Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2021, filière TPC

Physique

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Problème 1, partie I : intérêt d'une couche antireflet
- Problème 1, partie II : paramètres d'une couche antireflet
- Problème 1, partie III : exploitation
- Problème 1, partie IV : contrôle de l'épaisseur du dépôt
- Problème 2, partie I : effet Hall classique
- Problème 2, partie II : effet Hall quantique

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/tpc/2021/physique

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TPC

PHYSIQUE

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

PROBLÈME 1

Couche antireflet



Les couleurs présentes dans le monde animal, végétal ou minéral sont le plus souvent d'origine pigmentaire, comme la couleur de la plupart des plantes. Certaines couleurs résultent toutefois de propriétés structurales de la matière comme la couleur de certaines nacres ou celle des ailes de certains papillons et sont régies par un ou plusieurs phénomènes physiques.

Ces phénomènes sont aussi utilisés dans l'industrie pour fabriquer des dépôts aux propriétés particulières comme les traitements antireflets des pare-brises de voitures, des lunettes ou plus généralement des instruments optiques.

Partie I - Intérêt d'une couche antireflet

On souhaite savoir s'il est nécessaire d'utiliser des verres traités antireflets dans l'appareil photographique de la **figure 1a** dont une schématisation très simplifiée est proposée **figure 1b**.



Figure 1a - Canon EOS R5 (www.canon.fr)

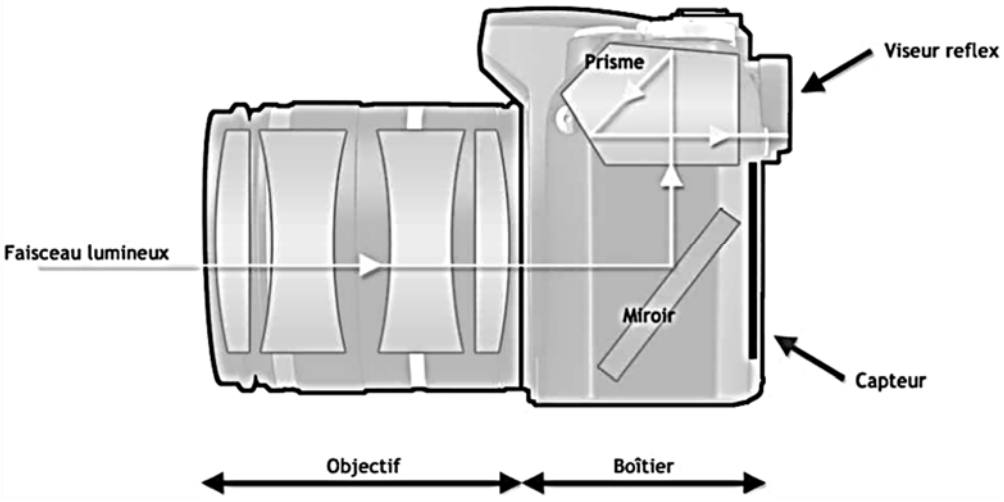


Figure 1b - Schématisation simplifiée

Pour ce faire, on modélise simplement une face d'une lentille par un dioptre plan séparant le milieu ① d'indice n_1 du milieu ③ d'indice n_3. Une onde lumineuse incidente, d'intensité I, arrivant sous incidence normale à l'interface entre les deux milieux est partiellement réfléchie et partiellement transmise (**figure 2**).

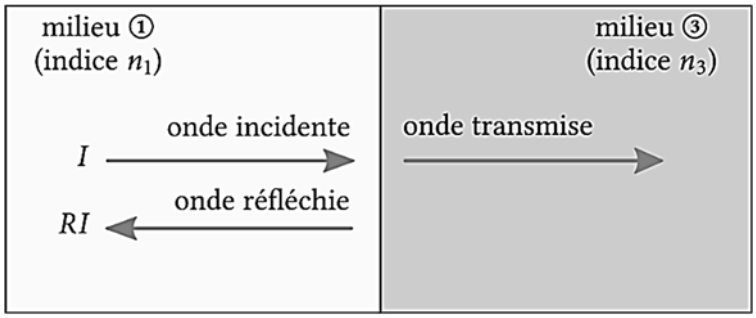


Figure 2 - Modélisation d'une face de lentille

On note respectivement r_{13} et t_{13} les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude de l'onde lumineuse. Le coefficient de réflexion énergétique, s'appliquant à l'intensité lumineuse, est noté R. Sous incidence normale, on admet que ces coefficients valent :

$$r_{13} = \frac{n_1 - n_3}{n_1 + n_3} \; ; \qquad t_{13} = \frac{2n_1}{n_1 + n_3} \; ; \qquad R = \left(\frac{n_1 - n_3}{n_1 + n_3} \right)^2 .$$

Q1. Dans le cas d'une réflexion air/verre, donner, d'après vos connaissances, un ordre de grandeur de la valeur des indices n_1 et n_3, puis calculer le coefficient r_{13}. En déduire quel pourcentage de l'intensité lumineuse incidente est réfléchi. Que devient ce pourcentage dans le cas de la réflexion verre/air ?

Q2. On suppose que les faces des lentilles de l'appareil photographique de la **figure 1b** sont assimilables à des dioptres plans dont le coefficient de réflexion énergétique vaut $R = 0,05$.
Sachant que le miroir bascule horizontalement lorsque l'on prend une photographie, déterminer le pourcentage du flux lumineux incident qui atteint effectivement le capteur. On pourra utiliser le coefficient de transmission énergétique $T = 1 - R$ et on mettra le résultat sous la forme T^n, avec n un entier dont on précisera la valeur.
Conclure quant à l'intérêt général du traitement antireflet.

Partie II - Paramètres d'une couche antireflet

Afin d'augmenter la transmission en réduisant la réflexion, on dépose sur le verre une couche d'un matériau transparent (le milieu ②), d'indice n_2 et d'épaisseur e_2 bien choisis. Le but est d'obtenir des interférences destructives entre les multiples ondes réfléchies, produites grâce à la couche supplémentaire.

