Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2023, filière TPC

Modélisation

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : performances thermiques
- Partie II : performances acoustiques
- Partie III : fabrication du Kairlin

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/tpc/2023/modelisation

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TPC

MODÉLISATION

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet est composé de trois parties indépendantes et d'une Annexe en fin de sujet.

Étude des caractéristiques d'un matériau biosourcé : le Kairlin®

Contexte de l'étude

Les matériaux composites offrent de nombreux avantages par rapport aux matériaux classiques : performances mécaniques supérieures, faible masse volumique, durée de vie accrue, … Ces avantages proviennent de leur structure composée d'un renfort, constituant l'ossature, et d'une matrice ou résine, assurant la cohésion du matériau.

Le Kairlin® (**figure 1**) est un matériau bio-composite conçu dans le respect de l'environnement à partir de fibres de lin et d'autres composants végétaux. Initialement destiné à la construction de voiliers de course, le Kairlin® est désormais étudié du point de vue thermique et phonique, dans le but d'étendre son usage à l'industrie du bâtiment.

Ce sujet a pour but d'étudier les performances thermique et acoustique du Kairlin® et d'estimer son énergie grise volumique, reflet de l'impact environnemental d'un matériau.



Figure 1 - Le Kairlin®, un composite biosourcé

Partie I - Étude des performances thermiques

La performance thermique est un critère essentiel dans le choix d'un isolant, la dépense énergétique étant d'autant plus faible que l'isolant est efficace.

On s'intéresse aux transferts thermiques dans l'isolant supposé homogène, d'épaisseur L et de section S (**figure 2**).

On note $T(x,t)$ la température dans le matériau en fonction du temps. On suppose tout d'abord que l'isolant est à la température extérieure : $T(x, t<0) = T_{\text{ext}} = 5{,}0\,^{\circ}\text{C}$.

À la date $t = 0$, on impose les conditions aux limites : $\begin{cases} T(0, t \geqslant 0) = T_{\text{int}} = 20\,^{\circ}\text{C} \\ T(L, t \geqslant 0) = T_{\text{ext}} = 5{,}0\,^{\circ}\text{C} \end{cases}$.

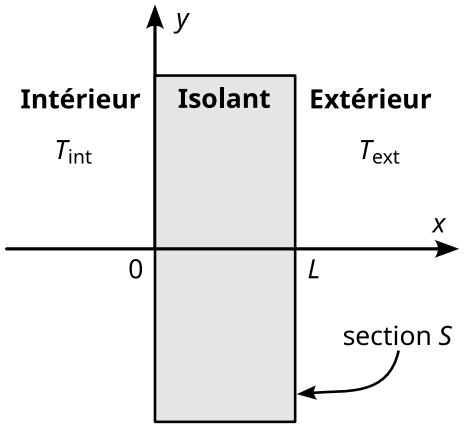


Figure 2 - Schématisation du problème

Caractéristiques du Kairlin® :

- masse volumique : $\rho = 1{,}3 \cdot 10^{3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$;
- conductivité thermique : $\lambda = 3{,}7 \cdot 10^{-2}\ \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$;
- capacité thermique massique à pression constante : $c_p = 1{,}5 \cdot 10^{3}\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$.

Dans l'isolant, la température suit la loi de diffusion thermique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \qquad \textbf{(1)}$$

I.1 - Étude analytique du régime stationnaire

On se place en régime stationnaire.

Q1. Quelles hypothèses faut-il faire sur les dimensions de l'isolant pour pouvoir mener l'étude de façon unidimensionnelle selon l'axe des x ?

Q2. Réécrire l'**équation (1)** en régime stationnaire.
Justifier que la température dans l'isolant est de la forme $T(x) = Ax + B$.

Q3. En déduire l'expression de la température $T(x)$ en fonction de T_{ext}, T_{int}, L et de x.

On rappelle :
- la loi de Fourier : $\vec{j}_{\text{th}}(x) = -\lambda \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\vec{e}_x$;
- le flux thermique : $\Phi = \iint \vec{j}_{\text{th}} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$;
- la résistante thermique : $R_{\text{th}} = \dfrac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{\Phi}$.

Q4. Proposer une interprétation physique de la résistance thermique.
Montrer que $R_{\text{th}} = \dfrac{L}{\lambda S}$.

Q5. Déterminer l'épaisseur L de l'isolant permettant d'obtenir, pour un panneau de surface $S = 1{,}0\,\text{m}^2$, une résistance thermique $R_{\text{th}} = 3{,}2\,\text{K}\cdot\text{W}^{-1}$.

I.2 - Étude numérique du régime transitoire

On cherche à résoudre numériquement l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_{\text{th}} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad \textbf{(2)}$$

avec $k_{\text{th}} = \dfrac{\lambda}{\rho c_p}$ la constante de diffusivité thermique.

Pour ce faire, on discrétise le temps (**figure 3**) et l'espace (**figure 4**) de la façon suivante :

- le temps est discrétisé en N_t dates comprises entre 0 et t_{max}, la durée de la simulation. Ces dates sont séparées du pas temporel $\mathrm{d}t = t_{\text{max}}/(N_t - 1)$ et chacune d'entre elle s'écrit $t_n = n\mathrm{d}t$ avec $n \in [\![0, N_t - 1]\!]$. Ainsi, $t_0 = 0$ et $t_{N_t - 1} = t_{\text{max}}$.

