Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2026, filière PSI

Modélisation et ingénierie numérique

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : régulation du débit de la pompe de circulation
- Partie II : régulation des paramètres physico-chimiques de l'eau

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/psi/2026/modelisation

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MODÉLISATION ET INGÉNIERIE NUMÉRIQUE

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de deux parties indépendantes.

Modélisation de l’entretien automatisé d’une piscine privée

Présentation générale

Les piscines privées connaissent un essor considérable en France. Cela est en partie dû à la simplification de leur entretien grâce à son automatisation. Une eau de baignade de qualité est une eau saine, sans micro-organismes (algues, bactéries ...) et de pH compris entre 7,0 et 7,4 pour le confort des baigneurs. La **figure 1** présente une partie du système permettant le traitement automatique de l’eau. Le circuit de base se déroule de la façon suivante : une pompe à vitesse variable assure la circulation de l’eau dans les différents équipements du circuit à un certain débit. L’eau aspirée par la pompe à travers la tuyauterie passe dans un filtre qui permet d’éliminer les impuretés. Un système de régulation composé de capteurs mesure les paramètres physico-chimiques de l’eau (chlore, pH) et régule automatiquement leur valeur. Une pompe à chaleur permet d’assurer le maintien de l’eau à la température souhaitée. L’eau filtrée, traitée et chauffée est refoulée dans le bassin de la piscine. Pour finir, afin d’assurer la sécurité du bassin, un système de volet roulant immergé recouvre la piscine.

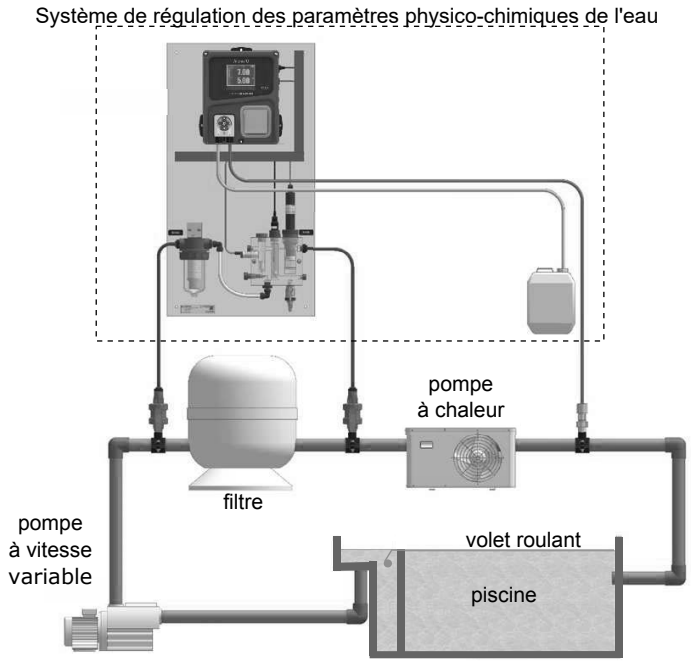


Figure 1 - Principe de l’automatisation de l’entretien d’une piscine (source CARRE BLEU)

L’objectif de ce sujet est de modéliser les différents moyens mis en œuvre pour assurer l’automatisation de l’entretien d’une piscine.

La **partie I** s’intéresse à la modélisation de la régulation du débit de la pompe de circulation. La **partie II** propose une modélisation du maintien des paramètres physico-chimiques de l’eau (concentration en chlore actif, pH) à des valeurs de consigne.

Partie I - Régulation du débit de la pompe de circulation

L'objectif de cette partie est de modéliser la commande de la pompe de circulation afin d'obtenir le débit souhaité.
La pompe étudiée permet de générer un débit d'eau en circuit fermé pour des piscines dont le volume d'eau peut varier entre V_{min} = 30 m^3 et V_{max} = 120 m^3. Au cours de sa circulation, l'eau est filtrée, traitée et réchauffée. Ainsi, le cahier des charges impose que la puissance de la pompe assure le passage du volume total de l'eau de la piscine en 8 heures de fonctionnement journalier. La vitesse de l'eau dans les canalisations est de 1,5 $m \cdot s^{-1}$ pour éviter des pertes de charges trop importantes dans la tuyauterie.

Q1. Calculer le débit minimal q_{min} et le débit maximal q_{max} de la pompe en $L \cdot s^{-1}$ pour respecter l'exigence imposée par le cahier des charges. En déduire le diamètre minimal d_{min} et maximal d_{max} de la tuyauterie en mm.

I.1 - Modélisation mécanique du système d'aspiration de la pompe

La **figure 2** présente le schéma cinématique d'une partie de la pompe. Le système est constitué de quatre éléments principaux : trois pièces mobiles et une pièce fixe.

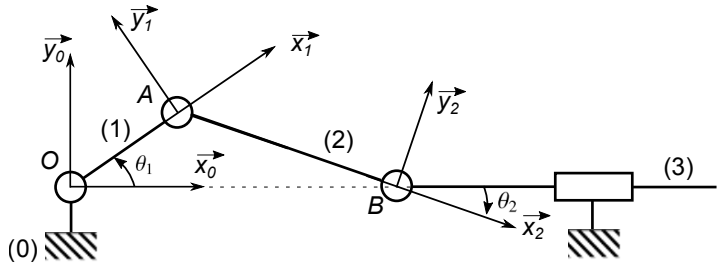


Figure 2 - Schéma cinématique d'une partie de la pompe

Paramétrage :

