Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2024, filière TPC

Physique

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Problème 1, partie I : la soupape
- Problème 1, partie II : mesures dans l'autocuiseur et exploitation
- Problème 2, partie I : action du vent
- Problème 2, partie II : le chant des dunes

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/tpc/2024/physique

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TPC

PHYSIQUE

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

PROBLÈME 1

Autocuiseur

L'autocuiseur (**photo 1**), couramment appelé " cocotte-minute® ", a été inventé en 1679 par le français Denis Papin.
Il s'agit d'un dispositif de cuisson des aliments sous une pression supérieure à la pression atmosphérique. L'augmentation de pression s'accompagne d'une augmentation de la température maximale atteinte, ce qui accélère la cuisson des aliments.
Une soupape permet de limiter la pression intérieure en évacuant la vapeur d'eau formée et assure une cuisson à température constante.



Photo 1 - Autocuiseur

L'autocuiseur contient toujours un peu d'eau en plus des aliments à cuire. La cuisson se déroule alors en trois étapes :

- un régime transitoire de montée en pression (et en température) du contenu de l'autocuiseur ;
- un régime de cuisson durant lequel la pression et la température de la vapeur d'eau restent constantes (la vapeur qui s'échappe par la soupape est compensée par la vaporisation de l'eau contenue dans l'autocuiseur) ;
- une décompression, souvent rapide, pour arrêter la cuisson.

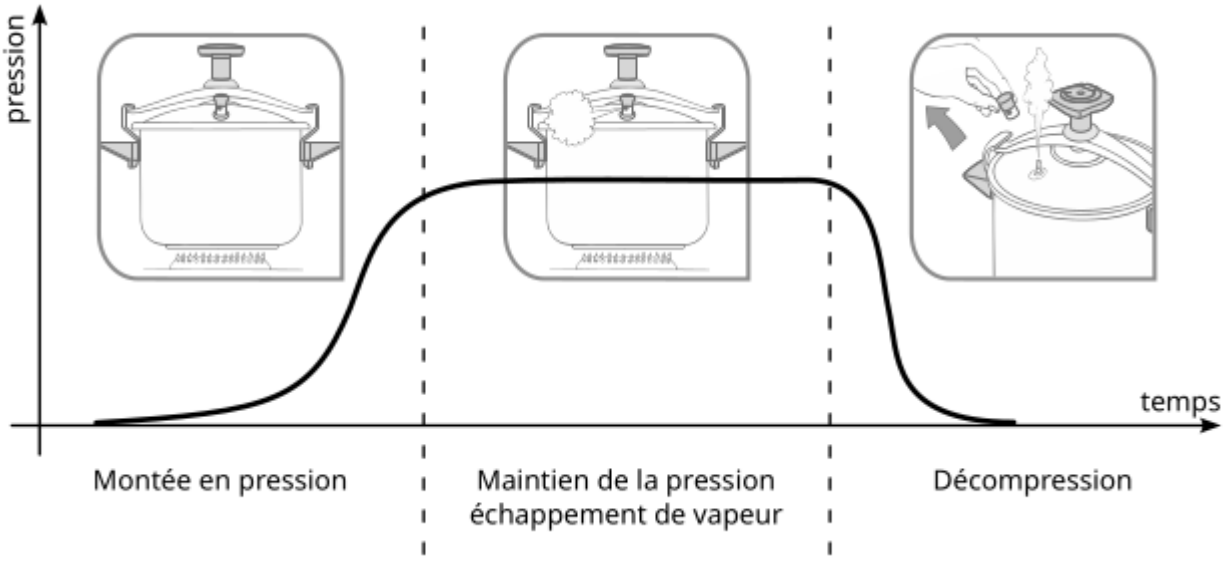


Figure 1 - Étapes de cuisson dans un autocuiseur

Partie I - La soupape

I.1 - Masse de la soupape

La soupape d'échappement de la vapeur est un cylindre de masse m placé sur le couvercle de l'autocuiseur. Elle peut coulisser verticalement sans frottement sur un cylindre creux qui fait communiquer l'intérieur de l'autocuiseur avec l'extérieur (**figure 2**).

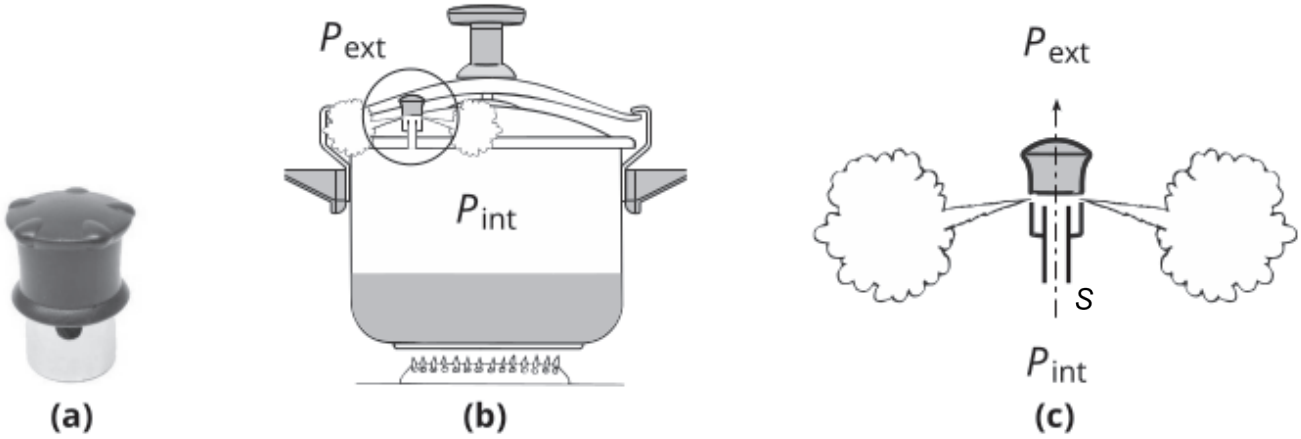


Figure 2 - Schéma de fonctionnement de la soupape d'échappement

Lorsque la pression augmente dans l'autocuiseur, la soupape monte, ce qui permet à la vapeur de s'échapper. En régime permanent, la soupape reste à hauteur constante (**figure 2c**) et est en équilibre sous l'effet de son poids et des forces de pression.