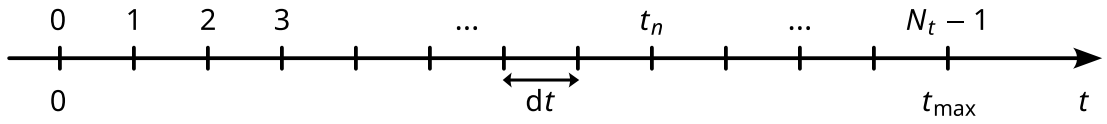


Figure 3 - Discrétisation temporelle

- l'espace est discrétisé en N_x valeurs comprises entre 0 et L, séparées du pas spatial $\mathrm{d}x$. On note $i \in [\![0, N_x - 1]\!]$ l'indice repérant le numéro de l'un des N_x points et $x_i \in [0, L]$ la position du point correspondant. Ainsi, $x_0 = 0$ et $x_{N_x - 1} = L$.

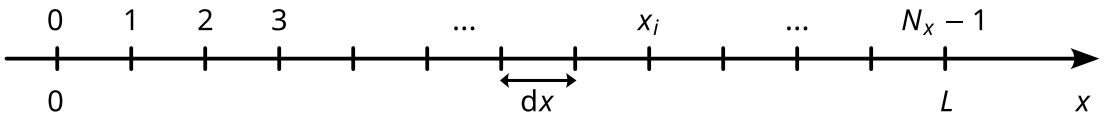


Figure 4 - Discrétisation spatiale

Q6. Donner l'expression de $\mathrm{d}x$ en fonction de L et de N_x.
En déduire l'expression de l'abscisse x_i du point d'indice i en fonction de i et de $\mathrm{d}x$.

La paramétrisation précédente permet de noter $T_i^n = T(x_i, t_n)$ la température échantillonnée. Avec cette notation, les dérivations spatiale et temporelle au premier ordre en x et t s'écrivent :

- dérivation spatiale : $\dfrac{\partial T}{\partial x} = \dfrac{T_{i+1}^n - T_i^n}{\mathrm{d}x}$;
- dérivation temporelle : $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\mathrm{d}t}$.

Q7. En utilisant le fait que $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)$, montrer que :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+2}^n - 2T_{i+1}^n + T_i^n}{\mathrm{d}x^2}.$$

Q8. En déduire que l'**équation (2)** se met sous la forme :

$$T_i^{n+1} = T_i^n + K\left(T_{i+2}^n - 2T_{i+1}^n + T_i^n\right).$$

Donner l'expression de la constante sans dimension K en fonction de k_{th}, dt et de dx (l'expression de K peut s'obtenir par une analyse dimensionnelle).

Dans la suite, on utilise un schéma numérique qui conduit à la relation admise :

$$T_i^{n+1} = (1-2K)\,T_i^n + K\left(T_{i+1}^n + T_{i-1}^n\right). \qquad \textbf{(3)}$$

Le **code Python 1** implémente ce schéma numérique pour calculer les échantillons de température. Dans les questions qui suivent, on cherche à compléter les passages manquants du code, repérés par « `_____` ».

```
1   import numpy as np
2
3   # caractéristiques du Kairlin®
4   rho = 1.3e3                     # masse volumique [kg/m^3]
5   Lambda = 3.7e-2                 # conductivité thermique [W/m/K]
6   cp = 1.5e3                      # capacité thermique massique [J/K/kg]
7   kth = Lambda / (rho * cp)       # diffusivité thermique [m^2/s]
8   L = 1.0e-1                      # épaisseur de l'isolant [m]
9
10  # conditions aux limites
11  Tint = 20                       # température intérieure [°C]
12  Text = 5.0                      # température extérieure [°C]
13
14  # paramètres de la simulation
15  tmax = 86400                    # durée de la simulation [s]
16  Nt = 10                         # discrétisation temporelle (Nt dates)
17  Nx = 5                          # discrétisation spatiale (Nx points)
18
19  # discrétisation spatio-temporelle
20  dt = tmax / (Nt - 1)            # pas temporel [s]
21  dx = _____                      # pas spatial [m]                    # Voir Q9
22
23  # constante du schéma numérique
24  K = _____                                                            # Voir Q10
25
26  # initialisation de la température
27  T = Text * np.ones((Nx, Nt))    # tableau des températures T(x,t) [°C]
28  _____                                                                # Voir Q11
29
30  # calcul de la température
31  for n in range(0, Nt - 1):      # boucle temporelle
32      for i in range(1, _____):   # boucle spatiale                    # Voir Q12
33          T[i, n + 1] = _____                                          # Voir Q13
```

Code Python 1 - Calcul du profil de température à différentes dates

Q9. À l'aide de la question **Q6**, donner l'instruction permettant de définir le pas spatial `dx` en fonction des variables `L` et `Nx` (**ligne 21**).

Q10. À l'aide de la question **Q8**, donner l'instruction permettant de définir la constante `K` du schéma numérique **(3)** en fonction des variables `kth`, `dx` et `dt` (**ligne 24**).

Q11. La **ligne 27** du **code Python 1** permet d'initialiser une matrice des températures de N_x lignes et N_t colonnes, toutes les températures étant identiques égales à T_{ext}.
Proposer le code à placer à la **ligne 28** pour assurer la condition aux limites $T(x = 0, t) = T_{\text{int}}$ (on peut utiliser une boucle ou les propriétés du module `numpy` décrites en annexe).