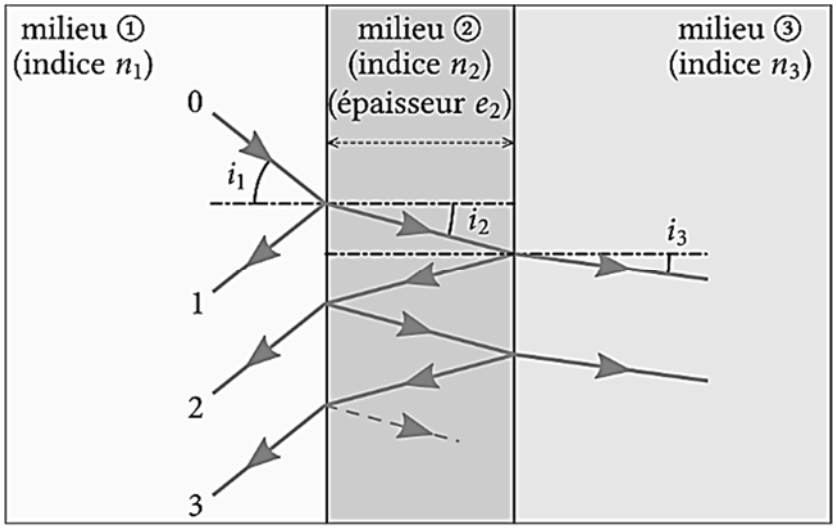


Figure 3 - Principe d'une couche antireflet

Le trajet du rayon lumineux numéro 0 est représenté sur la **figure 3** où l'on note i_1, i_2 ou i_3 les angles avec la normale au dioptre en fonction du milieu traversé. Ce rayon engendre une infinité de rayons réfléchis dont seuls les 3 premiers ont été représentés, sous incidence non nulle pour être identifiables. Toutefois, l'étude est menée sous incidence normale, si bien que les angles i_1, i_2 et i_3 sont nuls.

On suppose que les indices satisfont la relation $n_1 < n_2 < n_3$ et on note λ_0 la longueur d'onde dans le vide de l'onde incidente d'intensité I_0. On note I_1, I_2, … les intensités des ondes lumineuses réfléchies successives.

II.1 - Épaisseur de la couche antireflet

Q3. Montrer que la différence de marche entre deux rayons lumineux réfléchis consécutifs, par exemple les rayons numéros 1 et 2, vaut $\delta = \delta_{2/1} = 2n_2e_2$.

Q4. Exprimer la différence de phase $\Delta\varphi$ associée à la différence de marche δ précédente. En déduire que pour obtenir des interférences destructives, l'épaisseur e_2 de la couche antireflet doit satisfaire l'équation :

$$e_2 = (2p+1)\frac{\lambda_0}{4n_2},\ p \in \mathbb{N}.$$

II.2 - Indice de la couche antireflet

On note ensuite r_{12} et r_{23} les coefficients de réflexion en amplitude de l'onde lumineuse exprimés au niveau des interfaces entre les milieux ① et ② et entre les milieux ② et ③.

Q5. Exprimer r_{12} et r_{23} en fonction des différents indices. Donner la signification du coefficient r_{21} et son expression par rapport à r_{12}.

En tenant compte de l'ensemble des ondes lumineuses réfléchies on obtient, dans le cas d'interférences destructives, l'expression admise de l'intensité lumineuse réfléchie suivante :

$$I = I_0 \frac{\left(r_{12} - r_{23}\right)^2}{1 - 2r_{12}r_{23} + r_{12}^2 r_{23}^2}.$$

Q6. Lorsque $n_2 = n_3$, quel résultat de la partie I retrouve-t-on ?

Q7. Déduire de l'expression de l'intensité qu'il y a interférences destructives lorsque l'indice n_2 de la couche antireflet satisfait l'équation :

$$n_2 = \sqrt{n_1 n_3}.$$

Partie III - Exploitation

On souhaite fabriquer une couche antireflet pour des lentilles pouvant être utilisées dans des verres de lunettes ou des objectifs photographiques.

Document 1 - Efficacité lumineuse spectrale relative de l'œil humain

La sensibilité de l'œil humain dépend de la longueur d'onde. Des études statistiques menées par la Commission Internationale de l'Éclairage (CIE) ont permis de déterminer l'efficacité lumineuse spectrale relative notée $\mathrm{V}(\lambda)$ de l'œil humain moyen, tracée sur la **figure 4**. L'œil est d'autant plus sensible que la valeur de $\mathrm{V}(\lambda)$ est élevée.

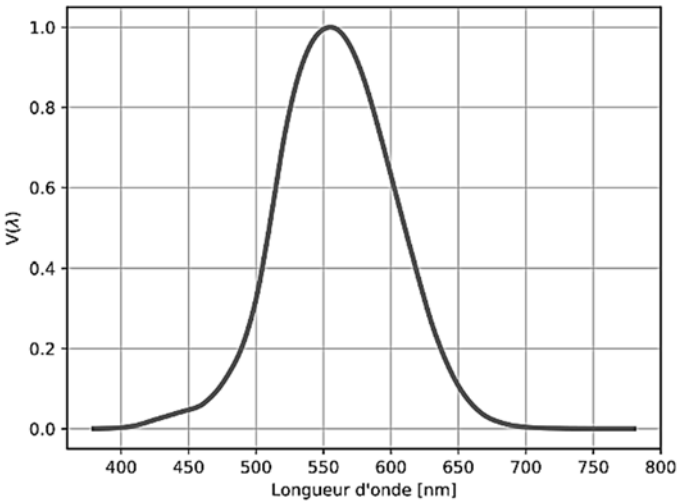


Figure 4 - Efficacité lumineuse spectrale relative (source CIE)

Q8. À l'aide du **document 1**, expliquer pour quelle longueur d'onde les couches antireflets sont réalisées et donner sa valeur.

On suppose que le milieu ① est l'air et que le milieu ③ est du verre de type BK7 dont les caractéristiques techniques se trouvent dans le **document 2**.

Document 2 - Caractéristiques techniques du verre BK7

Indices de réfraction		
	λ [nm]	
n_r	706.5	1.51289
n_C	656.3	1.51432
$n_{C'}$	643.8	1.51472
$n_{632.8}$	632.8	1.51509
n_D	589.3	1.51673
n_d	587.6	1.51680
n_e	546.1	1.51872
n_F	486.1	1.52238
$n_{F'}$	480.0	1.52283
n_g	435.8	1.52668
n_h	404.7	1.53024

Transmittance interne τ_i		
λ [nm]	τ_i (10mm)	τ_i (25mm)
700	0.998	0.996
660	0.998	0.994
620	0.998	0.994
580	0.998	0.995
546	0.998	0.996
500	0.998	0.994
460	0.997	0.993
436	0.997	0.992
420	0.997	0.993
405	0.997	0.993
400	0.997	0.992

Autres propriétés	
$\alpha_{-30/+70°C}[10^{-6}/K]$	7.1
$\alpha_{+20/+300°C}[10^{-6}/K]$	8.3
T_g[°C]	557
$T_{10}^{13.0}$[°C]	557
$T_{10}^{7.6}$[°C]	719
c_p[J/(g·K)]	0.858
λ [W/(m·K)]	1.114
ρ [g/cm^3]	2.51
E[10^3 N/mm^2]	82
μ	0.206
K[10^{-6} mm^2/N]	2.77
$HK_{0.1/20}$	610
HG	3
CR	1
FR	0
SR	1
AR	2.3
PR	2.3