La pression extérieure vaut $P_{ext} = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa.

On note P_{int} la pression à l'intérieur de l'autocuiseur.

La soupape est pesée sur une balance de cuisine (**figure 3a**) dont un extrait de la notice est donné (**figure 3b**).



Figure 3 - Balance de pesée

Q1. En tenant compte de l'indication de précision mentionnée par la notice de la balance, écrire la valeur numérique de la masse m de la soupape. L'évaluation de son incertitude-type associée serait-elle de type A ou de type B ?
Aucun calcul d'incertitude n'est demandé par la suite.

I.2 - Équilibre de pression

La section du conduit cylindrique d'évacuation de la vapeur vaut $S = 7{,}00\,\text{mm}^2$.
Des indications de pression et le volume de l'autocuiseur sont gravés sur celui-ci (**figure 4**).



Figure 4 - Indications sur l'autocuiseur

On note $g = 9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ la valeur du champ de pesanteur.

Q2. Représenter, à l'équilibre, la soupape et les trois forces qui s'exercent sur elle.

Q3. Déterminer l'expression littérale de P_{int} en fonction de P_{ext}, m, g et de S.
Déterminer la valeur numérique de P_{int}.

Q4. L'une des indications gravées sur l'autocuiseur permet-elle de confirmer ce résultat ?
À quoi correspond vraisemblablement l'autre indication de pression ?

Partie II - Mesures dans l'autocuiseur et exploitation

On verse un volume $V_e = 1{,}00\,\text{L}$ d'eau dans l'autocuiseur que l'on ferme et que l'on place sur une plaque chauffante délivrant la puissance thermique $P_{\text{th}} = 1{,}50\,\text{kW}$.
Des capteurs placés dans l'autocuiseur permettent d'enregistrer la température de l'eau, la température de la phase vapeur ainsi que la pression de la phase vapeur au cours du temps (**figure 5**).

On note :

- m_{e} la masse de l'eau,
- $c_{\text{e}} = 4{,}18\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ la capacité thermique massique de l'eau,
- $C_{\text{a}} = 1{,}23\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}$ la capacité thermique de l'autocuiseur.

L'eau et l'autocuiseur sont constamment à la même température et on note T_i leur température initiale.

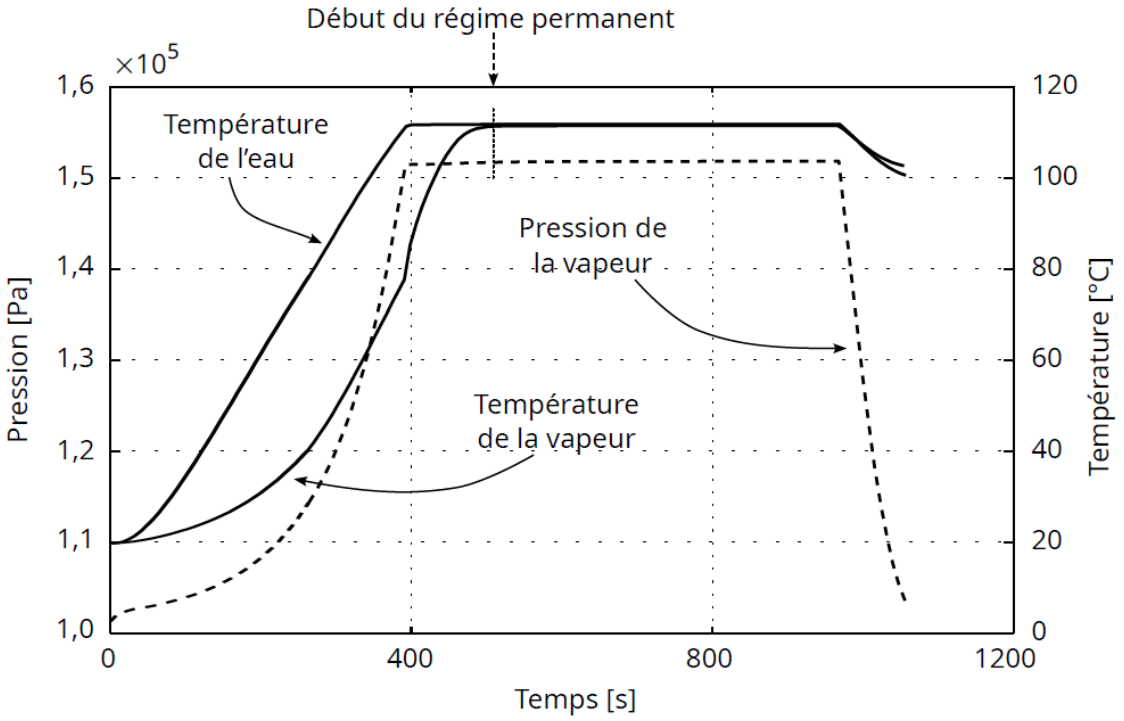


Figure 5 - Mesure de températures et de pression dans l'autocuiseur

II.1 - Premier modèle

Dans un premier temps, on suppose que toute la puissance thermique P_{th} est transférée à l'autocuiseur et à l'eau.

Q5. Relever sur la **figure 5** la température initiale T_i.

Q6. On note Δt la durée au bout de laquelle l'eau et l'autocuiseur atteignent la température $T_{\text{f}} = 100\,°\text{C}$. Déterminer l'expression littérale de la durée Δt en fonction de m_e, c_e, C_a, T_f, T_i et de P_{th}.
Déterminer la valeur numérique de Δt.

Q7. Cette durée est-elle compatible avec les données de la **figure 5** ? Si non, donner deux arguments permettant de justifier cet écart.

II.2 - Second modèle

Dans un second temps, on tient compte des pertes thermiques de l'autocuiseur vers son environnement au cours du temps sous la forme d'une puissance thermique de fuite $P_{\text{f}}(t) = k[T(t) - T_{\text{ext}}]$ où k et T_{ext} sont des constantes.

