Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2012, filière PSI

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : caractérisation géométrique en dimension 3
- Partie II : éléments propres d'une matrice stochastique positive

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/psi/2012/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet comporte 6 pages.

Le sujet comporte deux parties indépendantes.

Tournez la page S.V.P.

Notations

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Étant donné un entier naturel $n \geq 2$, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées à n lignes (respectivement le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes), à coefficients dans $\mathbb{K}$. La notation $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A. On note ${}^tA$ la transposée d'une matrice A.
Pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\det(A)$ le déterminant de A, $\mathrm{tr}(A)$ la trace de A ; on note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ le spectre complexe de A et, si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, on note $E_\lambda(A)$ le sous-espace propre des vecteurs $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui vérifient $AX = \lambda X$. Soit I_n la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1.
On note $[\![1, n]\!]$ l'ensemble des nombres entiers naturels k qui vérifient $1 \leq k \leq n$.
Pour tout nombre complexe z, on note $|z|$ le module de z.

On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $\big(\mathcal{ST} > 0\big)$ lorsque

$$(1) \qquad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!],\ a_{i,j} > 0,$$
$$(2) \qquad \forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

Objectifs

Dans ce problème, on considère les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient la propriété $\big(\mathcal{ST} > 0\big)$.
Dans la première partie, on démontre une caractérisation géométrique d'une classe de matrices vérifiant la propriété $\big(\mathcal{ST} > 0\big)$.
Dans la deuxième partie, on fait établir des propriétés sur les éléments propres des matrices vérifiant la propriété $\big(\mathcal{ST} > 0\big)$.

Partie I

Dans cette partie, on suppose $n = 3$. Étant donné un nombre complexe z, on note $M(z)$ le point du plan complexe d'affixe $z = x + iy$, c'est-à-dire le point de coordonnées (x, y). On considère le triangle du plan complexe dont les sommets sont les points $P(1),\ Q(j),\ R(j^2)$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On note T l'intérieur de ce triangle, bords non compris. Soit D le disque ouvert du plan complexe de centre O (origine du repère) et de rayon 1, c'est-à-dire l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z| < 1$.

I.1 Dessiner les ensembles T et D sur un même dessin. En notant x et y l'abscisse et l'ordonnée d'un point du plan complexe, donner les équations cartésiennes des côtés du triangle PQR. Déterminer les équations cartésiennes des droites $(PQ), (QR)$ et (RP). Montrer qu'un point $M(x+iy)$ appartient à T si et seulement si x et y vérifient les trois inégalités :

$$2x+1>0,\ x-\sqrt{3}y-1<0,\ x+\sqrt{3}y-1<0\ .$$

I.2 Dans cette question, on considère une matrice $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété $(\mathcal{ST}>0)$.

I.2.1 Montrer que 1 est valeur propre de A.

Dans la suite de la question **I.2**, on suppose que les autres valeurs propres de A sont des nombres complexes conjugués distincts, λ et $\overline{\lambda}$, avec $0<|\lambda|<1$. On note $\lambda=a+ib$.

I.2.2 Exprimer $\mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{tr}(A^2)$ en fonction de λ et $\overline{\lambda}$, puis en fonction de a et b.

I.2.3 Montrer les inégalités $\mathrm{tr}(A)>0$ et $\mathrm{tr}(A^2)>a_{1,1}^2+a_{2,2}^2+a_{3,3}^2$. En déduire l'inégalité $\big(\mathrm{tr}(A)\big)^2<3\mathrm{tr}(A^2)$ (on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs $u=(a_{1,1},a_{2,2},a_{3,3})$ et $v=(1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$).

I.2.4 Déduire de **I.2.2** et **I.2.3** les inégalités :

$$2a+1>0 \quad \text{et} \quad (a-\sqrt{3}b-1)(a+\sqrt{3}b-1)>0\ .$$

I.2.5 Déduire des questions précédentes que le point $M(\lambda)$ appartient à T (on pourra considérer les régions de D délimitées par les côtés du triangle PQR).

I.3 Dans cette question, on note $\lambda=re^{i\theta}$ avec $0<r<1$ et $0<\theta<\pi$ et on suppose que le point $M(\lambda)$ appartient à T.

On note $\alpha=\dfrac{1+2r\cos(\theta)}{3},\ \beta=\dfrac{1+2r\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})}{3},\ \gamma=\dfrac{1-2r\cos(\theta+\frac{\pi}{3})}{3}$.

I.3.1 Montrer les égalités : $\alpha=\dfrac{1+\lambda+\overline{\lambda}}{3},\ \beta=\dfrac{1+j\lambda+j^2\overline{\lambda}}{3},\ \gamma=\dfrac{1+j^2\lambda+j\overline{\lambda}}{3}$.