- le repère R_0 $(O,\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0})$ est lié au bâti (0), ce repère sera considéré comme galiléen ;
- le repère R_1 $(O,\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_0})$ est lié à la manivelle (1). La liaison entre (1) et (0) est considérée comme une liaison pivot parfaite d'axe $(O,\vec{z_0})$;
- le repère R_2 $(A,\vec{x_2},\vec{y_2},\vec{z_2})$ est lié à la bielle (2). La liaison entre (2) et (1) est considérée comme une liaison pivot parfaite d'axe $(A,\vec{z_0})$;
- la liaison entre le piston (3) et la bielle (2) est considérée comme une liaison pivot parfaite d'axe $(B,\vec{z_0})$;
- la liaison entre le piston (3) et le bâti (0) est considérée comme une liaison glissière parfaite de direction $\vec{x_0}$ et sa position est paramétrée par la distance variable x_3, telle que $\overrightarrow{OB} = x_3\vec{x_0}$;
- $\theta_1 = (\vec{x_0},\vec{x_1}) = (\vec{y_0},\vec{y_1})$ et $\theta_2 = (\vec{x_0},\vec{x_2}) = (\vec{y_0},\vec{y_2})$;
- $\overrightarrow{OA} = R\vec{x_1}$ et $\overrightarrow{AB} = L\vec{x_2}$;
- R et L sont des constantes avec $R < L$;
- le diamètre du piston est noté d_p ;
- l'origine des temps t = 0 est telle que θ_1 = 0.

Grâce à un moteur, la manivelle (1) est animée d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire $\Omega_m = \dot{\theta}_1$ constante.

Q2. Exprimer la relation entrée-sortie entre x_3 et θ_1 sous la forme $x_3 = f(\theta_1, R, L)$. Justifier que la relation entrée-sortie donnée ci-dessous est la seule solution possible.

$$x_3 = R\cos\theta_1 + \sqrt{L^2 - (R\sin\theta_1)^2}.$$

Q3. Donner l'expression de $\frac{x_3}{L}$ en fonction de θ_1. Tracer l'allure de $\frac{x_3}{L}$ en fonction de θ_1 sur $[0, 4\pi]$ pour un ratio $\frac{R}{L} = \frac{1}{2}$. Préciser les valeurs de $\frac{x_3}{L}$ pour θ_1 = 0 et $\theta_1 = \pi$.

Q4. Exprimer littéralement la cylindrée C de la pompe (volume balayé par le piston (3) pour un tour de la manivelle (1)) en fonction de R et de d_p.

Q5. Exprimer la vitesse v_3 du piston par rapport au bâti en fonction de θ_1, Ω_m, R et de L.

Le débit instantané q de l'eau refoulée par la pompe est nul pour $\theta_1 \in [0, \pi]$ et il se produit pour $\theta_1 \in [\pi, 2\pi]$.

Q6. En déduire les expressions du débit instantané q de l'eau refoulée pour $\theta_1 \in [0, \pi]$ et pour $\theta_1 \in [\pi, 2\pi]$ en fonction de v_3 et de d_p.

Q7. À partir du résultat obtenu à la question **Q6**, déterminer l'expression du débit moyen refoulé q_{moy} par tour de manivelle en $m^3 \cdot s^{-1}$ en fonction de R, d_p et de Ω_m.

Le débit est mesuré pour une pompe où d_p = 0,03 m, R = 0,04 m et L = 0,08 m. La vitesse de rotation du moteur est constante et égale à Ω_m = 2 500 tours $\cdot$ min^{-1}. Les résultats obtenus sont donnés sur la **figure 3**.

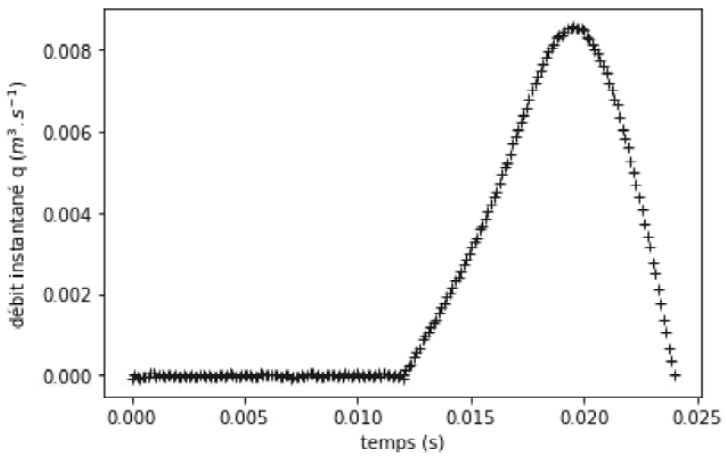


Figure 3 - Relevés de mesure du débit de la pompe

Q8. Définir la fonction Python `moyenne(q)`. Cette fonction prend comme argument la liste des débits relevés `q` en $m^3 \cdot s^{-1}$ et renvoie le débit moyen `qmoy` en $m^3 \cdot s^{-1}$.

Q9. Le code Python donne un débit moyen $q_{moy} = 2,4 \cdot 10^{-3}$ m$^3 \cdot$s^{-1}. Calculer le débit moyen obtenu par la modélisation à partir de l'expression trouvée à la question **Q7**. Comparer le résultat obtenu par modélisation et par expérimentation. Conclure quant à la validité du modèle proposé précédemment.

I.2 - Modélisation de la régulation sous la forme d'un schéma-bloc

Le débit moyen de la pompe est asservi. L'étude porte sur le dimensionnement du correcteur qui permet d'assurer les exigences du cahier des charges données dans la **table 1** pour un échelon de position.