Q8. En effectuant un bilan thermique sur le système {eau + autocuiseur} pendant l'intervalle de temps infinitésimal dt, montrer que la température du système satisfait l'équation différentielle :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau}[T(t) - T_{\text{ext}}] = \frac{1}{\tau}\frac{P_{th}}{k} \qquad \textbf{(1)}$$

et déterminer l'expression de τ en fonction de m_e, c_e, C_a et de k.

Q9. On cherche une solution de l'équation **(1)** sous la forme $T(t) = A + B\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$. Déterminer les expressions littérales de A et de B en fonction des paramètres de l'équation **(1)**.

Le tracé de la solution de l'équation **(1)** est présenté sur la **figure 6**.

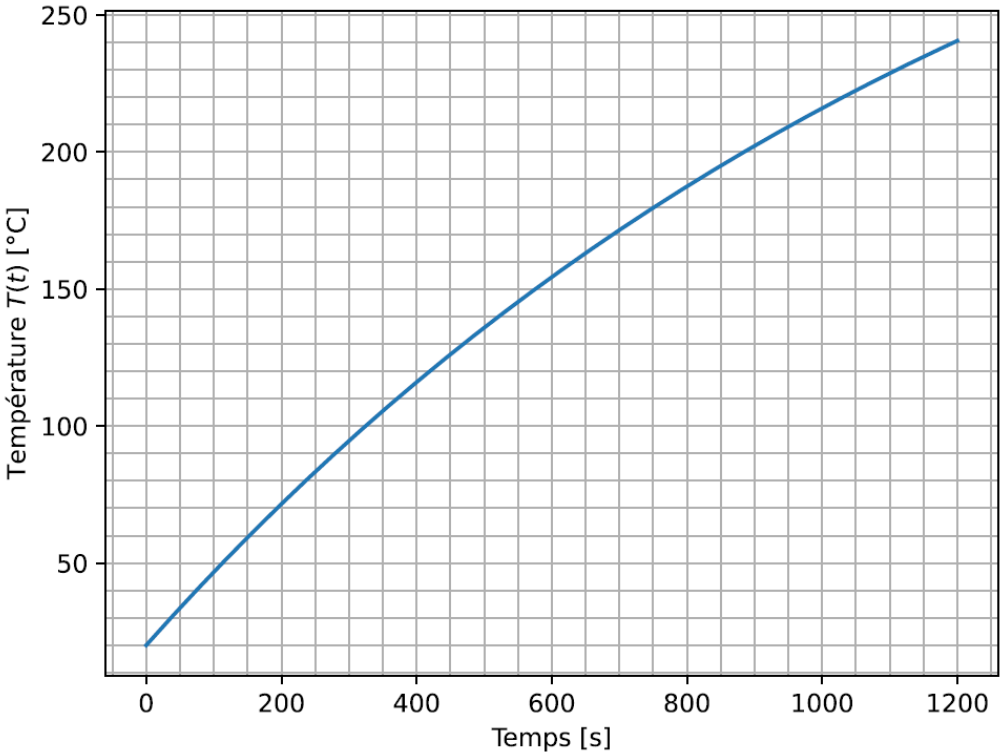


Figure 6 - Évolution de la température intérieure en fonction du temps

Q10. Déduire de la **figure 6** la durée $\Delta t'$ nécessaire pour atteindre la température $T_f = 100\,°C$.
Le résultat est-il cohérent avec la durée Δt trouvée précédemment ? Justifier.
Le résultat est-il satisfaisant ? Justifier.

II.3 - Augmentation de la vitesse de cuisson

On observe sur la **figure 5** qu'au-delà de 500 s, le régime permanent de cuisson est atteint. On note T_p la température de cuisson et P_p la pression de cuisson en régime permanent.

Q11. Relever sur la **figure 5** la température de cuisson T_p et la pression de cuisson P_p en régime permanent.

Q12. Préciser la raison thermodynamique pour laquelle la température et la pression sont devenues constantes.

La pression de vapeur saturante de l'eau dépend de la température, comme le montre la **figure 7**.

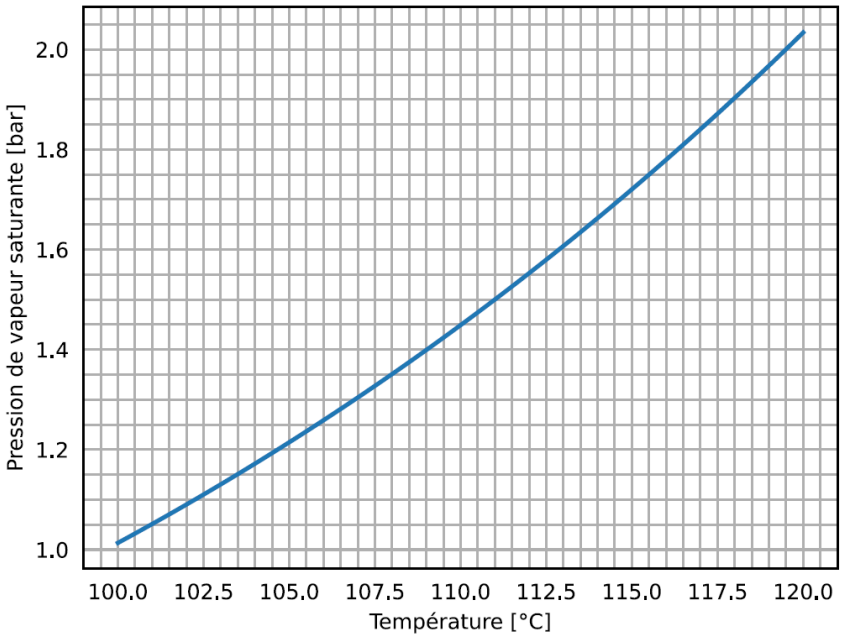


Figure 7 - Évolution de la pression de vapeur saturante en fonction de la température

Q13. Reproduire cette courbe sur votre copie en y positionnant :

- le point de cuisson en régime permanent dans un autocuiseur (T_p, P_p) ;
- le point de cuisson à ébullition sous pression ambiante (T_a, P_a) (qui correspond par exemple à la cuisson de pâtes dans une casserole d'eau bouillante).

