montrer que l'intégrale $\int_{\pi}^{\alpha}e^{i(n+1)t}\varphi(t)dt$ tend vers zéro lorsque l'entier $n$ tend vers $+\infty$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

**I.3.4.** Expliciter $\int_{\pi}^{\alpha}S_n(t)dt$ . Déduire de ce qui précède la convergence de la série $\sum_{k\geq 1}\frac{e^{ik\alpha}}{k}$ .

Expliciter la somme $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{ik\alpha}}{k}$ en fonction de ln(2) et de $\int_{\pi}^{\alpha}e^{it}\varphi(t)dt$ .

**I.3.5.** Exprimer $e^{it}\varphi(t)$ en fonction de $\frac{e^{\frac{it}{2}}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ où $t$ appartient à $\left[\pi,\alpha\right]$.

**I.3.6.** En déduire la convergence des séries $\sum_{k\geq 1}\frac{\cos(k\alpha)}{k}$ et $\sum_{k\geq 1}\frac{\sin(k\alpha)}{k}$. Expliciter leur somme respective. Le résultat est-il conforme avec celui obtenu en I.2.3. ?

# PARTIE II

## Limite d'une intégrale

Dans cette partie, on désigne par $f$ une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $\left[0,+\infty\right[$ à valeurs réelles et telle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty}\left|f(t)\right|dt$ soit convergente. On désigne par $g$ une fonction définie et continue sur l'intervalle $\left[0,+\infty\right[$ à valeurs complexes et (sous réserve d'existence) on note $\tilde{f}_g(x)=\int_0^{+\infty}f(t)g(xt)dt$ pour $x\in\left]0,+\infty\right[$.

**II.1**. **Existence de** $\tilde{f}_g(x)$

On suppose que la fonction *g* est bornée sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

Justifier l'existence de $\tilde{f}_g(x)$ pour tout *x* réel strictement positif. Montrer que la fonction $\tilde{f}_g$ est continue et bornée sur l'intervalle $]0,+\infty[$ .

**II.2**. **Limite de** $\tilde{f}_g(x)$ lorsque $g(t)=\mathrm{e}^{it}$

On suppose que la fonction *f* est de classe $C^1$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$ et à valeur réelle.

Soit $\tilde{f}_g(x)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{ixt}\,dt$ .

**II.2.1.** Justifier l'affirmation :

Pour tout $\varepsilon>0$, il existe un réel positif *A* tel que $\int_A^{+\infty}\left|f(t)\right|dt\le\varepsilon$ .

**II.2.2.** Le nombre réel *A* étant fixé, montrer que l'intégrale $\int_0^A f(t)\mathrm{e}^{ixt}\,dt$ tend vers zéro lorsque le nombre réel *x* tend vers $+\infty$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

**II.2.3.** En déduire la limite de $\tilde{f}_g(x)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{ixt}\,dt$ lorsque le nombre réel *x* tend vers $+\infty$ .

**Dans toute la suite du problème, on suppose que** $g(t)=\left|\sin(t)\right|$ **et on note simplement :**

$$\tilde{f}(x)=\int_0^{+\infty} f(t)\left|\sin(xt)\right|dt \quad .$$

**II.3**. **Étude pour une fonction *f* particulière**

On suppose (dans cet exemple) que *f* désigne la fonction *E* définie par $E(t)=\mathrm{e}^{-t}$ pour $t\in[0,+\infty[$

et donc $\tilde{E}(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\left|\sin(xt)\right|dt$ pour $x\in]0,+\infty[$ .

**II.3.1.** Pour $\gamma\in\mathbb{R}$ , calculer l'intégrale $\theta(\gamma)=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\gamma y}\sin\left(y\right)dy$ .

**II.3.2.** Montrer que pour $x \in ]0,+\infty[$ :

$$\tilde{E}(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u}{x}} \left|\sin(u)\right| du \,.$$

**II.3.3.** Exprimer pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, l'intégrale $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \mathrm{e}^{-\frac{u}{x}} \left|\sin(u)\right| du$ en fonction de $\mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{x}}$ et de $\theta(\gamma)$ pour un $\gamma$ convenable.

**II.3.4.** Justifier, pour $x \in ]0,+\infty[$ , la convergence de la série $\sum_{k\geq 0} \mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{x}}$ ;

préciser sa somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{x}}$ .

**II.3.5.** Expliciter $\tilde{E}(x)$ pour $x \in ]0,+\infty[$. Déterminer la limite de $\tilde{E}(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ .

### II.4. Étude générale

On désigne de nouveau par $f$ une fonction quelconque continue par morceaux sur l'intervalle $[0,+\infty[$ telle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \left|f(t)\right| dt$ converge et on note :

$$\tilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\left|\sin(xt)\right| dt \text{ pour } x \in ]0,+\infty[ \,.$$

#### II.4.1. Lemme préliminaire

Pour tout $t$ réel tel que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{\cos(2kt)}{4k^2-1}$ converge, on pose $h(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kt)}{4k^2-1}$ . Montrer que la fonction $h$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ . Justifier l'égalité :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \left|\sin(t)\right| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} h(t) \,.$$

#### II.4.2. Limite de $\tilde{f}(x)$ dans le cas $C^1$

On suppose de plus que $f$ est une fonction de classe $C^1$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$ . En utilisant les résultats obtenus en II.2 et II.4.1, déterminer la limite de $\tilde{f}(x)$ lorsque le réel $x$ tend vers $+\infty$ . Le résultat est-il conforme avec celui obtenu pour la fonction $E$ ?

### II.4.3. Cas d'une fonction continue par morceaux

#### II.4.3.1. Une limite

Étant donnés deux nombres réels $\beta$ et $\delta$ tels que $0 \leq \beta < \delta$, on considère l'intégrale $F(x) = \int_{\beta}^{\delta} |\sin(xt)| dt$ pour $x \in ]0,+\infty[$. Montrer que $F(x) = \frac{1}{x} \int_{\beta x}^{\delta x} |\sin(u)| du$.

On pose $p$ la partie entière de $\frac{\beta x}{\pi}$ et $q$ la partie entière de $\frac{\delta x}{\pi}$. Pour $x > \frac{\pi}{\delta - \beta}$, donner un encadrement de $F(x)$ en fonction de $p$, $q$ et $x$.

En déduire que $F(x)$ tend vers $\frac{2}{\pi}(\delta - \beta)$ lorsque le nombre réel $x$ tend vers $+\infty$.

#### II.4.3.2. Limite de $\tilde{f}(x)$ dans le cas d'une fonction continue par morceaux

Si $J$ est un intervalle de $[0,+\infty[$ et si $f$ est une fonction continue par morceaux sur $J$ à valeurs réelles et telle que l'intégrale $\int_J |f(t)| dt$ existe, on note toujours :

$$\tilde{f}(x) = \int_J f(t) |\sin(xt)| dt .$$

Quelle est la limite de $\tilde{f}(x)$ lorsque le réel $x$ tend vers $+\infty$ :

- lorsque $J$ est un segment de $[0,+\infty[$ et $f$ une fonction en escalier ?
- lorsque $J$ est un segment de $[0,+\infty[$ et $f$ une fonction continue par morceaux ?
- lorsque $J = [0,+\infty[$ et $f$ est une fonction continue par morceaux ?

**Fin de l'énoncé**

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Séries entières
- Séries numériques et vectorielles
- Nombres complexes et trigonométrie
- Techniques fondamentales de calcul en analyse
- Intégration sur un intervalle quelconque
- Intégrales dépendant d'un paramètre
- Suites et séries de fonctions

## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/psi