Q12. On rappelle que la dernière valeur fournie par l'instruction `range(1, Nx)` est `Nx - 1`, l'intervalle de la fonction `range` étant semi-ouvert.
En examinant le schéma numérique **(3)**, compléter la **ligne 32** du code en utilisant la variable `Nx`.

Q13. Implémenter le schéma numérique **(3)** à la **ligne 33** du **code Python 1**.

Une partie non mentionnée du **code Python 1** a permis de tracer la température dans le matériau aux dates t_1, t_2 et t_3 (**figure 5**).

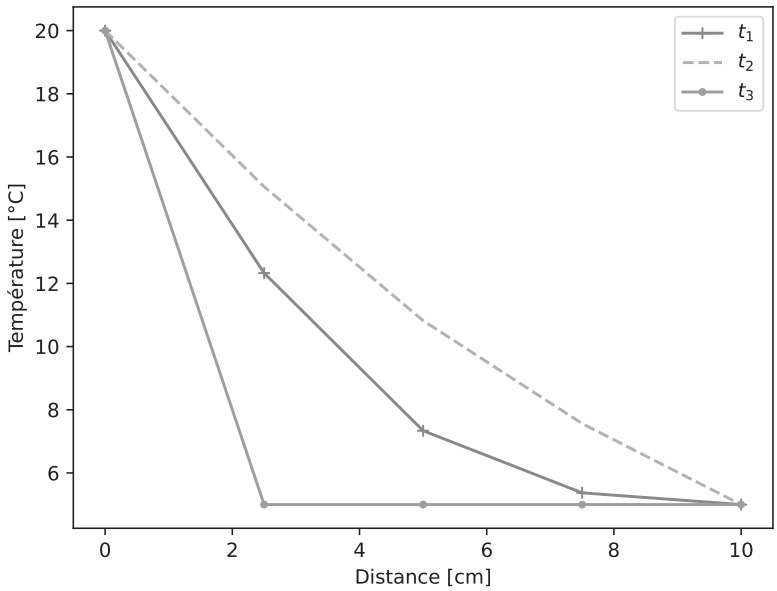


Figure 5 - Profil de température à différentes dates

Q14. À l'aide de la **figure 5**, classer les dates t_1, t_2 et t_3 de façon croissante.

Q15. Compte tenu de la question **Q2**, justifier que le régime permanent est pratiquement atteint.

Partie II - Étude des performances acoustiques

L'isolation phonique permet de réduire la transmission du son à travers les parois d'un bâtiment. La qualité d'un isolant sonore est caractérisée par son indice d'affaiblissement acoustique que nous allons estimer pour le Kairlin® à partir de mesures expérimentales.

II.1 - Modélisation de la propagation des ondes acoustiques

On s'intéresse à la propagation d'une onde acoustique plane, progressive le long de l'axe des x et monochromatique, dans l'air assimilé à un gaz parfait.

On note P_a la pression et ρ_a la masse volumique de l'air au repos. Le passage d'une onde acoustique se manifeste par la vitesse vibratoire $\vec{v}_1$, la surpression acoustique P_1 et la variation de masse volumique ρ_1. En x à la date t, les paramètres de l'air sont notés :

- masse volumique : $\rho(x,t) = \rho_a + \rho_1(x,t)$;
- pression : $P(x,t) = P_a + P_1(x,t)$;
- vitesse : $\vec{v}(x,t) = v_1(x,t)\,\vec{e}_x$.

Grandeurs caractéristiques de l'air :

- coefficient de compressibilité isentropique : $\chi_S = \dfrac{1}{\rho_a}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S$;
- célérité de l'onde acoustique : c.

L'effet de la pesanteur est négligeable devant l'effet des forces de pression.

Dans le cadre de l'approximation acoustique, l'onde de pression satisfait l'équation d'onde de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0. \qquad \textbf{(4)}$$

Q16. Rappeler, sous forme d'inégalités, les hypothèses de l'approximation acoustique.

Q17. On cherche à exprimer la célérité c des ondes acoustiques dans l'air en fonction de ρ_a et de χ_S, sous la forme $c = \rho_a^\alpha \chi_S^\beta$.
Par analyse dimensionnelle, déterminer les valeurs de α et de β.

On définit l'impédance acoustique d'un milieu comme le rapport entre la surpression acoustique et la vitesse vibratoire. Dans le cas d'une onde plane progressive, on rappelle que :

$$\frac{P_1}{v_1} = \begin{cases} +\rho_a c & \text{si l'onde se propage dans le sens des } x \text{ croissants} \\ -\rho_a c & \text{si l'onde se propage dans le sens des } x \text{ décroissants} \end{cases} \qquad \textbf{(5)}$$

Q18. En utilisant la question **Q17**, justifier rapidement que le produit $\rho_a c$ a la même unité que le rapport d'une pression sur une vitesse.

Q19. L'équation d'onde **(4)** admet pour solution la surpression : $P_1(x,t) = P_i(t - x/c) + P_r(t + x/c)$.
On cherche l'onde de vitesse sous la forme : $v_1(x,t) = v_i(t - x/c) + v_r(t + x/c)$.
En déduire, à l'aide de l'**équation (5)**, l'expression de $v(x,t)$ en fonction de ρ_a, c, P_i et de P_r.