Exigences	Critères	Niveaux
Précision	Écart de position Écart de position pour la perturbation	ϵ_s = 0 ϵ_{pert} = 0
Rapidité	Temps de réponse à 5 %	$tr_{5\%} < 1\ s$
Stabilité	Marge de gain Marge de phase Amortissement	MG > 10 dB MP > 45° pas de dépassement

Table 1 - Cahier des charges de l'asservissement

Le système de régulation est composé :

- d'un adaptateur de gain K_a ;
- d'un capteur de débit de gain K_q avec $K_q = 1$ V $\cdot$ s $\cdot$ m^{-3} ;
- d'un correcteur de fonction de transfert $C(p) = 1$ dans un premier temps ;
- d'un variateur de gain $K_v = 10$;
- d'un moteur à courant continu de fonction de transfert $H(p) = \dfrac{K_m}{1 + \tau_m p}$ avec $K_m = 10$ rad $\cdot$ s^{-1} $\cdot$ V^{-1} et $\tau_m = 1$ s ;
- d'une pompe de gain $K_{pom} = 9 \cdot 10^{-6}$ m$^3 \cdot$ rad^{-1} ;
- d'un ensemble de conduites pouvant engendrer des pertes de charges et une diminution du débit Q_{pc}.

Le schéma-bloc du système asservi est donné sur la **figure 4**.

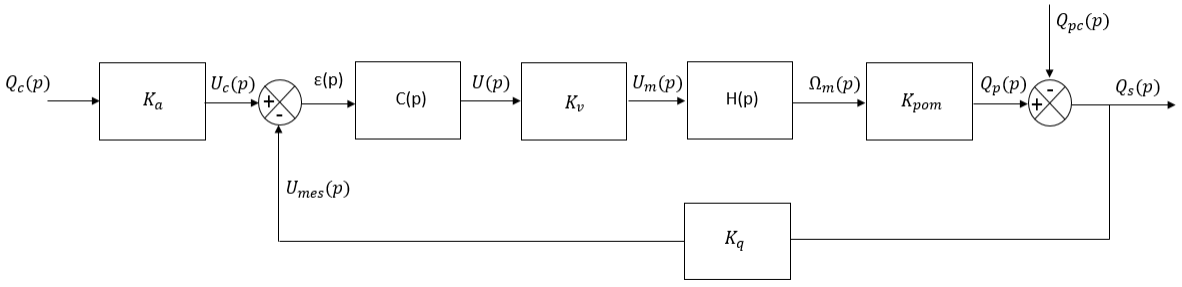


Figure 4 - Schéma-bloc de l'asservissement du débit

Q10. Déterminer l'expression du gain K_a de l'adaptateur pour que l'écart ϵ soit nul en régime permanent.

Q11. Déterminer la relation de transfert $Q_s(p) = H_1(p) \cdot Q_c(p) + H_2(p) \cdot Q_{pc}(p)$. Préciser les expressions de $H_1(p)$ et de $H_2(p)$ sous forme canonique.

Q12. Le système, non asservi, respecte-t-il les exigences de précision ? Justifier.

I.3 - Mise en place d'un correcteur

Dans un second temps, le correcteur choisi est un correcteur de type proportionnel intégral dont la fonction de transfert est :

$$C(p) = K_p \cdot \left(\frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p} \right).$$

Q13. Justifier que la mise en place de ce correcteur permet de respecter l'exigence de précision donnée dans la **table 1**.

On se place désormais dans le cas où $Q_{pc}(p) = 0$.

Q14. Régler le paramètre T_i du correcteur afin de compenser le pôle dominant de la fonction de transfert en boucle ouverte. Donner, dans cette configuration, l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p)$ du système corrigé. Préciser l'expression du gain en boucle ouverte notée K_{BO}.

Q15. Rappeler les expressions de marge de gain MG et de marge de phase MP. À partir de l'expression de $H_{BO}(p)$ trouvée précédemment, justifier le respect des critères de marge de gain et de marge de phase donnés dans la **table 1**.

Q16. Déterminer, sous forme canonique, l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$ du système corrigé, en prenant en compte la compensation de pôle dominant. Justifier que cette correction permet de respecter le critère d'amortissement du cahier des charges donné dans la **table 1**.

Q17. En prenant $K_{BO} = 9 \cdot 10^{-4} \cdot K_p$, calculer la valeur minimale de K_p permettant de respecter le critère de rapidité du cahier des charges donné dans la **table 1**.

Partie II - Régulation des paramètres physico-chimiques de l'eau

Pour assainir l'eau de la piscine, on utilise du "chlore actif", qui est en réalité de l'acide hypochloreux HClO. L'acide hypochloreux et sa base conjuguée, l'ion hypochlorite ClO^-, (la somme des concentrations de ces deux espèces est appelée chlore libre) étant dégradés par les rayonnements UV, un asservissement de leur concentration est nécessaire. Dans un système automatisé, la production d'acide hypochloreux et d'ion hypochlorite ClO^- est réalisée par électrolyse des ions chlorure Cl^-, introduits sous la forme de chlorure de sodium dans la piscine, en dichlore Cl_2.

Données :

- masse molaire du sodium M(Na) = 23,0 $g \cdot mol^{-1}$;

- masse molaire du chlore M(Cl) = 35,5 $g \cdot mol^{-1}$;

- masse molaire de l'oxygène M(O) = 16,0 $g \cdot mol^{-1}$;

- masse molaire de l'hydrogène M(H) = 1,00 $g \cdot mol^{-1}$;

- constante de Faraday F = 96,5 $\cdot 10^3$ $C \cdot mol^{-1}$;

- potentiel standard du couple $HClO/, Cl^-$ E° = 1,49 V ;

- profondeur du bassin L = 1,5 m ;

- surface de l'eau S_e = 28 m^2 ;

- constante de Planck h = 6,63 $\cdot 10^{-34}$ $J \cdot s$;

- constante d'Avogadro $\mathcal{N}_A$ = 6,02 $\cdot 10^{23}$ mol^{-1}.

Q18. La concentration massique en chlorure de sodium $NaCl_{(s)}$ est c_m = 5,0 $g \cdot L^{-1}$. En déduire la concentration molaire c_0 en ion chlorure dans l'eau.

Q19. L'eau de la piscine a un léger goût d'eau de mer. Pourquoi ?