Coefficients de température de l'indice de réfraction						
	$\Delta n_{rel}/\Delta T[10^{-6}/K]$			$\Delta n_{abs}/\Delta T[10^{-6}/K]$		
[°C]	**1060.0**	**e**	**g**	**1060.0**	**e**	**g**
-40/ -20	2.4	2.9	3.3	0.3	0.8	1.2
+20/ +40	2.4	3.0	3.5	1.1	1.6	2.1
+60/ +80	2.5	3.1	3.7	1.5	2.1	2.7

Q9. Compte tenu du résultat de la question précédente, déterminer l'indice de référence n_3 à partir du **document 2**. Calculer alors, avec 3 chiffres significatifs, l'indice n_2 et l'épaisseur minimale $e_{2,m}$ du dépôt à réaliser sur un verre de type BK7 pour obtenir un traitement antireflet.
Que penser des valeurs obtenues ?

Afin de vérifier l'efficacité du dépôt réalisé, on enregistre l'intensité réfléchie en fonction de la longueur d'onde avant et après le traitement, ce qui donne les cinq courbes de la **figure 5**.

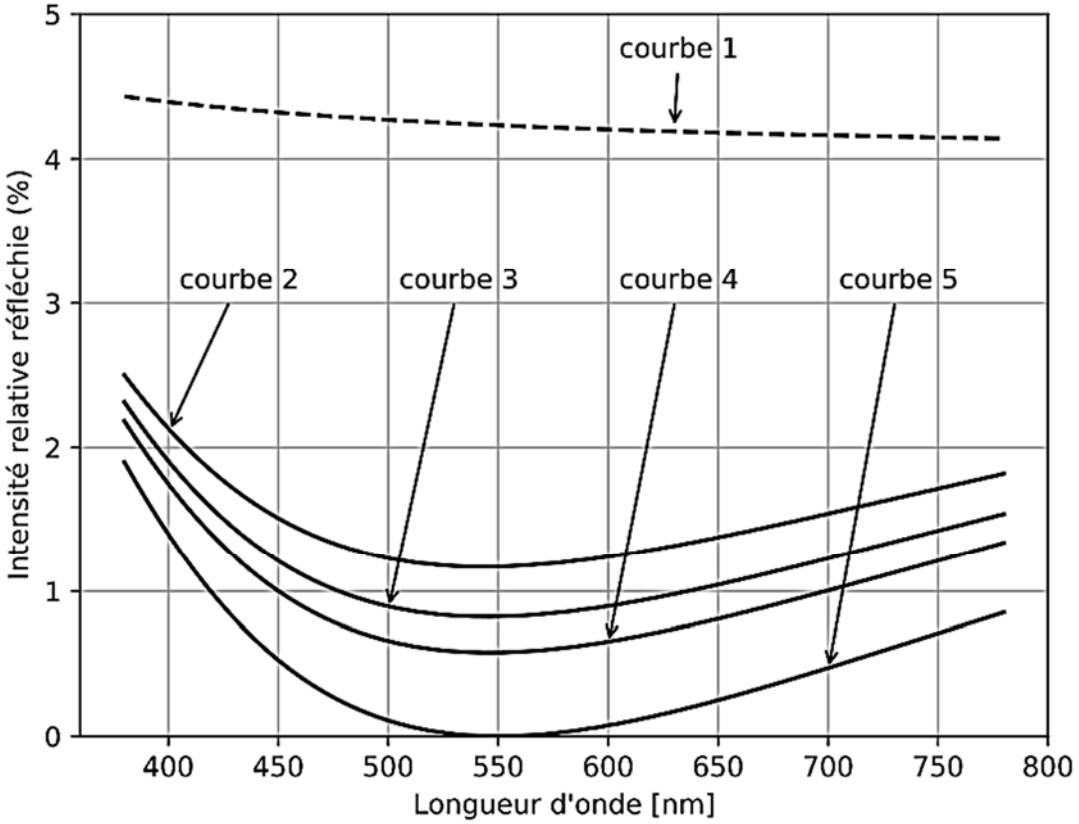


Figure 5 - Intensité relative réfléchie

L'une de ces courbes a été obtenue sans traitement, trois autres correspondent à des dépôts d'un matériau réel (matériaux appelés M_1, M_2 et M_3) et la dernière provient d'une simulation informatique (matériau X). Les indices correspondants sont rassemblés dans le **tableau 1**.

Matériau	X	M_1	M_2	M_3
Indice	1,23	1,33	1,35	1,38

Tableau 1

Q10. Expliquer simplement pourquoi l'intensité réfléchie dépend de la longueur d'onde.

Q11. En justifiant la démarche, associer chaque courbe à un matériau ou à l'absence de matériau.

Q12. Malgré le traitement, des reflets colorés persistent. Justifier leur existence et préciser la couleur de ces reflets.

Partie IV - Contrôle de l'épaisseur du dépôt

Afin de contrôler l'épaisseur e_2 du dépôt d'indice n_2, on place la lame traitée dans le dispositif de la **figure 6**. Dans ce montage, une source supposée ponctuelle et monochromatique (de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 550\,\text{nm}$), placée au foyer objet d'une lentille convergente, produit un faisceau de lumière traversant une lame semi-réfléchissante idéale. Le faisceau, réfléchi par le dépôt, est redirigé par la lame semi-réfléchissante vers un capteur placé au foyer image d'une lentille convergente (seuls les trajets des rayons lumineux utiles sont représentés sur la **figure 6**).

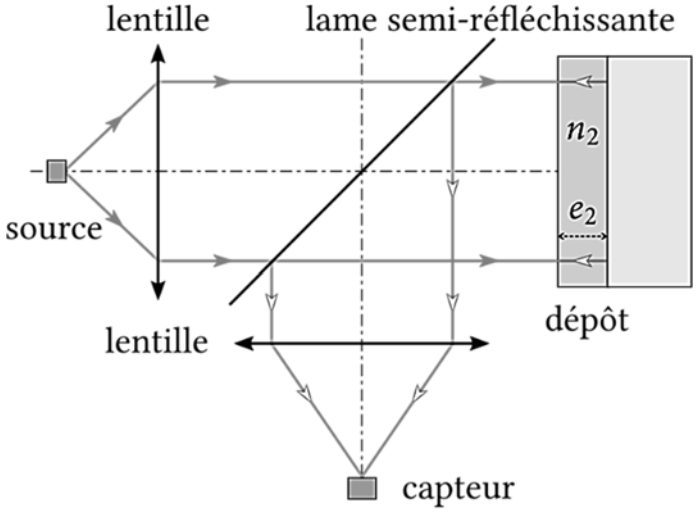


Figure 6 - Dispositif de contrôle du dépôt

Rayon	0	1	2	3
Intensité en %	100	2,00	1,70	$6{,}10\cdot10^{-4}$

Tableau 2 - Intensité des différents rayons lumineux réfléchis par le dépôt

Q13. Justifier, à l'aide des données du **tableau 2** relatives à la **figure 3**, qu'un modèle d'interférences à deux ondes suffit, en première approche, pour étudier l'intensité réfléchie.