II.2 - Réflexion et transmission des ondes acoustiques

On s'intéresse maintenant à la propagation d'une onde acoustique en présence d'une paroi. La paroi, située en $x = 0$, est modélisée par une plaque rigide infiniment fine séparant deux milieux identiques, semi-illimités et constitués d'air.

Lors de la propagation d'une onde acoustique depuis le milieu 1 en direction de la plaque, une partie de l'onde est réfléchie dans le milieu 1, l'autre est transmise dans le milieu 2 (**figure 6**).

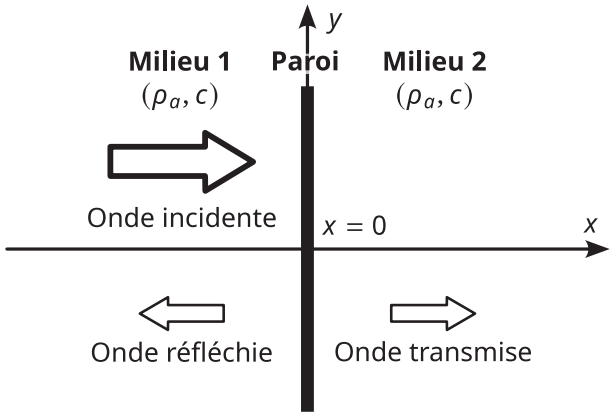


Figure 6 - Comportement de l'onde incidente

Les ondes acoustiques se propageant dans les milieux 1 et 2 sont supposées planes, progressives le long de l'axe des x et monochromatiques de pulsation ω. On note $k = \omega/c$ la norme du vecteur d'onde correspondant et $Z = \rho_a c$ l'impédance acoustique de l'air.

En notation complexe, la surpression et la vitesse de l'onde incidente sont définies par les équations :

$$\begin{cases} \underline{P}_i(x,t) = P_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t - kx)] \\ \underline{v}_i(x,t) = \dfrac{P_0}{Z} \exp[\mathrm{i}(\omega t - kx)] \end{cases} \quad \text{avec i tel que } \mathrm{i}^2 = -1.$$

On note $\underline{r}$ et $\underline{t}$ les coefficients complexes de réflexion et de transmission en amplitude de pression. On cherche l'expression des ondes de pression et de vitesse réfléchies et transmises sous la forme :

$$\begin{cases} \underline{P}_r(x,t) = \underline{r} P_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t + kx)] \\ \underline{v}_r(x,t) = -\dfrac{\underline{r} P_0}{Z} \exp[\mathrm{i}(\omega t + kx)] \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{P}_t(x,t) = \underline{t} P_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t - kx)] \\ \underline{v}_t(x,t) = \dfrac{\underline{t} P_0}{Z} \exp[\mathrm{i}(\omega t - kx)] \end{cases}.$$

Q20. Justifier soigneusement les différents signes des expressions des ondes de vitesse réfléchie $\underline{v}_r(x,t)$ et transmise $\underline{v}_t(x,t)$.

Q21. En vertu du principe de superposition, rappeler les expressions :

- de l'onde de surpression $\underline{P}_1(x,t)$ dans le milieu 1 en fonction de $\underline{P}_i(x,t)$ et de $\underline{P}_r(x,t)$;
- de l'onde de vitesse $\underline{v}_1(x,t)$ dans le milieu 1 en fonction de $\underline{v}_i(x,t)$ et de $\underline{v}_r(x,t)$.

Une seule onde est présente dans le milieu 2, si bien que : $\begin{cases} \underline{P}_2(x,t) = \underline{P}_t(x,t) \\ \underline{v}_2(x,t) = \underline{v}_t(x,t) \end{cases}$.

On note σ la masse surfacique de la paroi de surface S et donc $m = \sigma S$ sa masse. La paroi est soumise, de chaque côté, à la pression de l'air des milieux 1 et 2.

Q22. En appliquant la deuxième loi de Newton à la paroi située en $x = 0$, montrer que :

$$\sigma \left(\frac{\mathrm{d}\underline{v}_2}{\mathrm{d}t} \right) (0,t) = \underline{P}_1(0,t) - \underline{P}_2(0,t)$$

ou encore :

$$\sigma \left(\frac{\mathrm{d}\underline{v}_t}{\mathrm{d}t} \right) (0,t) = \underline{P}_i(0,t) + \underline{P}_r(0,t) - \underline{P}_t(0,t). \qquad \textbf{(6)}$$

Q23. Déduire de l'**équation (6)** la relation :

$$\underline{t} \left(1 + \mathrm{i} \frac{\omega \sigma}{Z} \right) = 1 + \underline{r}. \qquad \textbf{(7)}$$

Q24. La continuité de la vitesse, en $x = 0$, impose l'équation :

$$\underline{v}_1(0,t) = \underline{v}_2(0,t) \quad \text{soit} \quad \underline{v}_i(0,t) + \underline{v}_r(0,t) = \underline{v}_t(0,t).$$

En déduire la relation :

$$1 - \underline{r} = \underline{t}. \qquad \textbf{(8)}$$

Q25. À l'aide des **équations (7)** et **(8)**, montrer que le coefficient de transmission en amplitude de surpression vaut :

$$\underline{t} = \frac{1}{1 + \mathrm{i} \dfrac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{avec } \omega_c = \frac{2Z}{\sigma}. \qquad \textbf{(9)}$$

On en déduit alors l'indice d'affaiblissement acoustique, noté R_{dB}, défini comme le rapport, exprimé en décibel, entre la puissance acoustique incidente I_i et la puissance acoustique transmise I_t :

$$R_{\mathrm{dB}} = 10 \log \left(\frac{I_i}{I_t} \right) = 10 \log \left(\frac{1}{|\underline{t}|^2} \right).$$

Q26. Déterminer l'expression de $R_{\mathrm{dB}}(f)$ en fonction de la fréquence.
Justifier que la paroi transmet mieux les basses fréquences que les hautes fréquences.

