Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2013, filière PSI

Mathématiques 2

Ce que traite le sujet

- Partie I : une norme sur S_n(R)
- Partie II : valeurs propres de H_n
- Partie III : limite de N(H_n) par une intégrale double
- Partie IV : déterminant de H_n

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie recomposée du sujet officiel sans en-tête ni date, sans retouche de son contenu ; la mise en page diffère de l'original.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/psi/2013/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CCP PSI 2
calculatrices autorisées.

Notations.

Pour ce problème, on désigne par :
- n un entier naturel non nul.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note :
- ${}^tA$ la matrice transposée de A ;
- $\det(A)$ le déterminant de A ;
- $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \ {}^tA = A\}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques.

- Un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est noté $x = (x_k)_{1\leq k\leq n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
- Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée $A = ((a_{j,k}))_{1\leq j,k\leq n}$ où $a_{j,k}$ est le coefficient de A situé en ligne j et colonne k.
- L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique défini par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \ (x|y) = {}^tx.y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

  et $x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ est la norme euclidienne associée.
- La sphère unité de $\mathbb{R}^n$ est $\Omega_n = \{x \in \mathbb{R}^n / \ \|x\| = 1\}$.

A toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on associe la fonction $q_A \ : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ q_A(x) = (Ax|x)$$

Objectifs.

Dans la **partie I**, on étudie q_A pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et l'on définit une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. La suite du problème est consacrée à une étude des matrices de Hilbert définies par

$$H_n = ((a_{j,k}))_{1\leq j,k\leq n} \ \text{ où } \ a_{j,k} = \frac{1}{j+k-1}$$

On étudie en particulier quelques propriétés du déterminant, des valeurs propres et de l'intervalle $[\min \mathrm{Sp}(H_n), \max \mathrm{Sp}(H_n)]$ lorsque n tend vers $+\infty$.

I. Une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

I.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.1.1 Enoncer les propriétés de la sphère unité Ω_n ainsi que celles de la fonction q_A qui permettent d'affirmer que q_A est bornée sur Ω_n et qu'elle atteint ses bornes.
On note $m_A = \min(q_A(\Omega_n))$ et $M_A = \max(q_A(\Omega_n)$.

I.1.2 Démontrer que $\mathbb{R} \cap \mathrm{Sp}(A) \subset [m_A, M_A]$.

I.1.3 Expliciter $\mathrm{Sp}(A)$, m_A et M_A lorsque $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On pourra remarquer que $\Omega_2 = \{(\cos(\theta), \sin(\theta)) / \ \theta \in \mathbb{R}\}$.

I.2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $q_A(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega_n$.

I.2.1 Montrer que $q_A(y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$.

I.2.2 Si $(y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, exprimer $q_A(y + z)$ (qui est nul d'après **I.2.1**) en fonction de $(Ay|z)$ et $(Az|y)$.

I.2.3 Montrer que la matrice A est anti-symétrique (c'est à dire que ${}^tA = -A$). Entre autre méthode, on pourra par exemple considérer les vecteurs y et z dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

I.3 Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$(\forall x \in \Omega_n,\ q_A(x) = 0) \iff (A = (0) \ \text{ (matrice nulle) })$$

I.4 Montrer que l'application $N : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ N(A) = \sup_{x \in \Omega_n} |q_A(x)|$$

est une norme

I.5 **Bornes de Q_A sur Ω_n.**

On rappelle le théorème spectral : étant donné une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, si on désigne par u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est A, alors u étant symétrique réel, il se diagonalise dans une base orthonormée, c'est à dire : il existe n nombres réels $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots \leq \lambda_n$ et une base orthonormée $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\},\ u(e_k) = Ae_k = \lambda_k e_k$$

On considère $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et on conserve les notations de ce théorème dans les questions **I.5**.

I.5.1 Préciser $q_A(e_k)$ pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

I.5.2 Soit $x = \sum_{k=1}^n x'_k e_k \in \Omega_n$. Justifier les égalités $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (x'_k)^2 = 1$ puis exprimer $q_A(x)$ en fonction des valeurs propres λ_k de A et des composantes x'_k de x.

