Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2012, filière PSI

Mathématiques 1

Ce que traite le sujet

- Partie 1 : cas d'une matrice à coefficients constants
- Partie 2 : matrice résolvante
- Partie 3 : application à une équation scalaire du second ordre

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie recomposée du sujet officiel sans en-tête ni date, sans retouche de son contenu ; la mise en page diffère de l'original.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/psi/2012/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CCP PSI 1
calculatrices autorisées.

Notations.

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes.
Dans tout le problème, on note n en entier naturel non nul et on désigne par $\mathbb{K}$ l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées à n lignes (respectivement des matices colonnes à n lignes) à coefficients dans $\mathbb{K}$. La notation $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A. Lorsque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, on note A^{-1} sa matrice inverse.
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et F un espace vectoriel de matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$. Une application $A : I \to F$ est continue (respectivement dérivable), lorsque pour t décrivant I, les coefficients de la matrice $A(t)$ sont des fonctions continues (respectivement dérivables) de I dans $\mathbb{K}$. On dira en abrégé que A est une matrice continue (respectivement dérivable) sur I et on notera $A(t) = (a_{i,j}(t))$ pour tout t dans I. Lorsque cette matrice est dérivable, on note $A'(t) = (a'_{i,j}(t))$ la matrice dérivée.
Pour deux matrices dérivables $M(t)$ et $N(t)$ dont le produit existe, on admettra la formule $(MN)'(t) = M'(t)N(t) + M(t)N'(t)$.

Equations différentielles matricielles.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soient A une matrice carrées d'ordre n continue sur I et B une matrice colonne à n lignes continues sur I, les coefficients des matrices A et B étant des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On considère l'équation différentielle $(E) : X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ où les solutions $X(t)$ sont des matrices colonnes à n lignes dérivables sur I, dont les coefficients sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On note $(E_0) : X'(t) = A(t)X(t)$ l'équation différentielle homogène associée.
On dira que (E) et (E_0) sont des équations différentielles matricielles. On note S_0 l'ensemble des solutions de (E_0). On rappelle que :

- S_0 est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n ;
- les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant à l'ensemble S_0 une solution particulière de (E) ;
- pour tout t_0 de I et pour toute matrice V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une solution et une seule X de (E) sur I vérifiant $X(t_0) = V$ (existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy).

On appelle système fondamental de dolutions de (E_0), toute base $(X_1, \ldots, X_n)$ de S_0.
On note $W(t) = (X_1(t), \ldots, X_n(t))$ la matrice carrée d'ordre n dont les $X_j(t)$ sont les colonnes et on dit que $W(t)$ est la matrice wronskienne de ce système fondamental de solutions de (E_0).

Objectifs.

Dans la première partie, il faut résoudre un exemple d'équation différentielle matricielle à coefficients constants.
Dans la deuxième partie, on traite le cas général de l'équation différentielle matricielle (E) en définissant la matrice résolvante de (E_0).
Dans la troisième partie, on utilise les résultats de la deuxième partie pour résoudre une équation différentielle scalaire du second ordre.

1 Cas d'une matrice à coefficients constants.

On considère les équations différentielles :

$$(E)\ :\ X'(t) = AX(t) + B(t)\ \text{ et }\ (E_0)\ :\ X'(t) = AX(t)$$

où A désigne une matrice à coefficients constants appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $I = \mathbb{R}$.

1.1 Soient V un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et λ un élément de $\mathbb{K}$. Montrer que la matrice $X(t) = e^{\lambda t}V$ est une solution de (E_0) si et seulement si V est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

1.2 Un exemple.

On suppose $n = 4$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \\ 0 \\ -te^t \end{pmatrix}$.

1.2.1 On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on considère l'équation différentielle (E_0). Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice A. En déduire un système fondamental de solutions, puis la solution générale complexe de (E_0) sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$.

1.2.2 On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on considère l'équation différentielle $(E)\ :\ X'(t) = AX(t) + B(t)$.

On note $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}$.

Ecrire le système d'équations différentielles linéaires scalaires vérifié par les quatre fonctions $x_k(t)$.

Déterminer la solution générale réelle de (E) sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$ (on pourra déterminer successivement $x_2(t)$ puis $x_3(t)$ puis $x_1(t)$ puis $x_4(t)$).

Préciser la solution X de (E) telle que $X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2 Matrice résolvante.

On reprend le cas général d'une équation différentielle $(E)\ :\ X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ définie dans la partie notations. On prendra I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t \in I$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note S_0 l'espace vectoriel de dimension n des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène (E_0) associée.

Pour $t_0 \in I$ donné, on note Φ_{t_0} l'application de S_0 dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall X \in S_0,\ \Phi_{t_0}(X) = X(t_0)$$

D'après le rappel sur le problème de Cauchy, l'aplication Φ_{t_0} est un isomorphisme de S_0 sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un système fondamental de solutions de (E_0).

2.1 Soient t_0 et t dans I. Soit $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et soit $X \in S_0$ la solution de (E_0) telle que $X(t_0) = V$. Justifier l'égalité $\Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1}(V) = X(t)$.

2.2 On rapporte l'espace vectoriel S_0 à la base $(X_1, \ldots, X_n)$ et l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à sa base canonique $(C_1, \ldots, C_n)$.

2.2.1 Soit $t_0 \in I$. Prouver que la matrice, dans ce couple de bases, de l'application linéaire Φ_{t_0} de S_0 dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la matrice wronskienne

$$W(t_0) = (X_1(t_0), \ldots, X_n(t_0))$$

2.2.2 Soient t_0 et t dans I. On note $R(t,t_0) = W(t)W(t_0)^{-1}$. Prouver que la matrice $R(t,t_0)$ ne dépend pas du système fondamental $(X_1,\dots,X_n)$ de solutions choisi.