II.3 - Analyse des résultats expérimentaux

Afin de quantifier les performances acoustiques du Kairlin®, on compare l'intensité des ondes incidente et transmise enregistrées de part et d'autre de la plaque (**figure 7**).

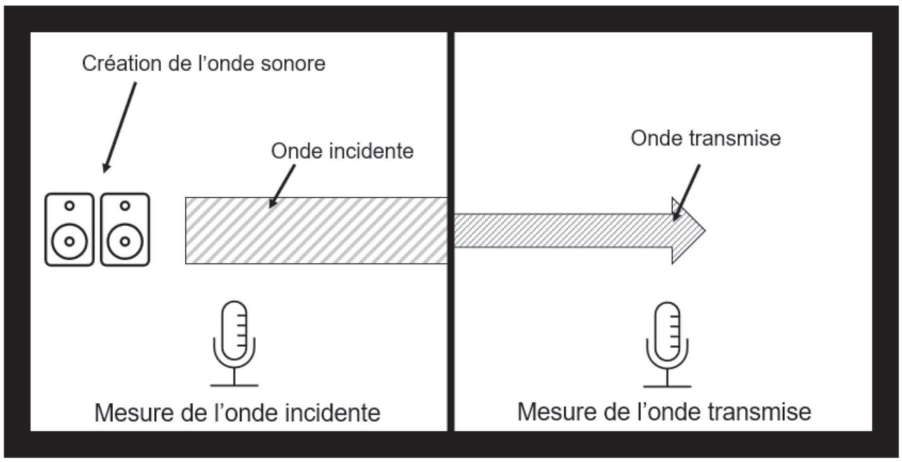


Figure 7 - Dispositif de mesure de l'indice d'affaiblissement acoustique

Les résultats expérimentaux sont rassemblés dans un fichier comportant 3 colonnes : la fréquence de l'onde incidente, l'intensité émise et l'intensité enregistrée par le récepteur.

Le **code Python 2** se charge de lire le fichier des résultats, de calculer l'indice d'affaiblissement acoustique R_{dB} et de le tracer en fonction de la fréquence. Une partie du code, repérée par « `_____` », est à remplir.

```
1   import matplotlib.pyplot as plt
2   import numpy as np
3
4   data = np.loadtxt("Resultats.txt")    # lecture des données
5   f = data[:, 0]                                                          # Voir Q27
6   Ie = data[:, 1]                                                         # Voir Q27
7   Ir = data[:, 2]                                                         # Voir Q27
8
9   RdB = _____  # calcul de l'indice d'affaiblissement acoustique          # Voir Q28
10
11  plt.title("Indice d'affaiblissement acoustique en fonction de la fréquence")
12  plt.xlabel("Fréquence [Hz]")
13  plt.ylabel("Indice d'affaiblissement acoustique [dB]")
14  plt.plot(f, RdB, "+", label="résultats expérimentaux")
15  plt.legend()
16  plt.show()
```

Code Python 2 - Exploitation et tracé des résultats expérimentaux

L'instruction `np.loadtxt()` de la **ligne 4** du **code Python 2** lit le fichier `Resultats.txt` et fabrique le tableau bidimensionnel `data[i, j]` de 3 colonnes et autant de lignes de données que le fichier en comporte.

Q27. En utilisant l'annexe Python, expliquer les instructions des **lignes 5**, **6** et **7** du **code Python 2**.

Q28. Recopier et compléter la **ligne 9** du **code Python 2** en utilisant les variables définies dans ce code. Certaines fonctions mathématiques sont rappelées dans l'annexe Python.

L'exécution du **code Python 2** permet d'obtenir la courbe de la **figure 8**.

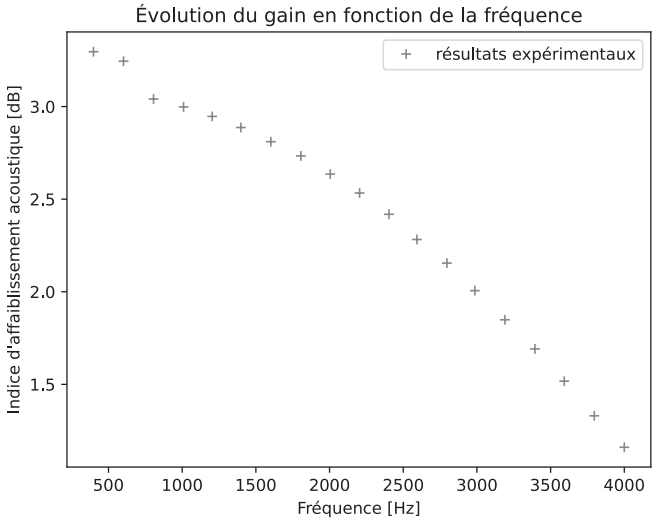


Figure 8 - Résultats expérimentaux

Q29. Les résultats expérimentaux sont-ils en accord avec ceux de la question **Q26** ?