Q20. Après avoir écrit l'équation-bilan associée, déterminer la vitesse de production de dichlore lorsque l'électrolyseur fonctionne. On donne la densité surfacique de courant d'électrolyse ainsi que la surface d'une électrode j = 4,0 $kA \cdot m^{-2}$; S = 20 cm^2.

Q21. Le diagramme E-pH du chlore est donné **figure 5**. Associer, en le justifiant, les différentes espèces chlorées (dichlore, ion chlorure, acide hypochloreux et ion hypochlorite) aux domaines indiqués.

Q22. Donner par lecture graphique le pKa du couple $HClO/ClO^-$.

Q23. Justifier que l'acide hypochloreux et l'ion hypochlorite ne sont pas stables dans l'eau. Les réactions de ces espèces avec l'eau ne seront pas prises en compte. Proposer une explication.

Q24. Le pH de l'eau de piscine est maintenu à 7,2. Le dichlore est-il stable dans l'eau ? Justifier pourquoi de l'acide hypochloreux est formé et donner l'équation-bilan associée.

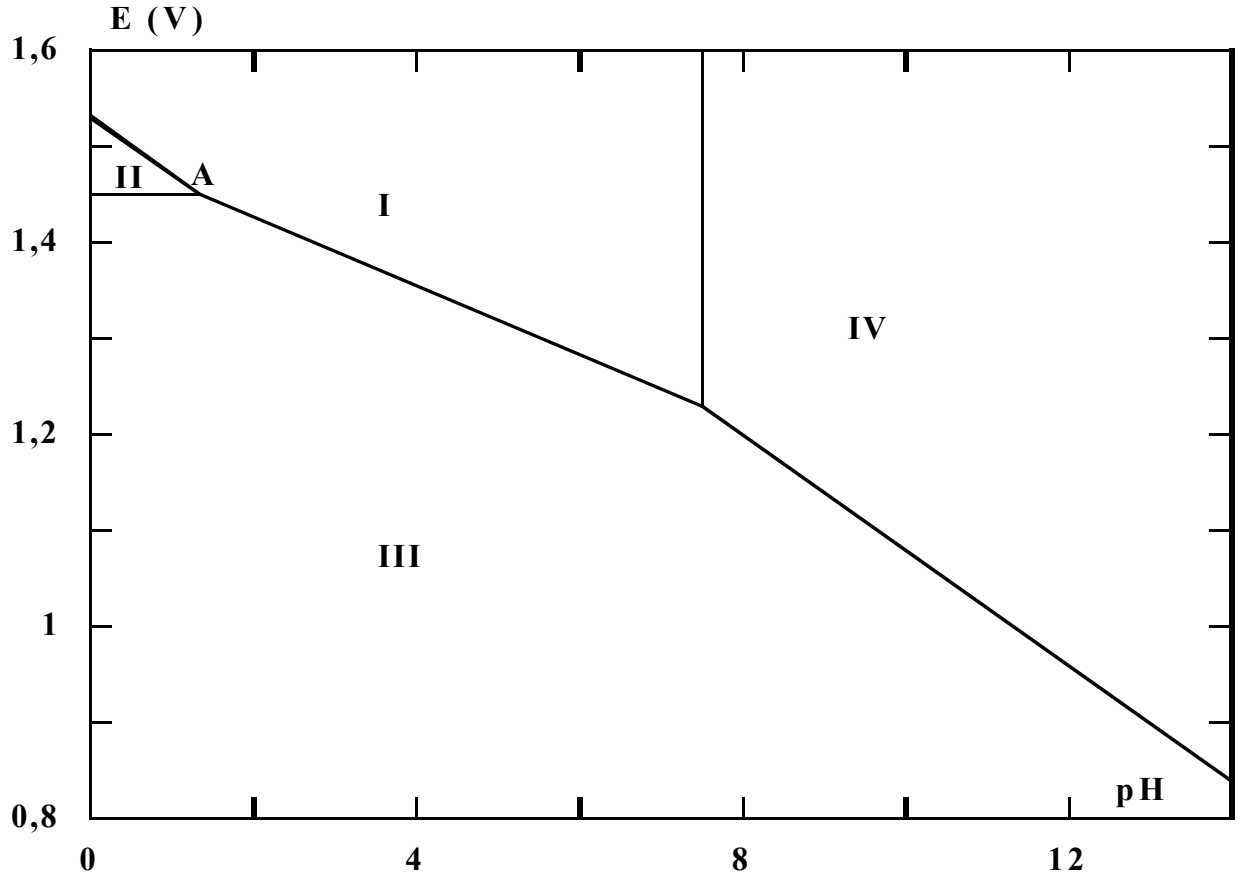


Figure 5 - Diagramme de Pourbaix du chlore

Q25. La concentration molaire en élément chlore sous forme HClO doit être comprise entre 10 et 40 μmol $\cdot$ L^{-1} pour assurer une bonne désinfection de l'eau. Pour une concentration molaire c_t en chlore libre égale à 60 μmol $\cdot$ L^{-1}, l'eau de la piscine est-elle bien désinfectée ? On donne $10^{-0,3} = 0,5$.

Q26. Pour mesurer la concentration molaire en acide hypochloreux, on utilise une sonde redox constituée d'une électrode de platine et d'une électrode au chlorure d'argent saturée comme référence (le potentiel d'une électrode d'argent est $E_{ref} = 0,199$ V à 25 °C). En utilisant la formule de Nernst relative au couple HClO/Cl$^-$, exprimer littéralement la différence de potentiel mesurée.

Numériquement, on obtient 633 mV $< U <$ 669 mV.

Q27. Quelle est l'influence de la production de dichlore sur le pH de l'eau ? Quelle en est la conséquence ?

La différence de potentiel entre les deux électrodes du pH-mètre est amplifiée, puis convertie numériquement par un Convertisseur Analogique Numérique (CAN), afin d'être affichée sur le boîtier de contrôle de l'eau. La valeur obtenue permet d'asservir la quantité de correcteur

à injecter par la pompe péristaltique. La précision souhaitée est de 0,1 valeur de pH.