L'intensité enregistrée sur le capteur suit la loi $I\left(e_2\right) = 2I_0\left[1+\cos\dfrac{4\pi n_2 e_2}{\lambda_0}\right]$.

Q14. Déterminer, en fonction de l'incertitude relative $\dfrac{\Delta I}{I_0}$ et des données du problème, l'expression de l'incertitude Δe_2 sur l'épaisseur e_2 de la couche formée.

Q15. En déduire, pour le matériau M_1, l'incertitude Δe_2 sur la mesure de l'épaisseur d'un dépôt de dimension voisine de 100 nm pour un capteur de sensibilité relative $\dfrac{\Delta I}{I_0} = 2{,}00\,\%$.

Conclure quant à la pertinence de ce dispositif.

PROBLÈME 2

Effet Hall classique et quantique

La découverte de l'effet Hall quantique en 1980 a bouleversé la physique de la matière condensée. Les retombées de ces découvertes sont énormes, allant de l'étalon standard de résistance électrique au développement de nouveaux concepts en physique.

Constantes physiques

Vitesse de la lumière : $c = 3,0 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$

Masse d'un électron : $m = 9,1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$

Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$

Perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H \cdot m^{-1}}$

Constante de Planck : $h = 6,6 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$

Constante de Planck réduite : $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1,1 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$

Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$

Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38.10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$

Partie I - Effet Hall classique

Avant d'aborder l'effet Hall classique puis quantique, il est utile de rappeler la physique du mécanisme de conduction électrique.

I.1 - Mécanisme de la conduction électrique

On considère une plaque conductrice parallélépipédique de largeur a, d'épaisseur b et de longueur L traversée par un courant d'intensité $I > 0$ uniformément réparti sur sa surface $S = a \times b$ (**figure 7**).

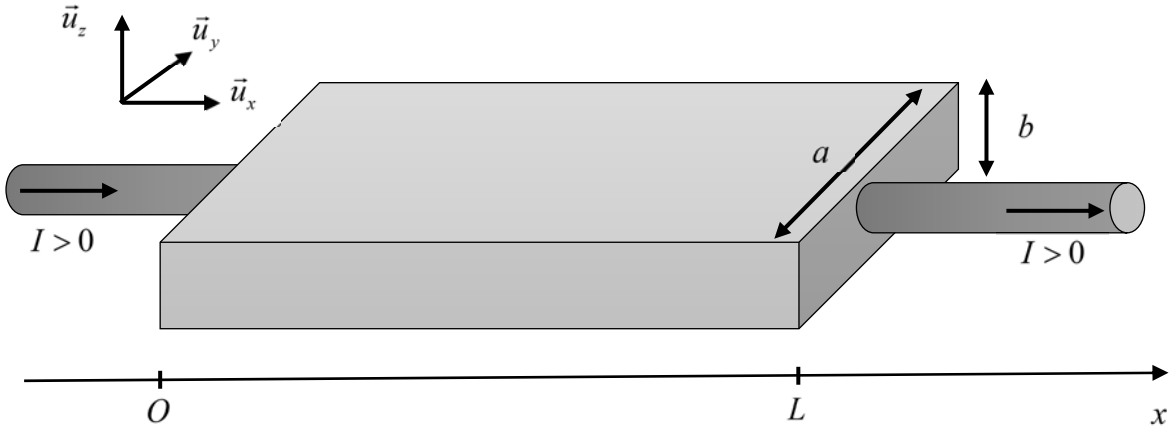


Figure 7 - Plaque conductrice

La plaque constitue un milieu homogène isotrope de conductivité γ, comprenant entre autres des électrons mobiles de densité volumique n_v. On exclut l'influence de tout autre type de porteurs de charge participant à la conduction.
Ces électrons de masse m et de charge $-e$ sont tous supposés se déplacer à la même vitesse $\vec{v} = -v\vec{u}_x$.
Ces électrons, supposés non relativistes, sont soumis à l'action d'un champ électrique $\vec{E} = E_0\vec{u}_x$ responsable de leur mise en mouvement.
On modélise les interactions des électrons mobiles avec le milieu lors de leur déplacement par une force de frottement fluide $\vec{F}_f = -\alpha\vec{v}$, avec α un coefficient caractéristique du milieu.
On négligera le poids des particules devant les autres forces.

Q16. Que signifie l'expression " non relativiste " pour les électrons ?

Q17. Exprimer le vecteur densité volumique de charges $\vec{j}$ en fonction de n_v, e et $\vec{v}$, puis montrer que l'intensité du coutant s'écrit :

$$I = n_v evab .$$

Q18. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $\vec{v}$ d'un électron s'écrit :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m}\vec{E}$$

où on donnera l'expression de τ. Quelle est la signification physique de τ ?

Q19. En déduire l'équation différentielle reliant le vecteur densité de courant $\vec{j}$ et le champ électrique $\vec{E}$.

Q20. Montrer qu'en régime stationnaire, on obtient la loi $\vec{j} = \gamma\vec{E}$, où l'on donnera l'expression de γ en fonction de τ, m, e et n_v. Quel nom porte cette loi ?

Q21. Application numérique.
- À l'aide du **document 3**, calculer la valeur de τ pour une plaque en aluminium en supposant que tous ses électrons de valence jouent le rôle d'électrons de conduction.
- Conclure quant au domaine de fréquence sur lequel la loi $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ reste valable.

Document 3 - L'aluminium

Symbole : Al
Numéro atomique : $Z = 13$
Masse molaire : $M_{Al} = 27\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Système cristallin : cubique face centrée
Rayon atomique : $r_{Al} = 125\ \text{pm}$
Conductivité électrique : $\gamma = 37,7\cdot10^6\ \text{S}\cdot\text{m}^{-1}$



Source : *Handbook of Chemistry and Physics*

Q22. Rappeler l'équation de conservation de la charge reliant la densité volumique de charge ρ au vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$.

Q23. À l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss que l'on rappellera, montrer que l'équation vérifiée par la densité volumique de charge $\rho(M_0,t)$ en un point M_0 fixe du conducteur s'écrit :

$$\frac{d^2\rho}{dt^2}+\frac{\omega_P}{Q}\frac{d\rho}{dt}+\omega_P^2\rho=0$$

où on donnera l'expression de Q et de ω_P en fonction entre autres de α, n_v, e, m et ε_0.