La **figure 8** donne le facteur de vitesse de la cuisson en fonction de la température de cuisson. La référence est prise à $100\,°C$. Par exemple, une cuisson à $80,0\,°C$ a un facteur de cuisson de $0,25$ et est donc quatre fois plus lente qu'à $100\,°C$.

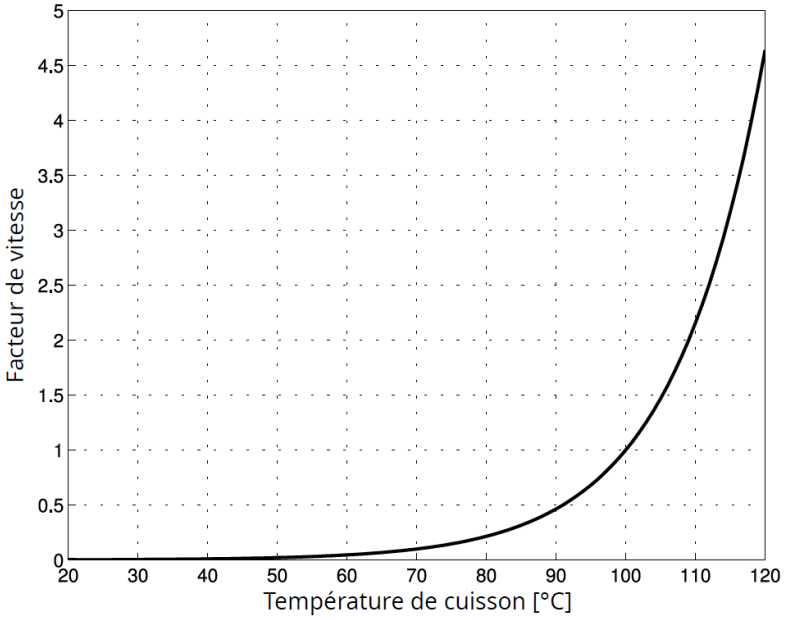


Figure 8 - Évolution du facteur de cuisson en fonction de la température

Q14. Sachant que la cuisson de légumes dans une casserole d'eau bouillante à l'air libre s'est faite en 20,0 minutes, estimer la durée nécessaire à la cuisson de la même quantité de légumes dans un autocuiseur.

II.4 - Estimation du débit de vapeur

Lorsque l'autocuiseur fonctionne en régime permanent, la puissance thermique de la plaque chauffante est réduite à $P_{th} = 600$ W . Un jet de vapeur d'eau s'échappe continûment par la soupape.
La puissance fournie par la plaque chauffante sert en partie à vaporiser l'eau présente dans l'autocuiseur et est en partie perdue, les pertes étant de l'ordre de $P_f = 350$ W .
On admet que la quantité d'eau vaporisée pendant la cuisson reste suffisamment faible pour considérer le volume d'eau liquide présent dans l'autocuiseur comme constant et égal à $V_e = 1{,}00\,\text{L}$ (hypothèse $\mathcal{H}$).
On suppose que le gaz présent dans l'autocuiseur est uniquement constitué de vapeur d'eau. Dans les conditions de cuisson, l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau vaut $\Delta_{vap}h = 2{,}23\,\text{MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

Q15. Expliquer pourquoi il apparaît des gouttelettes d'eau liquide dans le jet de vapeur à sa sortie par la soupape.

Q16. Déterminer, à l'aide d'un bilan enthalpique, le débit massique du jet de vapeur d'eau en mg.s^{-1}.

Q17. En déduire la masse d'eau perdue dans le jet pour une cuisson de 10,0 minutes.
L'hypothèse $\mathcal{H}$ est-elle toujours vérifiée sur des durées de cuisson usuelles de 30,0 minutes ?

II.5 - Intérêt de l'autocuiseur en altitude

On souhaite déterminer l'évolution de la pression atmosphérique $P(z)$ en fonction de l'altitude en tenant compte du fait que la température décroit linéairement avec l'altitude selon la relation $T(z) = T_0 - az$, où T_0 et a sont des constantes.
On se place à une altitude z et on considère un volume d'air infinitésimal, de côtés dx, dy et dz, supposé en équilibre.
On assimile l'air à un gaz parfait de constante R, de masse molaire M_a, de masse volumique $\rho(z)$ et de pression P_0 à l'altitude $z = 0$. On suppose le champ de pesanteur uniforme.

Q18. Rappeler l'expression de la masse volumique $\rho(z)$ en fonction de M_a, $P(z)$, R et de $T(z)$.

Q19. Montrer que la pression de l'air satisfait l'équation différentielle :

$$\frac{dP(z)}{dz} + \rho(z)g = 0\,. \qquad \textbf{(2)}$$

Q20. En déduire, par séparation des variables, que l'équation **(2)** se met sous la forme :

$$\frac{dP(z)}{P(z)} = \alpha\frac{-adz}{T_0 - az} \qquad \textbf{(3)}$$

et donner l'expression du coefficient α en fonction de M_a, g, R et de a.

Q21. Montrer que l'équation **(3)** admet pour solution l'expression

$$P(z) = P_0\left(1 - \frac{a}{T_0}z\right)^{\alpha}\,.$$

Q22. On se place à une altitude telle que la pression vaut 0,70 bar et l'eau bout à 90 °C. En expliquant la démarche suivie et en précisant quelles informations du sujet ont été utilisées (formules, données, figures, ...), estimer la température d'ébullition de l'eau dans l'autocuiseur à cette altitude. Conclure quant à l'intérêt de l'utilisation d'un autocuiseur en altitude.