La chaîne de mesure du pH est représentée sur la **figure 6**.

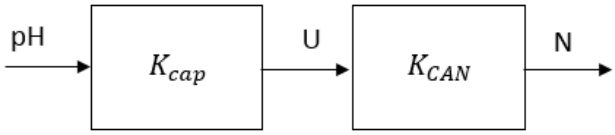


Figure 6 - Chaîne de mesure du pH

La tension de sortie du capteur U varie entre 0 et 10 V pour des valeurs de pH pouvant varier de 0 à 14. Le CAN permet d'obtenir en sortie un nombre N codé sur 12 bits.

Q28. Préciser la nature des grandeurs physiques en entrée et en sortie du capteur. Justifier l'emploi du CAN. Déterminer le gain K_{cap} du capteur et le gain K_{CAN} du CAN.

Q29. Déterminer la plus petite variation de pH mesurable par la chaîne de mesure. Comparer cette variation avec la précision requise dans le cahier des charges. Conclure sur la pertinence de la chaîne de mesure du pH.

La diminution de la concentration en chlore libre est principalement due à la dégradation des espèces chlorées par les UV. On se propose maintenant d'estimer la cinétique de ces réactions activées par l'absorption d'un photon par les espèces chlorées. On supposera un rendement photochimique de 1, c'est-à-dire que chaque photon UV absorbé provoque une réaction chimique.

Q30. Rappeler la loi de Beer-Lambert en rappelant l'unité des différentes grandeurs introduites.

Q31. La **figure 7** donne le coefficient d'extinction molaire de HClO et ClO^- en fonction de la longueur d'onde. En se plaçant à 290 nm, pour simplifier, donner les coefficients d'absorption molaire des ions hypochlorite ε_{ClO^-} et de l'acide hypochloreux ε_{HClO} à cette longueur d'onde.

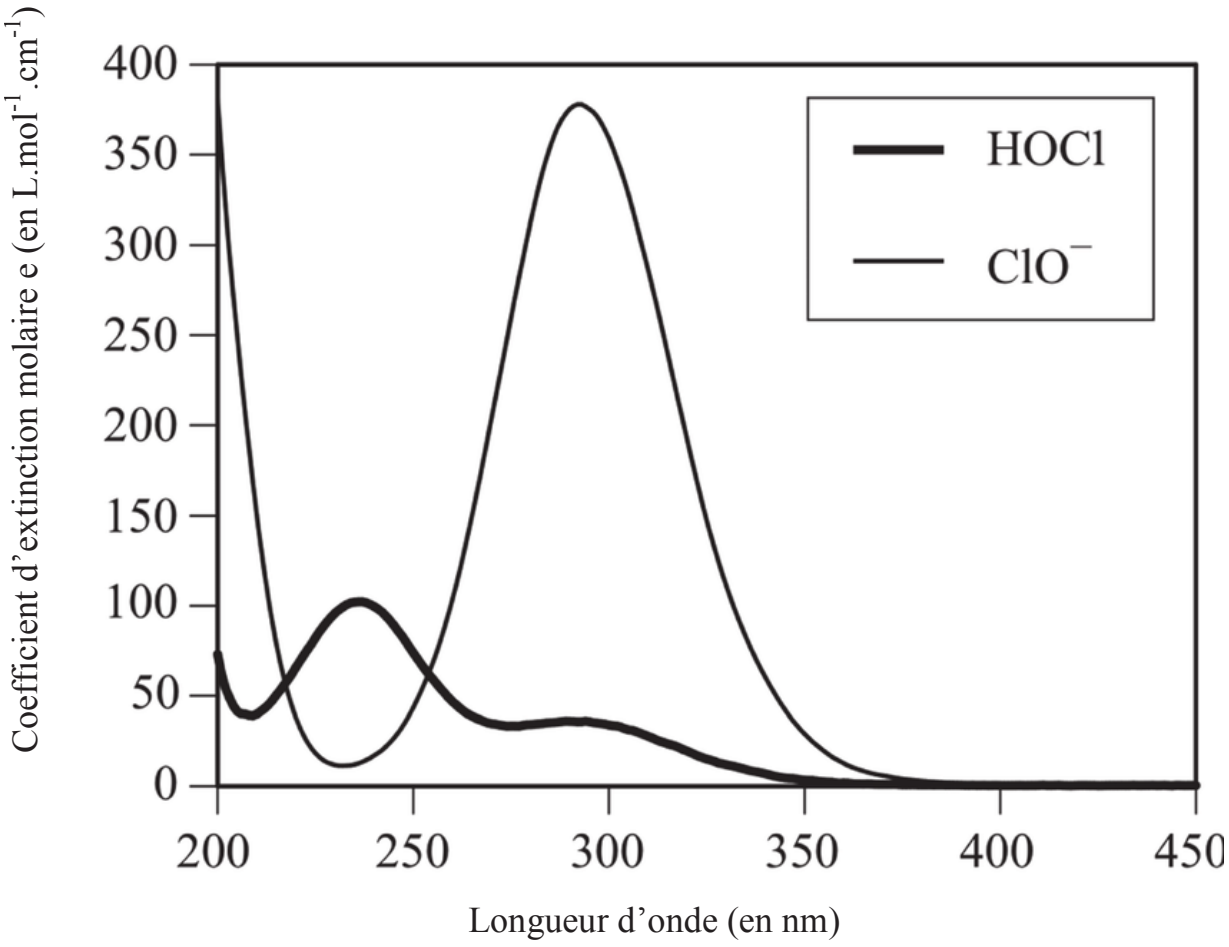


Figure 7 - Courbe d'extinction molaire des espèces chlorées considérées

Q32. On supposera qu'à part l'eau, aucune autre espèce n'absorbe à cette longueur d'onde. Réécrire la loi de Beer-Lambert en y faisant apparaître uniquement la concentration molaire [HClO] comme concentration. La mettre sous la forme $A = \alpha_t[\text{HClO}]z$ où z désigne la profondeur d'eau traversée, on exprimera α_t en fonction de $\varepsilon_{\text{ClO}^-}$, $\varepsilon_{\text{HClO}}$, K_a et de $[\text{H}^+]$.