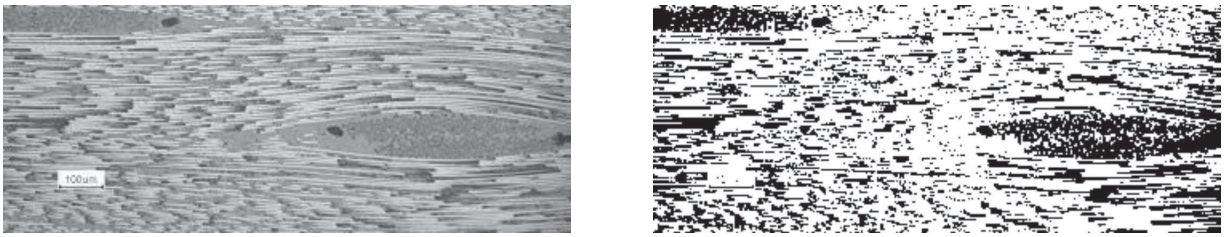
Partie III - Étude de la fabrication du Kairlin®

Le Kairlin® est un matériau composite biosourcé réalisé à partir de fibres de lin et d'acide polylactique. En comparaison d'autres matériaux, sa fabrication a un impact environnemental limité, ce que nous allons vérifier en calculant une partie de son énergie grise, qui est l'énergie consommée lors de son cycle de vie, exception faite de sa phase d'exploitation.

III.1 - Étude macroscopique du matériau

Le coût énergétique de la fabrication du Kairlin® dépend de sa teneur en lin et en acide polylactique (noté PLA), que l'on détermine par une mesure optique.

Lorsqu'une fine couche du composite est éclairée par une source lumineuse monochromatique, on observe en transmission une image dont les zones claires et sombres caractérisent la présence de lin ou de PLA (**figure 9a**).

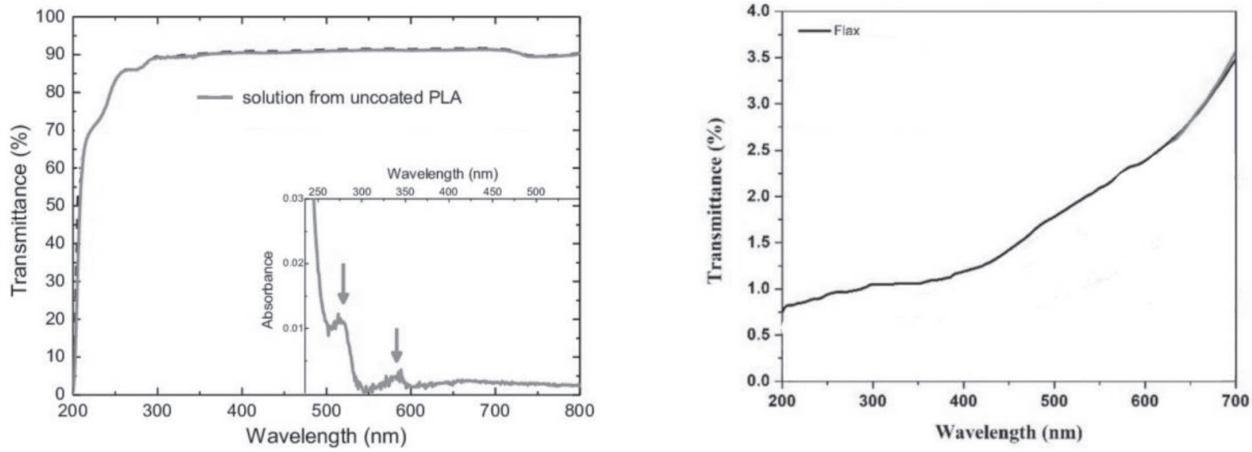


(a) Photographie en nuances de gris

(b) Image après conversion en noir et blanc

Figure 9 - Différentiation optique des constituants du Kairlin®

En choisissant une longueur d'onde à laquelle les transmittances du lin et du PLA sont très différentes (**figure 10**), on maximise le contraste entre ces matériaux.



(a) Transmittance du PLA

(b) Transmittance de la fibre de lin

Figure 10 - Courbes de transmittance des matériaux

Q30. On dispose d'une source lumineuse de longueur d'onde 300 nm et d'une autre de 700 nm. À partir des courbes de transmittance (**figure 10**), déterminer quelle source doit être utilisée pour obtenir l'image la plus contrastée possible.
Quel élément apparaît le plus sombre, la fibre de lin ou le PLA ?

Un traitement numérique est ensuite réalisé afin de déterminer le ratio entre fibre de lin et PLA dans le composite :

- 1re étape : conversion de la photographie en niveaux de gris (**figure 9a**) en une image en noir et blanc (**figure 9b**) ;
- 2e étape : détermination de la proportion de pixels noirs et blancs.