PROBLÈME 2

Chant des dunes

Dans les déserts de sable, le vent donne naissance à d'élégantes formations : les dunes.
Mais le vent ne sculpte pas seulement les dunes, il trie les grains de sable entre eux, si bien que certaines d'entre-elles peuvent se mettre " à chanter ".
L'objet de cette partie est d'introduire quelques modèles simples caractérisant l'action du vent sur les grains de sable et permettant d'expliquer le chant des dunes.



Photo 2 - Désert de Gobi

L'accélération de la pesanteur sera notée $\vec{g}$ et sa norme vaut $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.
Le référentiel d'étude sera supposé galiléen.

Partie I - Action du vent

I.1 - Écoulement de l'air autour d'un grain de sable

On assimile un grain de sable à une sphère de rayon R de diamètre d au sein de l'air supposé être un fluide newtonien de viscosité dynamique η, de masse volumique ρ et de vitesse $\vec{U}$.

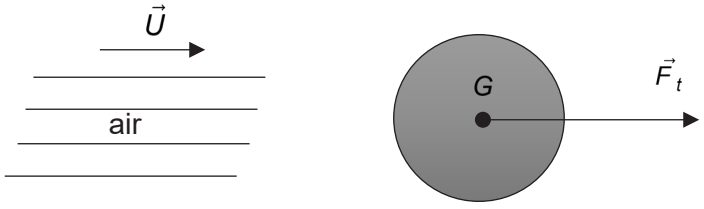


Figure 9 - Grain de sable dans un fluide

On cherche à déterminer la traînée exercée sur le grain de sable modélisée par une force $\vec{F}_t$ s'appliquant au centre d'inertie G du grain. Cette force est fonction de U, R, ρ et d'un coefficient C_x sans unité appelé coefficient de traînée.

Q23. Par une analyse dimensionnelle, déterminer les entiers naturels α, β et γ présents dans la formule de la traînée :

$$\left\|\vec{F}_t\right\| = \frac{\pi}{2} C_x R^{\alpha} U^{\beta} \rho^{\gamma}.$$

Le coefficient de traînée C_x est fonction du nombre de Reynolds R_e, donné par : $R_e = \frac{\rho d U}{\eta}$.

La courbe expérimentale $C_x = f(R_e)$ est donnée **figure 10** en utilisant une échelle logarithmique.

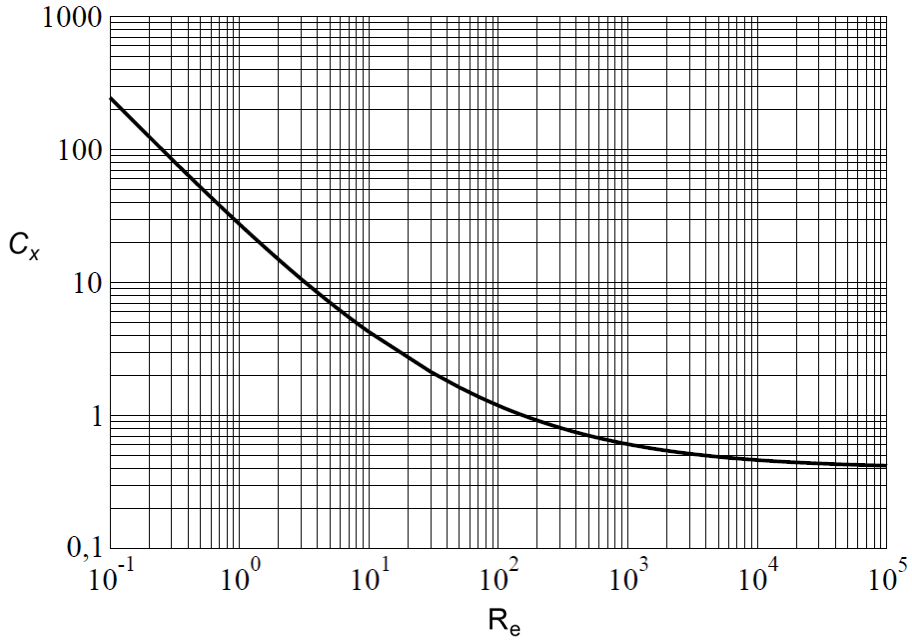


Figure 10 - Coefficient de traînée d'une sphère en fonction du nombre de Reynolds sur une échelle log-log

Q24. Comment qualifie-t-on les régimes d'écoulement observés dans les cas asymptotiques $R_e \ll 1$ et $R_e \gg 1$?

Q25. Aux faibles nombres de Reynolds, la traînée obéit à la loi dite de Stokes dans laquelle la force a pour expression $\vec{F_t} = 6\pi\eta R\vec{U}$. Préciser alors la valeur de C_x en fonction de R_e. Est-ce en accord avec le graphe de la **figure 10** aux faibles nombres de Reynolds ?

Q26. Par lecture sur le graphique, déterminer l'expression de la traînée pour des nombres de Reynolds $R_e \gg 1$.

La **figure 11** permet de visualiser les grains de la dune Cerro Bramador au Chili.

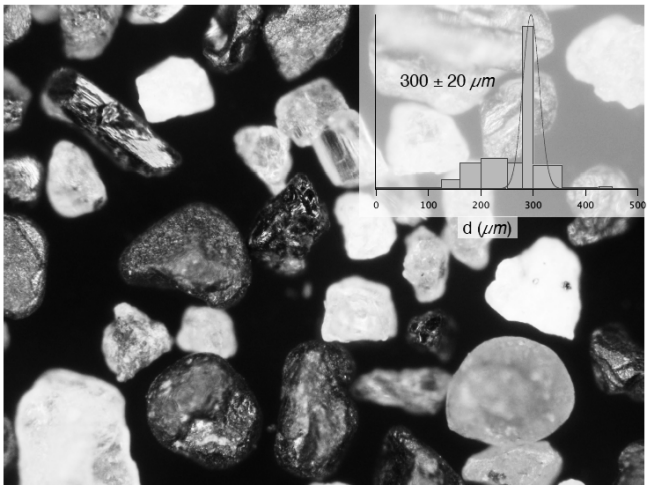


Figure 11 - Photo et courbe de dispersion du diamètre des grains de la dune Cerro Bramador au Chili

Pour cette région du monde, on donne :

- $\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-5}\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$,
- $\rho = 1{,}1\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$,
- $U \simeq 2{,}0\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ (cette faible valeur sera justifiée au **I.2.**).