Dans quel type de milieu, la pulsation ω_P est-elle un paramètre essentiel conditionnant la propagation des ondes électromagnétiques ?

Q24. Application numérique

- Calculer ω_P et Q pour l'aluminium ; on prendra $n_v = 2,7\cdot10^{29}$ m^{-3} et $\alpha = 1,9\cdot10^{-17}$ kg·s^{-1}.
- En déduire la nature du régime d'évolution de la densité volumique de charge ρ.
- Déterminer la valeur du temps caractéristique d'amortissement de ce régime. Commenter et justifier que ρ peut être pris nul pour des utilités usuelles d'un conducteur.

I.2 - L'effet Hall

L'effet Hall repose sur le fait qu'une particule chargée en mouvement dans un champ magnétique subit la force dite de Lorentz.

Document 4 - Effet Hall classique

En 1879, Edwin Hall découvre que lorsqu'un courant électrique I traverse un barreau conducteur plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$, il apparaît une différence de potentiel, appelée tension Hall et notée U_H, dans la direction perpendiculaire au courant et au champ (**figure 8**). Son origine est la force que le champ magnétique exerce sur les porteurs de charge qui participent au courant (force de Lorentz).

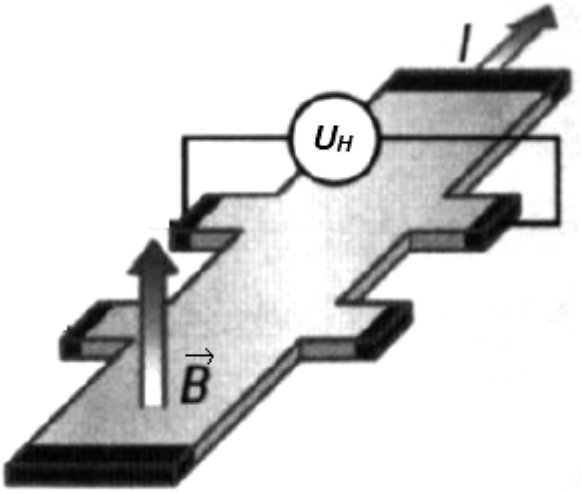


Figure 8 - Mesure de la tension de Hall

Dans les conducteurs usuels, U_H vérifie alors la relation : $U_H = R_H I$ avec R_H la résistance Hall.

De plus, la résistance Hall R_H est proportionnelle à la norme du champ $\vec{B}$ et à l'inverse du nombre n_v de porteurs de charge par unité de volume. L'effet Hall fournit donc un moyen de mesure du nombre de porteurs de charges, utilisé en particulier pour caractériser les matériaux semiconducteurs. Il est aussi à la base du fonctionnement des dispositifs les plus couramment utilisés pour la mesure des champs magnétiques.

Source : Gilbert Pietryk, *Panorama de la Physique*, 2007

I.2.a - Aspect qualitatif

On soumet désormais la plaque à un champ magnétique extérieur $\vec{B} = B\vec{u}_z$ uniforme et stationnaire (**figure 9**). On négligera le champ magnétique créé par le passage du courant dans le milieu.

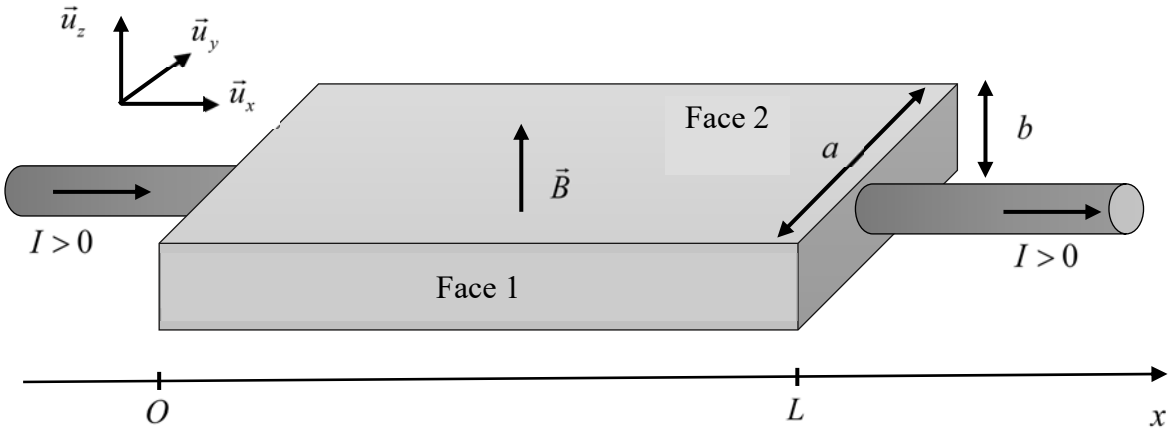


Figure 9 - Plaque conductrice en présence de champ magnétique

Sous l'effet de ce champ magnétique, il y a une accumulation d'électrons mobiles sur une face et, par conséquent, un défaut d'électrons sur l'autre face.

Q25. Rappeler l'expression de $\vec{F}_m$, partie magnétique de la force de Lorentz , s'exerçant sur une particule de charge q se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ et plongée dans un champ magnétique $\vec{B}$.

Q26. Calculer la puissance de cette force et commenter le résultat obtenu.

Q27. Reproduire le schéma de la **figure 10** et y représenter les symboles $\oplus$ et $\ominus$ indiquant l'accumulation de charges positives et négatives sur les faces.

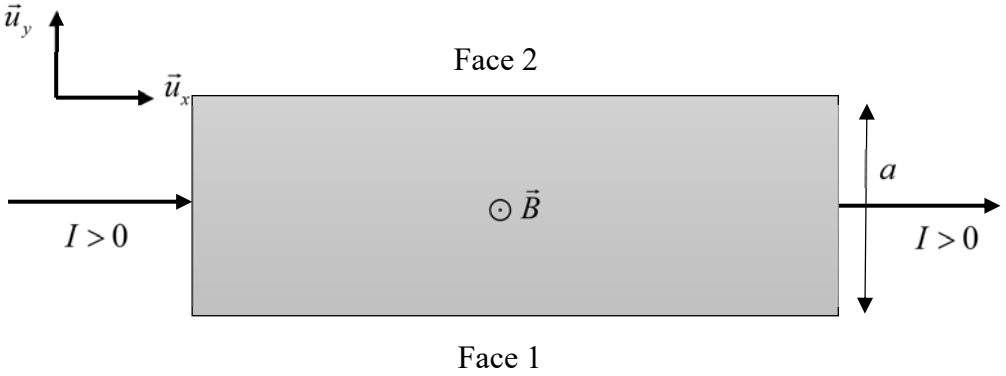


Figure 10 - Plaque conductrice vue du dessus

Q28. Justifier alors l'apparition d'un champ électrique orthogonal aux lignes de courant I . Dessiner sur le schéma précédent l'allure des lignes de champ électrique correspondantes.