Dans la suite de la question **I.3**, on considère la matrice $A=\begin{pmatrix}\alpha&\beta&\gamma\\ \gamma&\alpha&\beta\\ \beta&\gamma&\alpha\end{pmatrix}$.

I.3.2 Montrer que la matrice A vérifie la propriété $(\mathcal{ST}>0)$.

I.3.3 Soit $J=\begin{pmatrix}0&1&0\\ 0&0&1\\ 1&0&0\end{pmatrix}$. Calculer J^2 et J^3. Déterminer les valeurs propres, réelles ou complexes, de la matrice J.

Tournez la page S.V.P.

I.3.4 Exprimer la matrice A en fonction des matrices I_3, J et J^2. Déterminer un polynôme $\mathcal{P}$ de degré ≤ 2 tel que $A = \mathcal{P}(J)$. En déduire que 1, λ et $\overline{\lambda}$ sont les valeurs propres de A.

Partie II

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété $\big(\mathcal{ST} > 0\big)$.

II.1 Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne dont tous les coefficients valent 1. Calculer AU, en déduire que 1 est valeur propre de A.

II.2 Précision sur $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$

II.2.1 Soient une matrice $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\det(B) = 0$ et un vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0$, tel que $BX = 0$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_k| = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$. Justifier l'inégalité :

$$|b_{k,k}| \leq \sum_{j \neq k} |b_{k,j}| \ .$$

II.2.2 Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. En appliquant **II.2.1** à la matrice $B = A - \lambda I_n$, montrer que $|a_{k,k} - \lambda| \leq 1 - a_{k,k}$, où k est l'entier défini dans **II.2.1**. En déduire $|\lambda| \leq 1$.

II.2.3 On suppose que $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ vérifie $|\lambda| = 1$ et on note $\lambda = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Déduire de l'inégalité $|a_{k,k} - e^{i\theta}| \leq 1 - a_{k,k}$ de **II.2.2** que $\cos(\theta) = 1$, puis en déduire λ.

II.3 Dimension de $E_1(A)$

II.3.1 Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}({}^tA)$. En comparant le rang de $A - I_n$ et celui de ${}^tA - I_n$, montrer que les sous-espaces $E_1(A)$ et $E_1({}^tA)$ ont même dimension.

II.3.2 Soit $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $V \neq 0$, tel que ${}^tAV = V$. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $|v_i| \leq \sum\limits_{j \in [\![1,n]\!]} a_{j,i}|v_j|$. En calculant $\sum\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |v_i|$, montrer que toutes ces inégalités sont en fait des égalités.

On note $|V| = \begin{pmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_n| \end{pmatrix}$ le vecteur dont les coefficients sont les modules des coefficients de V. Montrer que ${}^tA|V| = |V|$, puis que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $|v_i| > 0$.

II.3.3 Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ des matrices non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui appartiennent à $E_1({}^tA)$. En considérant la matrice $X - \dfrac{x_1}{y_1}Y$, déterminer la dimension de $E_1({}^tA)$.

Justifier qu'il existe un vecteur unique $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ qui engendre $E_1({}^tA)$, tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on ait $\omega_i > 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$.

Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}\omega_j = \omega_i$.

II.3.4 Bilan des propriétés spectrales de A et de ${}^tA$

Citer les propriétés des vecteurs propres et des sous-espaces propres de A et de ${}^tA$, qui ont été démontrées dans les questions précédentes de la deuxième partie.

II.4 À l'aide de la matrice $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ définie en **II.3.3**, on considère l'application $N : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$, définie par :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), N(X) = \sum_{i \in [\![1,n]\!]} \omega_i |x_i| \ .$$

Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ on a $N(AX) \leq N(X)$. Retrouver le résultat de **II.2.2** : tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ vérifie $|\lambda| \leq 1$.

II.5 Ordre de multiplicité de la valeur propre 1 de A

À l'aide de la matrice colonne $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$, on considère la forme linéaire $\Phi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \Phi(X) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i \ .$$

Tournez la page S.V.P.

On note $\mathrm{Ker}(\Phi)$ le noyau de Φ.

II.5.1 Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on a $\Phi(AX) = \Phi(X)$.

II.5.2 Justifier que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus \mathrm{Ker}(\Phi)$.

II.5.3 Soit $X \in E_\lambda(A)$ avec $\lambda \neq 1$. Montrer que $X \in \mathrm{Ker}(\Phi)$.

II.5.4 En utilisant les résultats précédents, déterminer l'ordre de multiplicité de la valeur propre 1 de la matrice A.

Fin de l'énoncé

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Nombres complexes et trigonométrie
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Espaces vectoriels normés
- Compléments d'algèbre linéaire

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/psi