Q27. Calculer la valeur du nombre de Reynolds R_e pour les grains de la dune Cerro Bramador. En déduire par lecture graphique (**figure 10**) la valeur de C_x correspondante.

Par la suite, on raisonne sur un modèle quadratique de la traînée $\left\|\vec{F}_t\right\| = \frac{1}{2} C_x \rho \pi R^2 U^2$.

Soit un grain de sable de centre G de masse m reposant sur une dune de sable.
En plus de la traînée $\vec{F}_t$, l'écoulement de l'air provoque aussi une portance modélisée par une force $\vec{F}_p$ s'appliquant au centre du grain (**figure 12**).

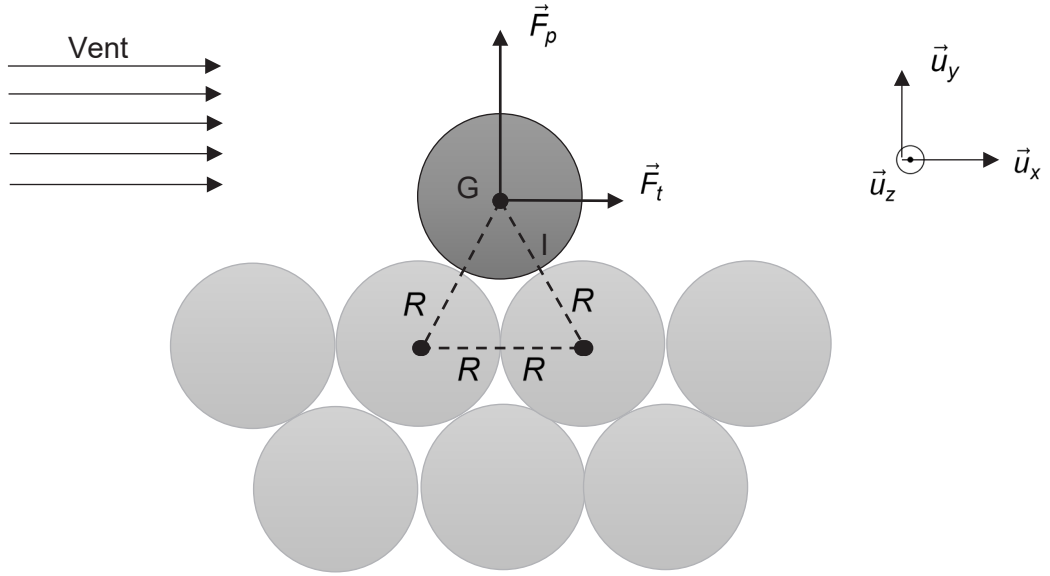


Figure 12 - Contact d'un grain de sable

On suppose que :

- la portance est proportionnelle à la traînée $\left\|\vec{F}_p\right\| = \alpha \left\|\vec{F}_t\right\|$, avec α un coefficient de proportionnalité,
- les actions de contact s'appliquent au seul point I pour le grain étudié (**figure 12**).

On rappelle que les trois angles d'un triangle équilatéral sont égaux et on donne :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Q28. Faire un bilan des quatre forces agissant sur le grain étudié en précisant leurs points d'applications.

Q29. Montrer que le moment résultant par rapport au point de contact I s'écrit :

$$\vec{M}_I\left(\vec{F}_{ext}\right) = \frac{1}{2} R \left[mg - \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \alpha\right) C_x \rho \pi R^2 U^2 \right] \vec{u}_z .$$

Q30. En déduire que le grain n'est déplacé dans la direction $\vec{u}_x$ qu'à condition que sa masse respecte l'inégalité suivante :

$$m < \left(\sqrt{3} + \alpha\right)\frac{1}{2g} C_x \rho \pi R^2 U^2 .$$

Une fois mis en mouvement, le grain est susceptible d'atteindre la crête d'une dune (**figure 13**) puis d'être soulevé par la portance au point de séparation et d'être emporté par le vent. Les grains les plus lourds retombent assez rapidement derrière la crête ou ne se soulèvent pas. Les plus légers peuvent eux parcourir de plus grandes distances (si bien que l'on peut même retrouver certains grains du Sahara en France lors de fortes rafales de vent).

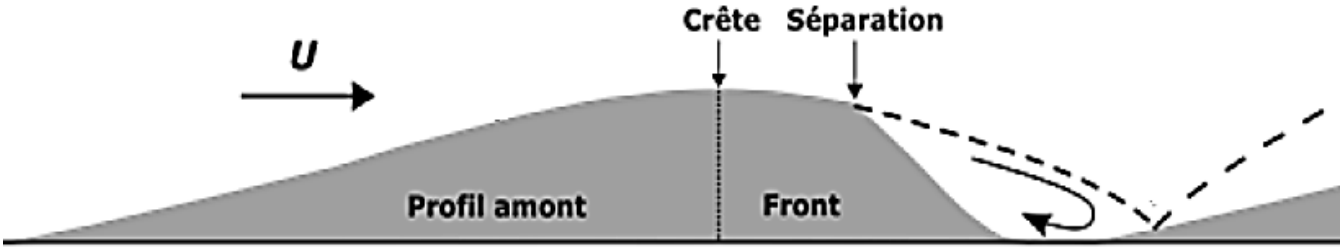


Figure 13 - Profil d'une dune

Q31. Montrer que les grains qui retombent ou restent après la crête de la dune ont une masse qui vérifie :

$$m > \alpha \frac{1}{2g} C_x \rho \pi R^2 U^2 .$$

On introduit la grandeur $\kappa = \mu\, d$ le produit de la masse volumique des grains de sable μ par leur diamètre d.

Q32. En déduire que les grains derrière la crête possèdent un produit κ compris dans l'intervalle $[\kappa_{\min}; \kappa_{\max}]$ où l'on donnera les expressions de $\kappa_{\min}$ et $\kappa_{\max}$ en fonction de α, g, C_x, ρ et de U.