Le **code Python 3** permet de lire une image photographique, de la convertir en une image en noir et blanc, puis de calculer le pourcentage de pixels blancs. Les parties du code à compléter sont repérées par « `_____` ».

```
1   import numpy as np
2   from kairlin import image_grise    # image_grise = tableau bidimensionnel d'entiers
3
4   def seuil(Vpixel: int, Vseuil: int = 100) -> int:                                  # Voir Q31
5       _____
6       _____
7       _____
8       _____
9
10  def pourcentage(image: np.ndarray) -> float:
11      """Convertit en place l'image passée en argument en image en noir et blanc
12      et renvoie le pourcentage de pixels blancs"""
13
14      nb_lignes, nb_colonnes = image.shape    # dimensions de l'image
15      nb_pixels = _____                       # nombre de pixels                     # Voir Q32
16
17      somme = 0
18      for i in range(nb_lignes):
19          for j in range(nb_colonnes):
20              valeur = seuil(image[i, j])  # seuillage
21              image[i, j] = _____          # remplace le pixel par sa valeur seuillée   # Voir Q33
22              somme = somme + valeur       # somme de la valeur des pixels
23      Pourcentage = 100 * _____            # calcul du pourcentage de pixels blancs     # Voir Q34
24      return Pourcentage
25
26  print(pourcentage(image_grise))          # exemple d'utilisation
```

Code Python 3 - Détermination du pourcentage de pixels blancs

Q31. Écrire la fonction `seuil(Vpixel: int, Vseuil: int = 100) -> int`, qui prend en argument un entier `Vpixel` et renvoie 255 si `Vpixel` est supérieur à `Vseuil` et 0 sinon. La variable `Vseuil` est un entier, passé en argument facultatif, qui est disponible dans la fonction sans avoir besoin de la définir et qui vaut 100 par défaut.
La fonction `seuil` démarre à la **ligne 4** du **code Python 3**, le nombre de lignes vides à compléter n'est pas significatif.

Dans le **code Python 3**, la variable `image_grise` du module `kairlin` est un tableau bidimensionnel. L'instruction `image_grise[i, j]` renvoie la valeur du pixel de coordonnées (i, j), qui est un entier compris entre 0 (pour du noir) et 255 (pour du blanc).

Q32. Compléter la ligne **ligne 15** du **code Python 3** permettant de calculer le nombre de pixels de l'image.

Q33. Compléter la **ligne 21** permettant de remplacer `image[i, j]` par sa valeur seuillée stockée dans la variable `valeur`.

Q34. Compléter la **ligne 23** permettant de calculer le pourcentage de pixels blancs à partir des variables `somme` et `nb_pixels`.

Q35. Donner une estimation de la complexité temporelle de la fonction `pourcentage` à l'aide des variables `nb_lignes` et `nb_colonnes`.

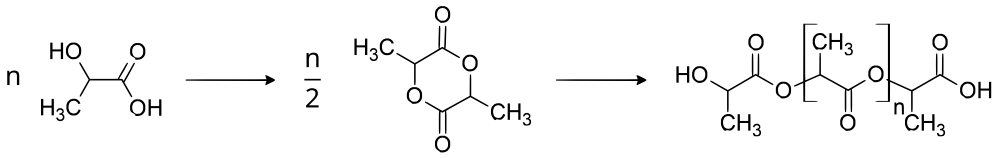
L'utilisation du **code Python 3** a permis d'obtenir une teneur en lin du Kairlin® de 42 %.

Q36. En déduire la masse de fibres et la masse de PLA dans la plaque de composite pour un volume de 1,0 m^3.
Données : $\rho_{PLA} = 1{,}2 \cdot 10^3\ kg \cdot m^{-3}$; $\rho_{lin} = 1{,}4 \cdot 10^3\ kg \cdot m^{-3}$.

III.2 - Étude de la fabrication du polymère

L'acide polylactique est un polymère biodégradable à une température supérieure à 60 °C. Il est couramment utilisé dans l'industrie comme emballage alimentaire, en médecine comme fil de suture résorbable, en impression 3D, etc. C'est un constituant essentiel du Kairlin®.

L'acide polylactique peut être polymérisé à partir de l'acide lactique, que l'on extrait de l'amidon de maïs. Parmi les synthèses possibles, on s'intéresse à la méthode par ouverture de cycle. Cette réaction, en 2 étapes, consiste en la fabrication du lactide, qui sert ensuite de monomère à la synthèse de l'acide polylactique (**figure 11**).



acide lactique — lactide — acide polylactique

Figure 11 - Principe de la synthèse de l'acide polylactique à partir de l'acide lactique

Une étude expérimentale a permis d'établir que la loi de vitesse de cette réaction suit l'équation différentielle **(10)**, dans laquelle $[M]$ est la concentration en lactide (le monomère) :

$$-\frac{\mathrm{d}[M]}{\mathrm{d}t} = k\left([M] - [M]_{éq}\right) \qquad \textbf{(10)}$$

avec $k = 4{,}6 \cdot 10^{-5}\ s^{-1}$ la constante de vitesse de la réaction et $[M]_{éq} = 1{,}8 \cdot 10^{-2}\ mol \cdot L^{-1}$ la concentration en monomère à l'équilibre.