I.5.3 Retrouver le résultat obtenu en **I.1.1** : la fonction q_A possède un minimum m_A et un maximum M_A sur la sphère unité Ω_n. Expliciter m_A et M_A en fonction des valeurs propres de A.

I.5.4 Montrer que $N(A) = \sup_{x \in \Omega_n} |q_A(x)| = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$. Etablir une inégalité entre $|\det(A)|$ et $(N(A))^n$.

I.5.5 **Exemple** : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$, calculer $\det(A)$ et $N(A)$.

Dans toute la suite du problème, pour tout entier $n \geq 2$, on désigne par H_n la matrice de Hilbert d'ordre n définie par

$$H_n = \left(\left(\frac{1}{j + k - 1} \right) \right)_{1 \leq j,k \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \ldots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & \ldots & 1/(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1/n & 1/(n+1) & \ldots & 1/(2n-1) \end{pmatrix}$$

ou encore $H_n = ((a_{j,k}))_{1 \leq j,k \leq n}$ avec $a_{j,k} = \frac{1}{j+k-1}$.
Pour simplifier, on notera q_n la fonction $q_{H_n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q_n(x) = q_{H_n}(x) = (H_n x|x)$$

II. Sur les valeurs propres de H_n.

II.1 **Une expression de $q_n(x)$.**

Soit $x = (x_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n$.

II.1.1 Montrer que

$$q_n(x) = (H_n x|x) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{j+k-1} \right) x_j = \sum_{1 \leq j,k \leq n} \frac{x_k x_j}{j+k-1}$$

II.1.2 Développer

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1} \right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j t^{j-1} \right)$$

où t est une variable réelle.

II.1.3 Montrer que

$$q_n(x) = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1} \right)^2 dt$$

II.1.4 Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q_n(x) \geq 0$$

et que $q_n(x) = 0$ équivaut à $x = 0$. Que peut-on en déduire concernant les valeurs propres de H_n ?

II.2 **Une majoration de $q_n(x)$.**

II.2.1 Soit $P(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k$ un polynôme à coefficients complexes. Montrer que

$$\int_{-1}^{1} P(t)\, dt = -i \int_0^{\pi} P(e^{i\theta}) e^{i\theta}\, d\theta$$

On pourra expliciter $\int_{-1}^{1} t^k\, dt$ et $-i \int_0^{\pi} e^{ik\theta} e^{i\theta}\, d\theta$.

II.2.2 En gardant les notations introduites en **II.1** et en notant

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1}$$

montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$0 \leq q_n(x) = \int_0^1 Q^2(t)\, dt \leq \int_0^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} x_k e^{i(k-1)\theta} \right|^2 d\theta$$

l'inégalité étant stricte pour $x \neq 0$. *On pourra utiliser les résultats obtenus en* **II.1** *et* **II.2.1**.

II.2.3 Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leq q_n(x) \leq \pi \|x\|^2$$

l'inégalité étant stricte pour $x \neq 0$.

II.3 **Application à $\mathrm{Sp}(H_n)$.**

Pour tout entier $n \geq 2$, on note

$$\mu_n = \min(\mathrm{Sp}(H_n)) \quad \text{et} \quad \rho_n = \max(\mathrm{Sp}(H_n))$$

II.3.1 Expliciter μ_2 et ρ_2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a :

$$0 < \mu_n < \rho_n < \pi$$

II.3.2 Montrer que $q_n(\Omega_n) = [\mu_n, \rho_n]$. *On pourra considérer des vecteurs propres orthogonaux e_1 et e_n tels que $H_n e_1 = \mu_n e_1$ et $H_n e_n = \rho_n e_n$, $\|e_1\| = \|e_n\| = 1$ et le vecteur $x = \sqrt{1-t}e_1 + \sqrt{t}e_n$ où $t \in [0,1]$.*

II.3.3 Calculer $(H_n\varepsilon_n|\varepsilon_n)$ où ε_n désigne le vecteur de la base canonique

$$\varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En déduire la limite de μ_n lorsque $n \to +\infty$.

III. Limite de $(N(H_n))_{n\geq 2}$ grâce à une intégrale double.

Dans cette partie, on utilise la relation

$$\forall t > 0,\ \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}$$

et on suppose $n \geq 2$.