Q33. Application numérique : pour $\alpha = 9{,}5$ et $C_x = 4{,}3$, calculer les valeurs $\kappa_{\min}$ et $\kappa_{\max}$ des grains se trouvant derrière la crête de la dune Cerro Bramador au Chili étudiée précédemment.

Q34. Ainsi, les grains déposés par le vent derrière la crête ont été triés selon leurs produits κ. Proposer une analogie dans un autre domaine de la physique : on calculera alors une valeur centrale κ_0 correspondante, une bande passante $\Delta\kappa$ et une valeur du facteur de qualité Q. En déduire si le vent effectue un tri de bonne sélectivité ou non.

I.2 - Profil de vitesse au-dessus d'une dune

La force que subit un grain de sable est le résultat d'une interaction assez complexe entre l'air en mouvement et une zone située au-dessus du lit de sable que l'on appelle couche limite (**figure 14**).

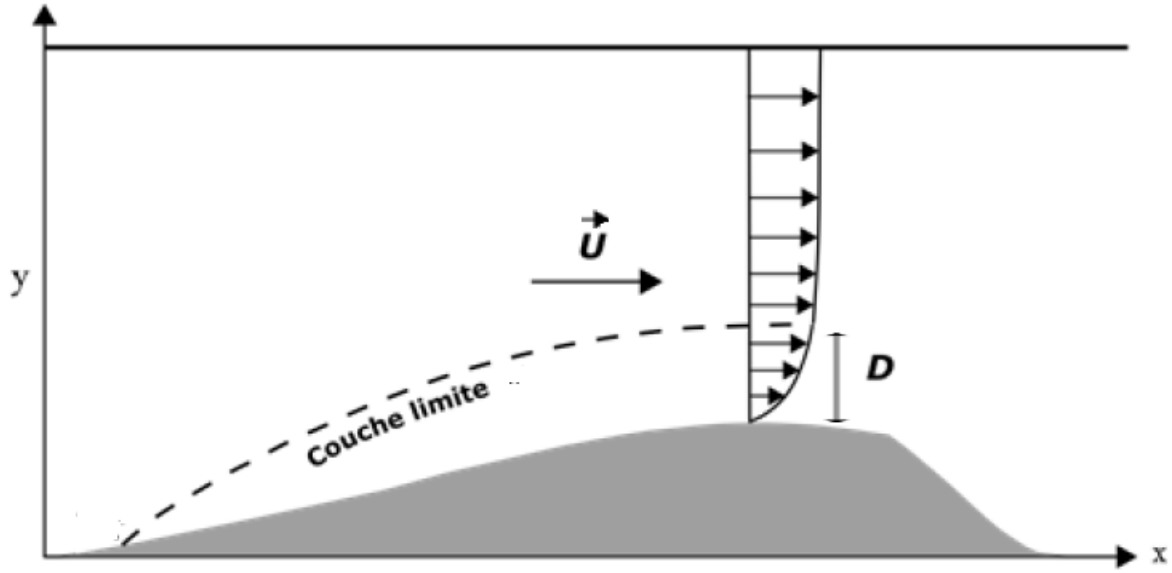


Figure 14 - Couche limite au-dessus des dunes avec le profil de vitesses (échelle non respectée)

On modélise l'écoulement de l'air dans la couche limite comme un écoulement de Couette plan entre deux plaques représentant la surface de la dune fixe et la surface libre de l'air à vitesse constante $\vec{U}$.

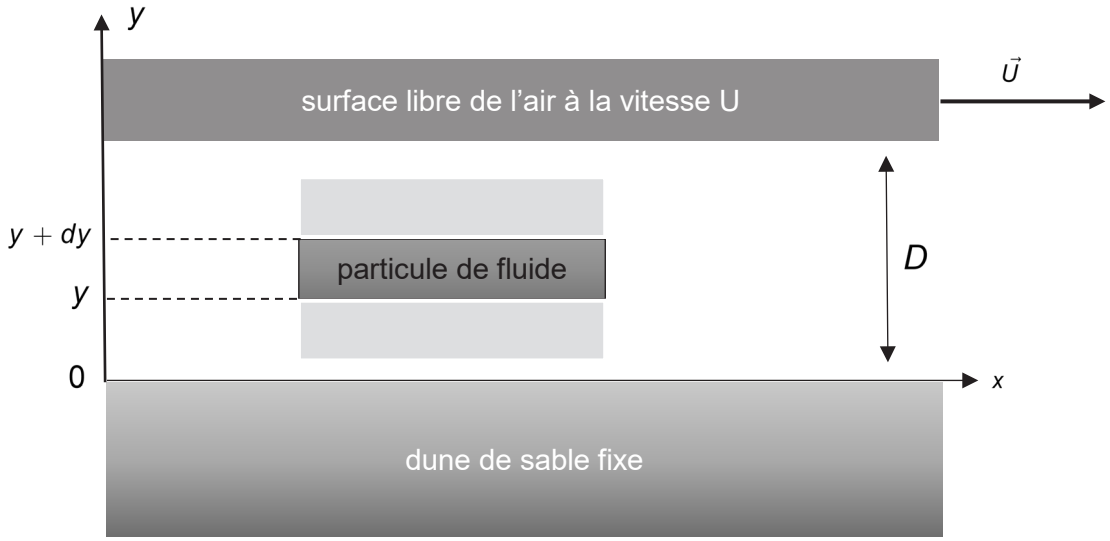


Figure 15 - Modélisation de l'écoulement de l'air dans la couche limite

On suppose qu'entre les deux plaques, l'écoulement de l'air est incompressible, stationnaire et invariant selon les axes Ox et Oz. Les champs de pression et de vitesse s'écrivent alors en un point M entre les deux plaques :

$$\vec{v}(M) = v_x(y)\vec{u}_x$$
$$p(M) = p(y).$$

Le système étudié est une particule de fluide de masse élémentaire δm de dimensions dx, dy et dz représentée **figure 15**.