I.2.b - Modélisation

Ce déséquilibre de charges dû à la présence du champ magnétique impose, en plus du courant longitudinal selon $\vec{u}_x$, un courant transversal selon $\vec{u}_y$. Le champ électrique et le vecteur densité volumique de courant comportent alors une composante selon $\vec{u}_x$ et une selon $\vec{u}_y$.

On note désormais :

- $\vec{E} = E_x\vec{u}_x + E_y\vec{u}_y$
- $\vec{j} = j_x\vec{u}_x + j_y\vec{u}_y$.

On suppose que les interactions des électrons mobiles avec le milieu sont toujours modélisées par une force $\vec{F}_f = -\alpha\vec{v}$ et que le champ magnétique s'écrit toujours $\vec{B} = B\vec{u}_z$.

Q29. Déterminer la nouvelle équation différentielle vérifiée par la vitesse $\vec{v}$ d'un électron.

Q30. Montrer que le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{\vec{j}}{\tau} - \vec{\omega}_c \wedge \vec{j} = \frac{\gamma}{\tau}\vec{E}$$

où l'on donnera l'expression de la pulsation ω_c en fonction de e, m et B.

Q31. Donner une signification physique à ω_c par analogie au mouvement d'un électron mobile soumis à la seule force magnétique.

Q32. Montrer qu'en régime permanent les composantes du champ électrique sont données par l'écriture matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_x \\ j_y \end{bmatrix}$$

pour laquelle on donnera les expressions des ρ_{ij} en fonction notamment de τ, ω_c et γ.
Quelle est l'unité des coefficients ρ_{ij} ?

Q33. On suppose que la largeur de la plaque a est suffisamment faible pour que les lignes de courant restent parallèles à la direction Ox $\left(j_y = 0\right)$. Déterminer l'expression du champ transversal E_y, puis montrer que la résistance Hall décrite dans le **document 4** s'écrit :

$$R_H = \frac{B}{n_v e b}.$$

Q34. Justifier les utilités d'une sonde à effet Hall décrites dans le **document 4**.

Q35. Application numérique
Déterminer quelle serait la valeur de U_H pour mesurer un champ magnétique de l'ordre du tesla avec une plaque en aluminium $\left(n_v = 2,7 \cdot 10^{29}\ \text{m}^{-3}\right)$ d'épaisseur $b = 0,1\ \text{mm}$ parcourue par un courant $I = 1,0\ \text{A}$. Commenter la valeur obtenue.

Q36. Les matériaux semi-conducteurs sont des matériaux dont la densité de porteur de charges est entre autres donnée par la loi :

$$n_v = n_0 \exp\left(-\frac{\xi}{k_B T}\right)$$

avec $n_0 = 7{,}8 \cdot 10^{24}$ m^{-3} et $\xi = 172$ meV pour un matériau à base de silicium par exemple.
Expliquer l'intérêt des semi-conducteurs pour des sondes à effet Hall permettant la mesure de champ magnétique.

Q37. Calculer la variation relative de la résistance Hall $\frac{\Delta R_H}{R_H}$ pour la sonde précédente à base du semi-conducteur lorsque la température varie de 10 K autour de la température ambiante.
Quel inconvénient possède alors ce type de sonde ?

Partie II - Effet Hall quantique

En 1980, Klaus Von Klitzing[1] découvrit, dans le cas de semi-conducteurs à très basse température plongés dans un champ magnétique intense, que la résistance Hall R_H était quantifiée (**document 5**) : ce résultat est alors qualifié d'effet Hall quantique.

Document 5 - Résistance de Hall en fonction du champ magnétique

Klaus Von Klitzing et ses collaborateurs ont montré qu'à la température de l'hélium liquide (4 K), la résistance Hall d'un tel système présente une dépendance en champ magnétique très particulière. Au lieu de la variation linéaire classique, elle suit un comportement en marches d'escalier (**figure 11**).

La valeur de la résistance Hall sur les plateaux observés vaut $\frac{1}{p}\frac{h}{e^2}$ où p prend des valeurs entières ($R_H = 25{,}812\ \text{k}\Omega$ pour $p = 1$), e est la charge électrique élémentaire et h la constante de Planck.

Ce résultat est très remarquable puisqu'il relie la résistance de Hall sur les plateaux à deux constantes fondamentales sans aucun facteur dépendant des caractéristiques de l'échantillon. Il est maintenant vérifié de manière tellement reproductible, avec une précision relative de l'ordre de 10^{-10}, que l'effet Hall quantique fournit depuis 1990 l'étalon standard de résistance électrique.

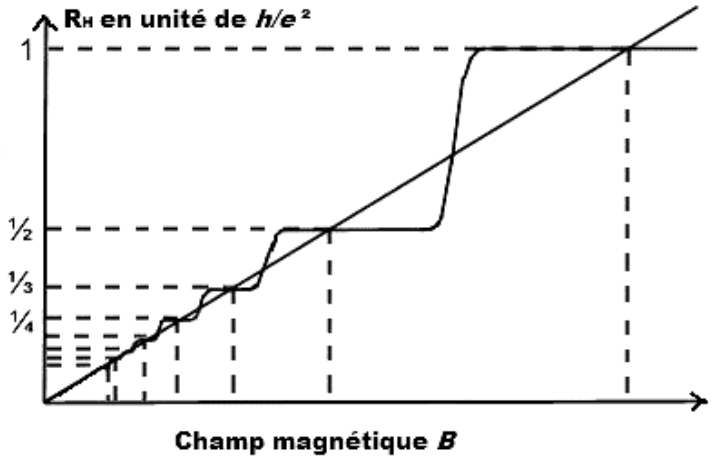


Figure 11 - Résistance de Hall d'un gaz bidimensionnel d'électrons

Source : Gilbert Pietryk, *Panorama de la Physique*, 2007

[1] Prix Nobel en 1985 pour cette découverte.

L'explication de ces comportements fait appel à la mécanique quantique : les niveaux d'énergie d'un gaz bidimensionnel d'électrons dans un champ magnétique perpendiculaire, appelés niveaux de Landau, sont discrets et régulièrement espacés.

II.1 - Modélisation sans champ magnétique

On considère pour cela les électrons mobiles précédents comme un gaz de particules quantiques libres n'interagissant pas entre-elles et confinées dans une structure cristalline particulière qui ne leur permet de se déplacer que sur une distance ℓ_x selon $\vec{u}_x$ et ℓ_y selon $\vec{u}_y$ (**figure 12**).