Numériquement $\alpha_t = 2{,}3 \cdot 10^4$ L · mol^{-1}· m^{-1}. On note $I(z)$ l'intensité lumineuse à la profondeur z dans l'eau.

Q33. La **figure 8** donne α_e, le coefficient d'absorption par mètre d'eau traversé en fonction de la longueur d'onde, tel que $\alpha_e z = \log\left(\frac{I(0)}{I(z)}\right)$. Peut-on négliger l'absorption des UV due à l'eau à 290 nm ?

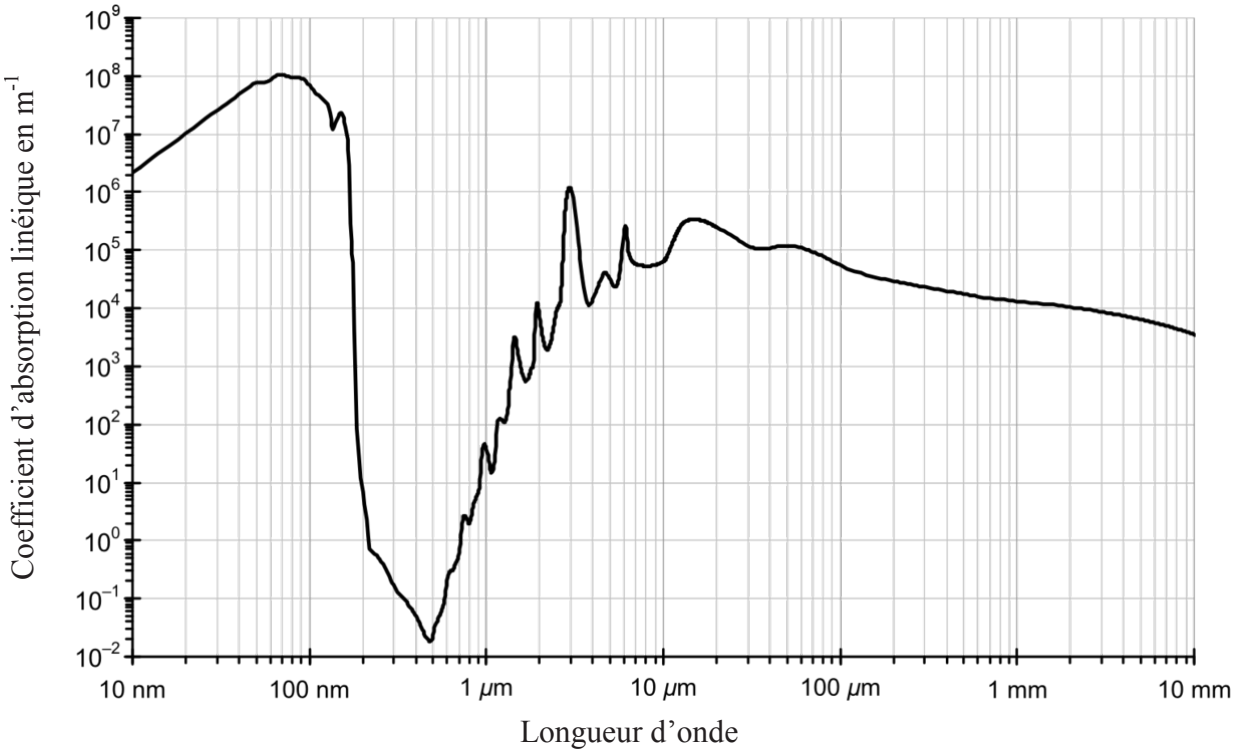


Figure 8 - Coefficient d'absorption de l'eau en fonction de la longueur d'onde

Q34. En déduire l'expression de l'intensité $I(z)$ du rayonnement UV à la profondeur z. On notera $I_0 = I(0)$ l'intensité lumineuse à la surface du bassin.

Q35. Rappeler la relation de Planck-Einstein.

Q36. En interprétant α_e et $\alpha_l[HClO]$ comme des probabilités linéiques d'absorption d'un photon, en déduire l'expression de la proportion τ de photons absorbés par le chlore libre.

Q37. Établir l'expression de la vitesse de disparition (en mol $\cdot$ s^{-1}) $v_d = \tau K_d \cdot (I(0) - I(L))$ du chlore libre sous l'effet des rayonnements UV, où K_d est une constante dont on donnera l'expression.

L'eau de la piscine de volume V est supposée uniforme (concentration en espèces chimiques, température...). Une pompe assure la circulation de l'eau dans le système de filtration couplé aux divers dispositifs permettant le contrôle des paramètres physico-chimiques de l'eau. On se propose de modéliser la régulation de la concentration molaire $c(t) = [HClO](t)$ en chlore actif dans la bassin afin d'obtenir la durée journalière de fonctionnement de l'électrolyseur.

Q38. Exprimer la vitesse de production v_p en acide hypochloreux uniquement due à l'apport de l'électrolyseur.

Q39. En réalisant un bilan de quantité de matière, déterminer l'équation différentielle vérifiée par c (que vous noterez équation (1)).

Q40. Un programme Python, dont un extrait est donné **figure 10**, permet de résoudre l'équation (1) dans le cas d'une intensité variable de rayonnement UV. Justifier l'allure de la courbe de la **figure 9** sur une journée. Quel phénomène n'est pas pris en compte ?