La matrice $R(t,t_0)$ s'appelle la résolvante de l'équation différentielle linéaire (E_0).

2.3 Propriétés de la résolvante.

Soient t, t_0, t_1 et t_2 dans I.

2.3.1 Pour simplifier, on note $R'(t,t_0)$ la dérivée par rapport à t de la matrice $R(t,t_0)$. Montrer que $R'(t,t_0) = A(t)R(t,t_0)$. En déduire que, pour tout $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, la matrice $X(t) = R(t,t_0)V$ est la solution de (E_0) telle que $X(t_0) = V$.

2.3.2 Montrer que $R(t_2,t_1)R(t_1,t_0) = R(t_2,t_0)$. En déduire que $R(t,t_0)^{-1} = R(t_0,t)$.

2.4 Application de la résolvante : recherche d'une solution particulière de (E).

Soient t et t_0 dans I. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme

$$X(t) = R(t,t_0)V(t)$$

où $V : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est une application dérivable à déterminer.

2.4.1 On suppose dans cette question et la suivante que $X(t) = R(t,t_0)V(t)$ est une solution de (E). Montrer que

$$R(t,t_0)V'(t) = B(t)$$

2.4.2 En déduire que $V(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} R(t_0,u)B(u)\,du$.

2.4.3 Montrer que $Y(t) = \int_{t_0}^{t} R(t,u)B(u)\,du$ est une solution particulière de (E).

3 Une application de la résolvante

Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

3.1 On considère l'équation différentielle

$$(e_0) \ : \ t(t-1)y'' + 3y' - 6y = 0$$

où $y = y(t)$ est une fonction deux fois dérivable définie sur un intervalle I.

3.1.1 En cherchant les polynômes solutions de (e_0) sous la forme $y(t) = a_m t^m + \cdots + a_0$ avec $a_m \neq 0$, déterminer le degré de ces polynômes puis déterminer tous les polynômes solutions de (e_0) sur $\mathbb{R}$. Préciser le polynôme P solution de (e_0) et vérifiant $P(0) = 1$.

3.1.2 Vérifier que la fonction $Q(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$ est solution de (e_0) sur l'intervalle $]-1,1[$.

3.1.3 On cherche les solutions non nulles de (e_0) développables en série entière : $y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$ pour $|t| < R$ où $R > 0$ est le rayon de convergence de la série.

3.1.3.1 Pour tout entier naturel k, écrire, selon les valeurs de k, les relations entre a_k et a_{k+1}. Déterminer le rayon de convergence R.

3.1.3.2 Montrer qu'il existe un entier non nul k_0 à déterminer, tel que pour $k \geq k_0$, le coefficient a_k s'exprime en fonction de a_{k_0}. Donner l'expression de a_k en fonction de a_{k_0}. Comment retrouve-t-on les fonctions P et Q parmi ces solutions ?

3.2 On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \ : \ y'' + a(t)y' + b(t)y = \varphi(t)$$

où a, b, φ sont des fonctions continues définies sur un intervalle I.

3.2.1 On définit la fonction z par $z(t) = y'(t)$ et on note $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice carrée $A(t)$ et une matrice colonne $B(t)$ telle que l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ s'écrive matriciellement sous la forme $(E) \ : \ X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.

3.2.2 On note $(f(t), g(t))$ une base de l'espace vectoriel des solutions sur I de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_0)$: $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$.

Les matrices $\begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} g(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}$ forment alors un système fondamental de solutions de l'équation différentielle (E_0) : $X'(t) = A(t)X(t)$.

Soit $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{pmatrix}$ la matrice wronskienne de ce système fondamental de solutions.

Pour t et t_0 dans I, on note en abrégé f pour $f(t)$, f_0 pour $f(t_0)$, g pour $g(t)$, g_0 pour $g(t_0)$, f' pour $f'(t)$, f'_0 pour $f'(t_0)$, g' pour $g'(t)$ et g'_0 pour $g'_0(t_0)$.

Exprimer les coefficients de la matrice $W(t_0)^{-1}$ en fonction de f_0, g_0, f'_0, g'_0 puis ceux de la matrice résolvante en fonction de $f, f_0, g, g_0, f', f'_0, g', g'_0$.

3.3 On considère l'équation différentielle

$$(e) \ : \ t(t-1)y'' + 3y' - 6y = 20t^4$$

et on prend $I =]0, 1[$.

3.3.1 Ecrire l'équation différentielle (e) sous la forme de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ de la question **3.2**.

En déduire les matrices $A(t)$ et $B(t)$ telles que l'équation différentielle (e) s'écrive matriciellement sous la forme (E) : $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.

3.3.2 On applique les résultats de la question **3.2** avec $f(t) = P(t)$ et $g(t) = Q(t)$, où P et Q sont les fonctions définies dans **3.1**. Pour t et u dans $]0, 1[$, expliciter le déterminant de $W(u)$ et la valeur de $Q(t)P(u) - P(t)Q(u)$.

3.3.3 Soient t et t_0 dans $]0, 1[$. En appliquant les résultats précédents de cette partie et de la partie **2**, montrer que la fonction

$$y(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \int_{t_0}^{t} (4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4)\, du$$

est une solution particulière de (e).

Montrer que cette solution est encore valable pour $t_0 = 0$.

Expliciter la solution générale de (e) sur $[0, 1[$. Quelles sont les solutions de (e) sur $[0, 1[$ qui vérifient $y(0) = y'(0) = 0$?

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Équations différentielles linéaires
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Compléments d'algèbre linéaire
- Séries entières

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/psi