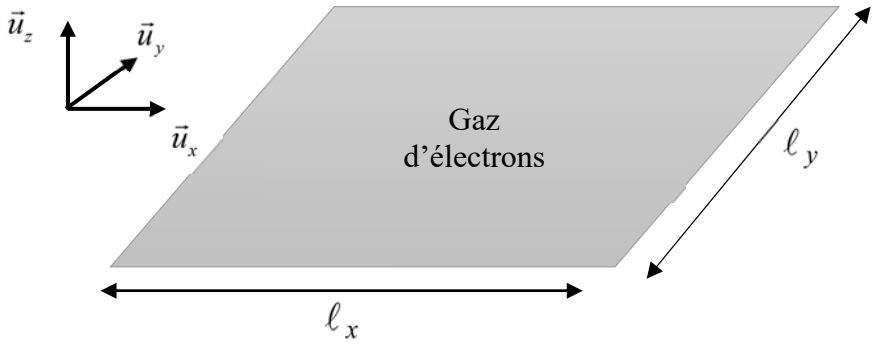


Figure 12 - Gaz d'électrons dans le plan $\left(\vec{u}_x, \vec{u}_y\right)$

On assimile cette situation à celle d'un puits de potentiel infini rectangulaire (**figure13)** de longueur ℓ_x et de largeur ℓ_y pour lequel l'énergie potentielle $\mathcal{V}(x,y)$ s'écrit :

- $\mathcal{V}(x,y) = 0$ à l'intérieur du puits,
- $\mathcal{V}(x,y) \to \infty$ en dehors du puits.

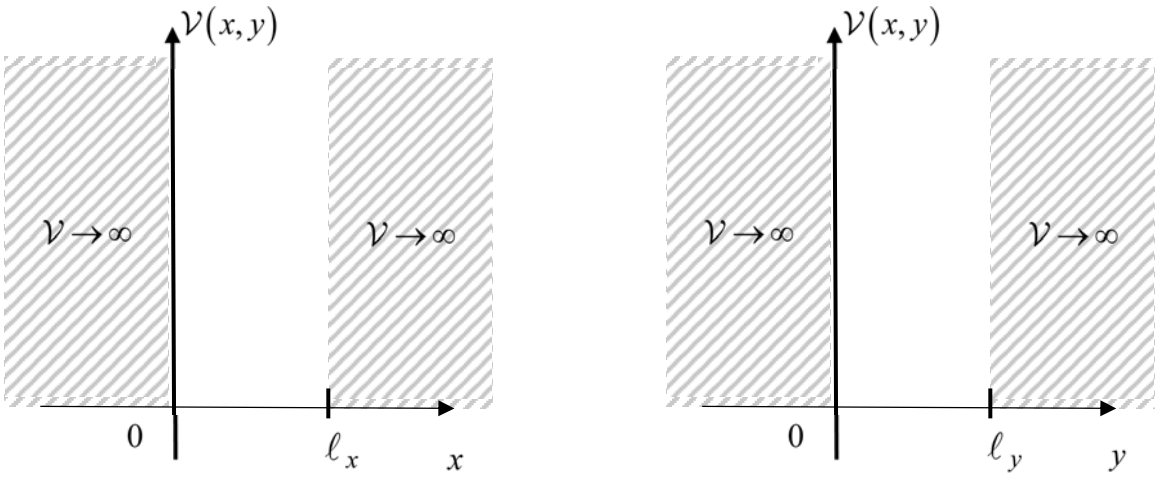


Figure 13 - Puits de potentiel infini suivant *x* (à gauche) et *y* (à droite)

On suppose les directions x et y indépendantes de sorte à pouvoir traiter le problème à une seule dimension suivant x dans un premier temps.

Q38. Rappeler l'inégalité de Heisenberg reliant l'indétermination quantique sur la position x et sur la quantité de mouvement p_x.

Q39. Montrer que l'énergie minimale $\mathcal{E}_{x\min}$ au fond du puits pour le confinement selon x est donnée par :

$$\mathcal{E}_{x\min} = \frac{\hbar^2}{2m\ell_x^2}.$$

Comparer au cas classique d'une particule qui serait confinée au fond d'un puits.

On note $\Psi_{1D}(x,t) = \varphi(x)\exp\left(-i\frac{\mathcal{E}_x}{\hbar}t\right)$ la fonction d'onde associée à l'énergie $\mathcal{E}_x$ de l'électron confiné dans un puits infini à une dimension de largeur ℓ_x, avec $\varphi(x)$ une fonction *a priori* complexe ne dépendant que de x et i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

Q40. Que représente $\left|\Psi_{1D}(x,t)\right|^2$? Justifier le caractère stationnaire des états de l'électron.

Q41. Écrire la condition de normalisation portant sur l'axe Ox. Quelles sont les conditions aux limites à imposer à la fonction $\varphi(x)$?

Q42. Donner un exemple ayant des conditions aux limites similaires dans un autre domaine de la physique.

On rappelle qu'une fonction d'onde ψ associée à une énergie $\mathcal{E}$ des états stationnaires d'une particule quantique est solution de l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + \mathcal{V}\,\Psi = \mathcal{E}\,\Psi$$

où $\Delta\Psi$ désigne le laplacien de Ψ.

On donne en coordonnées cartésiennes : $\Delta f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Q43. Montrer que l'équation de Schrödinger pour la fonction $\varphi(x)$ à l'intérieur du puits peut s'écrire :

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + k_x^2\varphi(x) = 0$$

où l'on donnera l'expression du module d'onde k_x en fonction de $\mathcal{E}_x$, m et $\hbar$.

Q44. Justifier alors que l'énergie $\mathcal{E}_x$ est quantifiée et s'écrit :

$$\mathcal{E}_x = m_x^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2m\ell_x^2} \text{ avec } m_x \text{ un entier positif non nul.}$$

Commenter par rapport au résultat de l'inégalité de Heisenberg.

On souhaite dans un second temps prendre en compte le confinement dans la direction y pour lequel on suppose par analogie que l'énergie est aussi quantifiée et s'écrit :

$$\mathcal{E}_y = m_y^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2m\ell_y^2} \text{ avec } m_y \text{ un entier positif non nul.}$$

Q45. Exprimer alors par analogie le module d'onde k_y en fonction de m_y et ℓ_y.

II.2 - Modélisation en présence d'un champ magnétique

En présence d'un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_z$, il convient de modifier l'équation de Schrödinger.