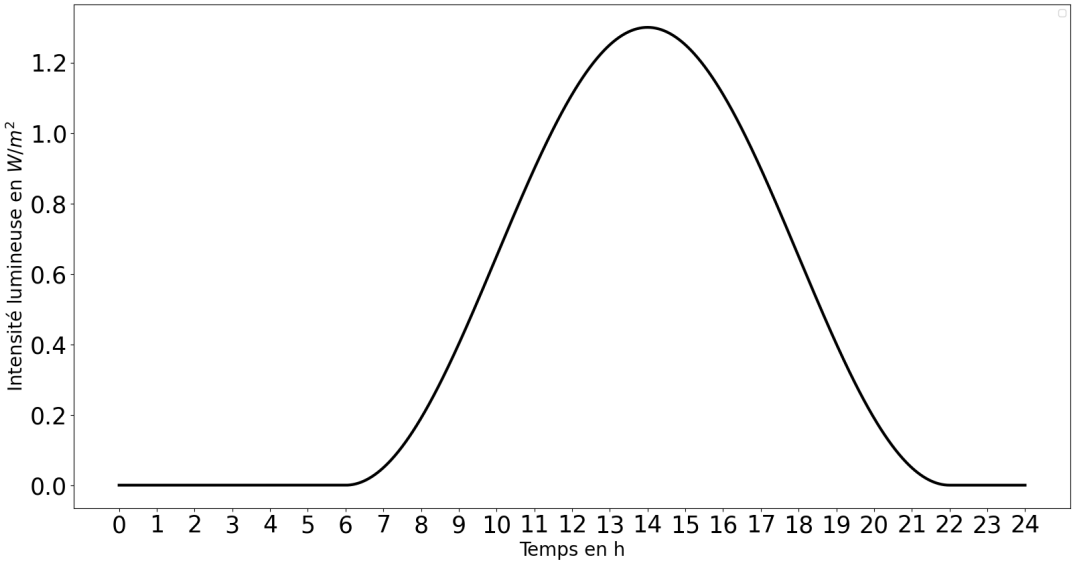


Figure 9 - Intensité lumineuse dans l'UV au cours d'une journée d'été

Q41. Compléter la dernière ligne (ligne 16) du programme python (**figure 10**) permettant de résoudre l'équation (1) par la méthode d'Euler. On pourra appeler les fonctions $electrolyseur(t)$ (voir **figure 12**) et $phi(t) = I_0(t)$ l'intensité lumineuse au cours du temps à la surface du bassin.

```
 1 I = 8
 2 F = 96500
 3 c_0 = 3.3*10**-5
 4 S_eau = 7*4
 5 L = 1.5
 6 V = 1.5*S_eau
 7 v_p = I/(2*F)*3600
 8 alpha_t = 2.3*10**4
 9 alpha_e = 0.1
10 c = [c_0]
11 dt = T[1]- T[0]
12 K_d = S_eau*300*10**-9/(6.63*10**-34 * 3*10**8 * 6.02*10**23)*3600
13
14 for k in range(0,len(T)-1) :
15
16     c +=
```

Figure 10 - Extrait du programme Python

Q42. Les valeurs prises par le potentiel de l'eau de la piscine (**figure 11**) au cours du temps sont-elles conformes aux valeurs numériques obtenues à la question **Q26** ?

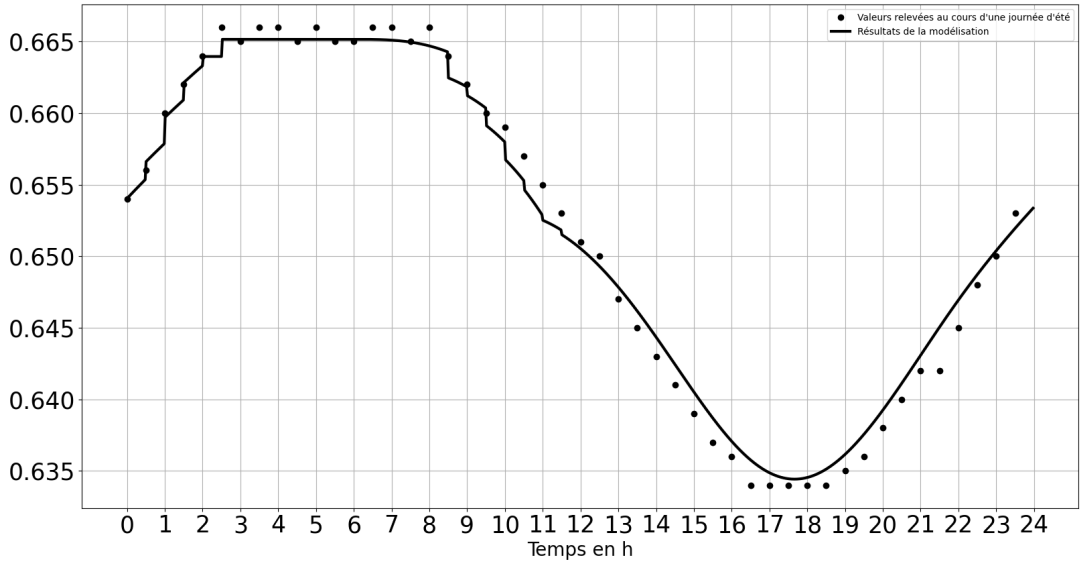


Figure 11 - Potentiel d'oxydoréduction de l'eau de la piscine (ordonnée en mV). Comparaison entre les relevés expérimentaux (points) et la solution numérique (en trait plein)

Q43. Justifier que, dans le cadre de ce modèle, la concentration en ions chlorure ne varie pas au cours du temps. En réalité, il est recommandé de vérifier leur concentration au moins une fois par saison. Proposer une explication.

Q44. Déterminer la durée de fonctionnement de l'électrolyseur sur une journée à l'aide de la **figure 12**.