Q37. On note $[M]_0$ la concentration initiale en monomère. Montrer que l'**équation (10)** a pour solution :

$$[M](t) = [M]_{éq} + \left([M]_0 - [M]_{éq}\right)\exp(-kt).$$

On en déduit le taux de conversion en monomère $X(t)$ qui vaut 0 à l'instant initial et 1 lorsque la réaction est totale :

$$X(t) = \left(1 - \frac{[M]_{éq}}{[M]_0}\right)\left[1 - \exp(-kt)\right].$$

Ce taux de conversion a été obtenu expérimentalement pour différentes valeurs de la concentration initiale en monomère (**figure 12**) :

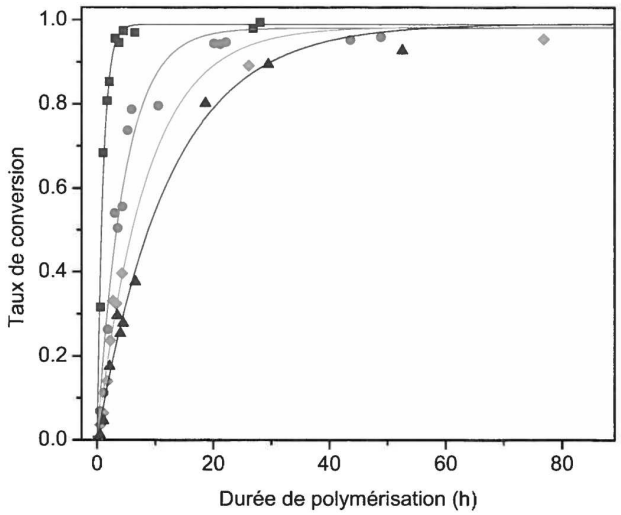


Figure 12 - Taux de conversion en fonction du temps pour différentes concentrations initiales (non mentionnées) en monomère

Q38. Montrer que la durée au bout de laquelle 95 % du monomère a réagi vaut :

$$t_{95} = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{1 - \dfrac{[M]_{\text{éq}}}{[M]_0}}{0{,}05 - \dfrac{[M]_{\text{éq}}}{[M]_0}} \right).$$

Q39. Déterminer la durée de polymérisation à 95 % pour une concentration initiale en monomère valant $[M]_0 = 1{,}2\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.
Ce résultat est-il compatible avec les informations de la **figure 12**?

III.3 - Calcul de l'énergie grise volumique du Kairlin®

L'essentiel de l'énergie dépensée durant la synthèse se fait lors du chauffage du mélange réactionnel, qui dure 20 h, par un chauffe-ballon électrique d'une puissance de 50 W.

Q40. Calculer, en kilo-watt-heure (kW·h), l'énergie dépensée pour la synthèse.

Q41. Le volume du mélange réactionnel étant de 50 mL, en déduire l'énergie volumique de la synthèse, en kilo-watt-heure par mètre cube ($\text{kW}\cdot\text{h}\cdot\text{m}^{-3}$).
Cette grandeur, notée $E_{g,PLA}$, est appelée l'énergie grise de l'acide polylactique.

Q42. Le Kairlin® est constitué de 42 % de lin dont l'énergie grise vaut $E_{g,lin} = 40\ \text{kW}\cdot\text{h}\cdot\text{m}^{-3}$ et de 58 % d'acide polylactique d'énergie grise $E_{g,PLA}$.
Déterminer l'énergie grise du Kairlin®.
Le processus industriel permet de diviser environ par 15 la dépense énergétique. Comparer la valeur trouvée à celles communément admises d'isolants classiques.

Isolant	**Énergie grise** ($\text{kW}\cdot\text{h}\cdot\text{m}^{-3}$)	**Isolant**	**Énergie grise** ($\text{kW}\cdot\text{h}\cdot\text{m}^{-3}$)
Fibres de lin	30	Laine de mouton	55
Laine de roche	$1{,}5\cdot10^2$	Laine de verre	$2{,}5\cdot10^2$
Panneau de liège	$4{,}5\cdot10^2$	Polystyrène expansé	$4{,}5\cdot10^2$
Polyesters	$6{,}0\cdot10^2$	Polystyrène extrudé	$8{,}5\cdot10^2$
Mousse de polyuréthane	$11\cdot10^2$	Fibre de bois	$14\cdot10^2$

ANNEXE
Bibliothèque numpy de Python

Import de la bibliothèque `numpy` :

```
>>> import numpy as np
```

Création d'une matrice M de 2 lignes et 3 colonnes remplie de valeurs identiques :

```
>>> M = np.ones((2, 3))  # matrice de 1
>>> print(M)
[[1. 1. 1.]
 [1. 1. 1.]]
>>> M = 5 * np.ones((2, 3))  # matrice de 5
>>> print(M)
[[5. 5. 5.]
 [5. 5. 5.]
```

Modification d'une ligne ou d'une colonne de la matrice `M` (les indices démarrent à 0) :

```
>>> M = np.ones((2, 3))
>>> print(M)
[[1. 1. 1.]
 [1. 1. 1.]]
>>> print(M[0, :])  #  afficher la ligne 0
[1. 1. 1.]
>>> M[1, :] = 3  # modification de toutes les colonnes de la ligne 1
>>> print(M)
[[1. 1. 1.]
 [3. 3. 3.]]
>>> print(M[:, 1])  #  afficher la colonne 1
[1. 1.]
>>> M[:, 2] = 5  #  modification de toutes les lignes de la colonne 2
>>> print(M)
[[1. 1. 5.]
 [3. 3. 5.]]
```

Fonctions mathématiques : logarithme népérien, logarithme décimal

```
>>> np.log(10)  # logarithme népérien
2.302585092994046
>>> np.log10(10)  # logarithme décimal
1.0
```

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 23 1154 – D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de TPC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Bases de Python : expressions, types, instructions, fonctions
- Propagation d'un signal
- Grandeurs, unités, analyse dimensionnelle et ordres de grandeur
- Équations différentielles linéaires du premier ordre

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/tpc