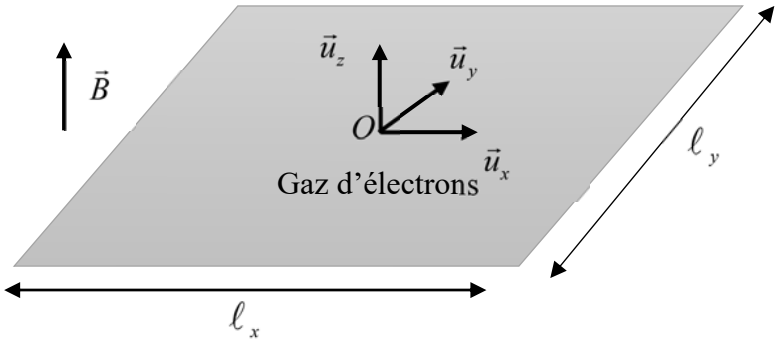


Figure 14 - Gaz d'électrons plongé dans un champ magnétique

On choisit l'origine du repère $(Oxyz)$ au centre du gaz d'électrons.

Soit $\Psi_{2D}(x,y,t) = \psi(x,y)\exp\left(-i\frac{\mathcal{E}}{\hbar}t\right)$ la fonction d'onde associée à l'énergie $\mathcal{E}$ des états stationnaires d'un électron confiné et plongé dans un champ magnétique. La partie spatiale de la fonction d'onde $\psi(x,y)$ est solution de l'équation de Schrödinger stationnaire adaptée en présence d'un champ $\vec{B} = B\vec{u}_z$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + i\frac{\hbar eBx}{m}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{e^2B^2x^2}{2m}\psi = \mathcal{E}\,\psi\ .$$

On pose pour la suite $\omega_0 = \omega_c = \frac{eB}{m}$ et $x_0 = \frac{\hbar k_y}{eB}$.

Q46. Une modélisation consiste à écrire $\psi(x,y)$ sous la forme $\psi(x,y) = \Omega(x)\exp(ik_y y)$.
Montrer que l'équation de Schrödinger précédente se réduit à :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Omega}{dx^2} + \mathcal{V}_{eff}(x)\Omega = \mathcal{E}\,\Omega$$

où $\mathcal{V}_{eff}(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2(x-x_0)^2$ est l'énergie potentielle effective.

Q47. Quel système présente une énergie potentielle similaire dans un autre domaine de la physique ? Représenter $\mathcal{V}_{eff}(x)$.

Q48. La modélisation impose au centre x_0 de l'énergie potentielle effective d'être situé à l'intérieur du gaz d'électrons (**figure 14**). Quelle est alors la valeur maximale possible pour k_y ?

Q49. En supposant que la quantification du module d'onde k_y reste identique à celle du puits infini unidimensionnel de la **Q45**, montrer que l'entier m_y doit satisfaire à l'inégalité :

$$m_y \leq \frac{eB}{h}\ell_x\ell_y\ .$$

Q50. En tenant compte du spin de l'électron, c'est-à-dire qu'il existe deux états possibles sur un même niveau d'énergie, en déduire que le nombre maximum d'état d'un électron d'énergie $\mathcal{E}$ s'écrit :

$$g = 2\frac{eB}{h}\ell_x\ell_y .$$

L'équation de Schrödinger précédente n'a de solution physiquement acceptable que pour des niveaux d'énergie quantifiée. On admettra que cette énergie s'écrit : $\mathcal{E}_p = \left(p - \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0$, avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Chaque niveau d'énergie contient ainsi g états quantiques possibles pour un électron (**figure 15**).

Le système considéré est toujours le gaz d'électrons contenant N_e électrons dans une forme parallélépipédique de hauteur b de longueur ℓ_x et de largeur ℓ_y. Ce système est en équilibre avec un thermostat à la température T.

On se souviendra aussi que deux électrons ne peuvent avoir le même état quantique et que le remplissage des niveaux se fait toujours par énergie croissante.

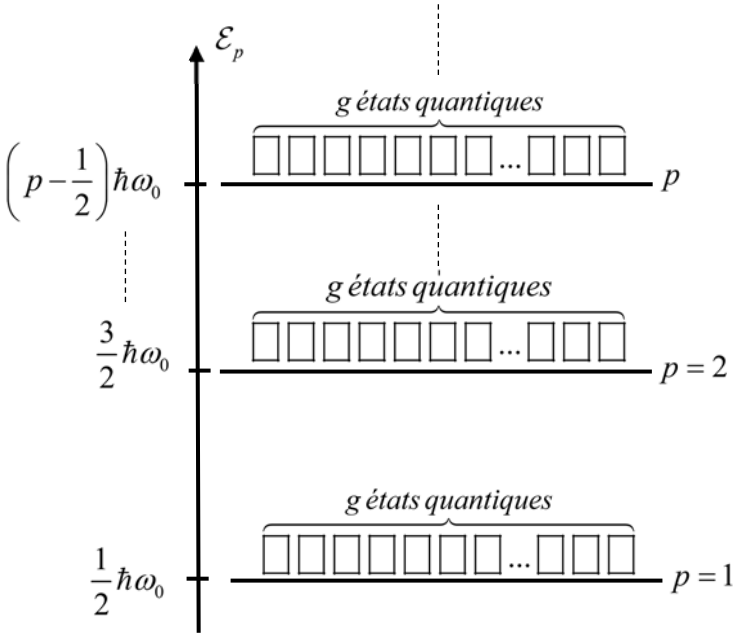


Figure 15 - Niveaux d'énergie possible des électrons

Q51. Exprimer N_e à l'aide de la densité volumique n_v d'électrons supposée uniforme et des caractéristiques géométriques du système considéré.

Q52. Lorsque la température du thermostat est faible, on admettra que seul le niveau fondamental d'énergie est occupé. Proposer une inégalité entre N_e et g pour satisfaire à une telle condition et montrer qu'elle n'est réalisable que pour un champ magnétique tel que :

$$B \geq B_{\min}$$

où l'on donnera l'expression de $B_{\min}$ en fonction de n_v, h, b et e.

Q53. Proposer de même une condition sur N_e pour que les électrons puissent occuper au plus p niveaux d'énergies. En déduire que le champ appliqué doit satisfaire à la condition :

$$B \geq B_p = \frac{1}{p}\frac{n_v hb}{2e} .$$

Q54. Exprimer alors la résistance Hall correspondante $R_H = \frac{B_p}{n_v eb}$ en fonction du rapport h/e^2. Le modèle théorique utilisé concorde-t-il correctement avec les observations expérimentales (**document 5**) ?

Q55. Proposer une justification de la température choisie par Klaus Von Klitzing (autour de 4 K) pour observer l'effet Hall quantique.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 21 1180 – D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de TPC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Modèle scalaire des ondes lumineuses
- Superposition d'ondes lumineuses, trous d'Young et réseau
- Mesures et incertitudes

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/tpc