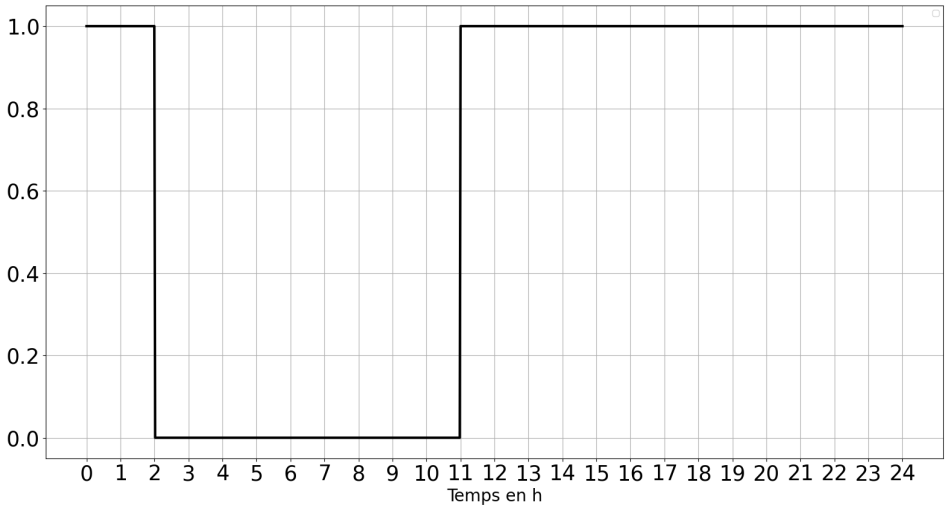


Figure 12 - Fonctionnement de l'électrolyseur (1 s'il est allumé et 0 s'il est éteint)

Q45. Déterminer, à l'aide de la **figure 13**, la tension d'électrolyse U. On néglige la résistance de la cellule d'électrolyse et on rappelle que $j = 4{,}0\ \text{kA}\cdot\text{m}^{-2}$ et $S = 20\ \text{cm}^2$. En déduire la puissance électrique consommée sur une journée en kWh.

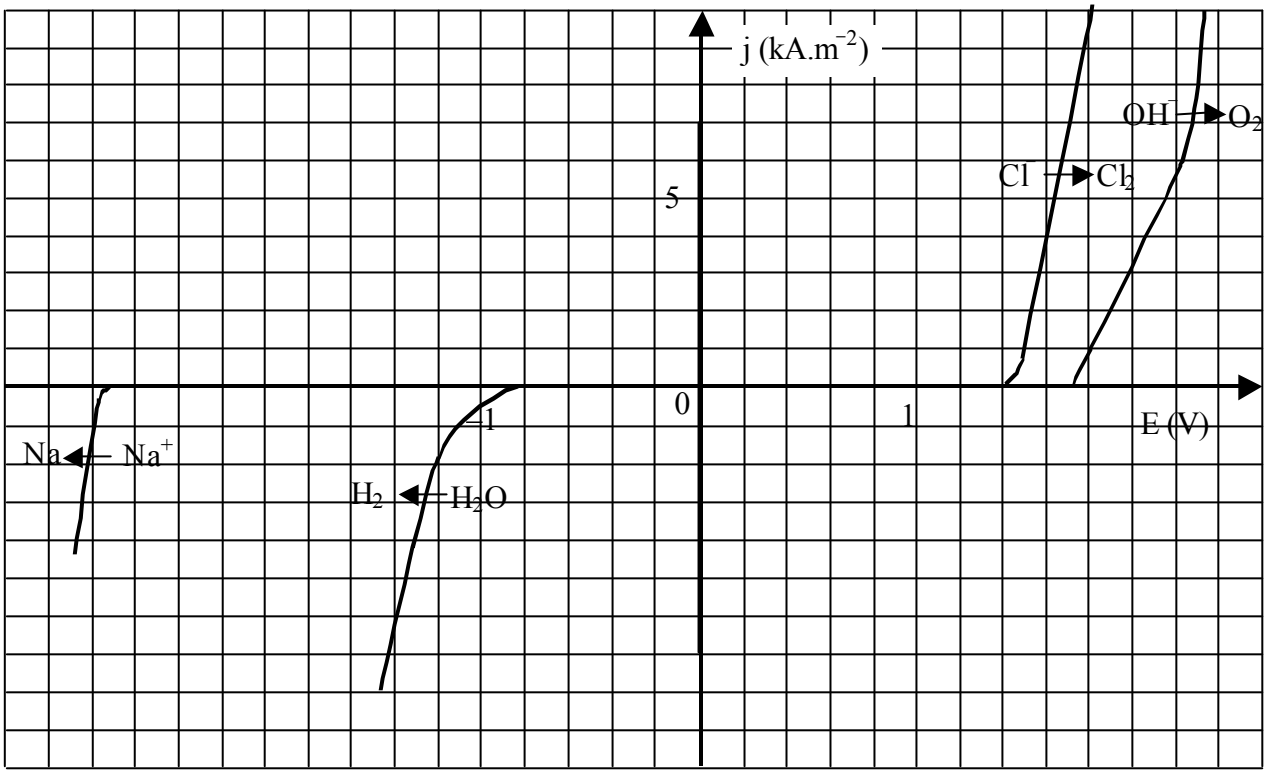


Figure 13 - Courbes intensité-potentiel sur une électrode de tungstène

Q46. On recommande de fermer le volet roulant de la piscine en pleine journée lorsque l'on ne s'y baigne pas. Quel en est l'intérêt ?

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 26 1016 – D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Diagrammes potentiel-pH
- Oxydoréduction et piles électrochimiques
- Réactions acide-base
- Cinématique des mécanismes : composition des mouvements, contact ponctuel, lois entrée-sortie et fermetures
- Régimes transitoires
- Électronique numérique
- Système physico-chimique et état final d'une transformation chimique
- Bases de Python : expressions, types, instructions, fonctions

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/psi