III.1 **Deux intégrales doubles.**

Pour tout entier $n \geq 2$, on note

$$D_n = [1,n] \times [1,n],\ \Gamma_n = [1,\sqrt{n}] \times [1,\sqrt{n}]$$

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{xy}(x+y-1)} \quad \text{et} \quad J_n = \iint_{\Gamma_n} \frac{dudv}{u^2+v^2}$$

III.1.1 En utilisant le changement de variable $(x,y) = (u^2, v^2)$, montrer que

$$I_n \geq 4J_n$$

III.1.2 On note

$$K_n = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{\arctan(x)}{x}\, dx \quad \text{et} \quad L_n = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\, dx$$

Montrer que $J_n = K_n - L_n$.

III.2 **Un équivalent de J_n.**

III.2.1 En majorant $\arctan(t)$, montrer que

$$0 < L_n \leq 1$$

III.2.2 Justifier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\, dx$. Montrer que

$$K_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4} \ln(n)$$

III.2.3 En déduire que que $J_n \sim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{4} \ln(n)$.

III.3 **Limite de $N(H_n)$.**

On utilise les résultats de la partie **II**. On note a l'élément de $\mathbb{R}^n$

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{2} \\ \vdots \\ 1/\sqrt{n} \end{pmatrix}$$

III.3.1 Montrer que $\|a\|^2 \leq 1 + \ln(n)$.

III.3.2 Montrer que $4J_n \leq q_n(a)$.

III.3.3 En déduire la limite de $N(H_n)$ lorsque $n \to +\infty$.

IV. Sur le déterminant de H_n.

H_n désigne toujours la matrice de Hilbert d'ordre n, pour $n \geq 2$.

IV.1 **Une fraction rationnelle.**

On considère la fraction rationnelle $R_n(x) = \dfrac{\prod_{k=1}^{n}(x-k)}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$.

On admettra qu'il existe des réels $\lambda_{0,n}$, $\lambda_{1,n}$, …, $\lambda_{n,n}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, \ldots, -n\},\ R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_{k,n}}{(x+k)}$$

cette décomposition (en éléments simples) de R_n étant unique.

Exprimer le coefficient $\lambda_{n,n}$ de $\frac{1}{x+n}$ à l'aide de $(2n)!$ et de $n!$.

IV.2 **Matrice A_n.**

Pour $n \geq 2$, on considère la matrice A_n définie par $A_n = ((a_{j,k}))_{1 \leq j,k \leq n}$ avec

$$a_{j,k} = \begin{cases} \frac{1}{j+k-1} & \text{pour } \ 1 \leq k \leq n-1,\ 1 \leq j \leq n \\ R_{n-1}(j) & \text{pour } \ k = n,\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

où les R_p ont été définis plus haut.

IV.2.1 Montrer que pour $1 \leq i \leq n$, on a

$$R_{n-1}(i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j-1,n-1} h_{i,j}$$

puis en déduire que $\det(A_n) = \binom{2(n-1)}{n-1} \det(H_n)$. *Remarque : $h_{i,j}$ désigne ici le coefficient générique de la matrice H_n, c'est à dire celui à l'intersection des ligne i et colonne j.*

IV.2.2 Montrer que $\det(A_n) = \frac{\det(H_{n-1})}{(2n-1)\binom{2(n-1)}{n-1}}$. En déduire l'expression de $\det(H_n)$ en fonction de $\det(H_{n-1})$.

IV.2.3 Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\det(H_n) \neq 0$, puis que $\frac{1}{\det(H_n)} \in \mathbb{N}^*$.

IV.3. **Calcul de** $\det(H_n)$**.**

En notant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_n = \prod_{k=1}^{n} k!$, montrer que

$$\forall n \geq 2,\ \det(H_n) = \frac{\Phi_{n-1}^4}{\Phi_{2n-1}}$$

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Espaces vectoriels normés
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Techniques fondamentales de calcul en analyse
- Nombres complexes et trigonométrie
- Intégration sur un intervalle quelconque
- Compléments d'algèbre linéaire
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/psi