On donne l'expression de la force élémentaire de viscosité exercée sur une surface dS :

$$\delta \vec{F} = \pm\eta \frac{dv_x(y)}{dy} dS\vec{u}_x .$$

Q35. Justifier que l'accélération de la particule de fluide est nulle.

Q36. Faire un bilan des trois forces exercées sur la particule de fluide (on projettera ces forces selon les vecteurs unitaires $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$).

Q37. Montrer que la projection de la relation fondamentale de la dynamique le long de l'axe Ox permet d'obtenir l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 v_x(y)}{dy^2} = 0 .$$

Q38. Résoudre cette équation et montrer que le champ des vitesses s'écrit dans la couche limite :

$$v_x(y) = \frac{U}{D} y .$$

Q39. Sachant que l'épaisseur de la couche limite est de l'ordre du millimètre et que la vitesse moyenne du vent dans le désert est plutôt d'une vingtaine de kilomètres par heure, justifier les $2\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ pris au **I.1.** pour la vitesse de l'air au voisinage d'un grain posé sur une dune.

Q40. Représenter schématiquement le profil de vitesse dans la couche limite et commenter en rapport avec le profil de la **figure 14**.

Ce désaccord est dû au caractère turbulent de l'écoulement dans la couche limite (contrairement à notre modélisation). On peut ajuster notre modèle en remplaçant la viscosité η par une viscosité dite turbulente $\eta(y)$ qui dépend de l'altitude selon une loi :

$$\eta(y) = \beta \frac{dv_x}{dy} y^2$$

avec β une constante.

Q41. Montrer, toujours à l'aide de la relation fondamentale de la dynamique, que la nouvelle équation différentielle à laquelle obéit $v_x(y)$ s'écrit :

$$\frac{d}{dy}\left[\left(y\frac{dv_x}{dy}\right)^2\right] = 0 .$$

Q42. Résoudre cette équation et montrer que le champ des vitesses se met sous la forme :

$$v_x(y) = V_0 + A\ln\left(\frac{y}{y_0}\right)$$

avec A une constante d'intégration positive que l'on ne cherchera pas à déterminer et V_0 la vitesse de l'air à une altitude y_0.

Q43. Tracer le profil des vitesses correspondant et commenter en rapport avec la **figure 14**.

Partie II - Le chant des dunes

Certaines dunes dans le désert émettent un bruit lorsque les grains de sable qui les composent entrent en résonance : c'est le chant des dunes. Ce bruit étrange possède une puissance sonore tellement grande qu'il pouvait faire peur aux caravaniers dans le désert (après l'épreuve, le candidat pourra écouter un tel chant par exemple ici https://www.youtube.com/watch?v=KwZeTs2WtUU).

II.1 - Avalanche de sable

Le chant des dunes a été récemment étudié et expliqué en partie. Le son est émis lorsqu'une avalanche (naturelle ou déclenchée artificiellement en marchant sur la dune) se déclenche dans la face la plus pentue de la dune.

L'angle que fait cette face arrière avec l'horizontale est pratiquement le même pour toutes les dunes et se situe autour de 36°.

Avant l'avalanche, on considère un bloc de sable de masse M_b initialement à l'équilibre et reposant sur un plan incliné dont la pente est repérée par l'angle φ (**figure 16**).

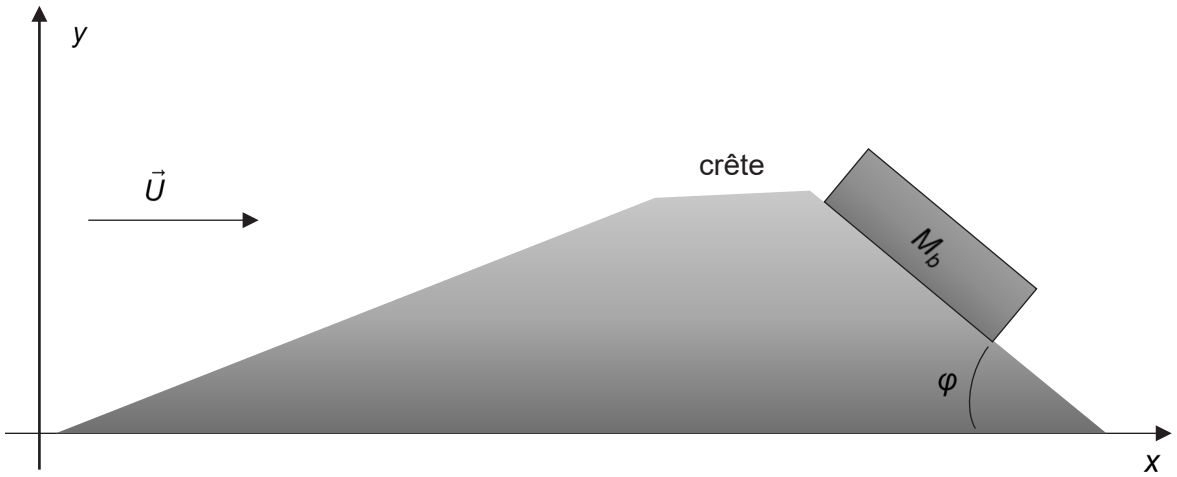


Figure 16 - Représentation schématique d'une dune

Le contact entre le bloc de sable et ce plan peut être décrit par les lois de Coulomb sur le frottement solide :

- $\left\|\vec{R}_T\right\| < f\left\|\vec{R}_N\right\|$ si aucun glissement,
- $\left\|\vec{R}_T\right\| = f\left\|\vec{R}_N\right\|$ si glissement,

où $\vec{R}_T$ et $\vec{R}_N$ désignent respectivement la composante tangentielle et la composante normale de la réaction du support et f le coefficient dit de frottement.

On donne : $f_{sable/sable} = 0{,}72$.

Q44. Le bloc de sable étant en équilibre, déterminer l'expression des normes $\left\|\vec{R}_T\right\|$ et $\left\|\vec{R}_N\right\|$ en fonction de M_b, g et de φ.

Q45. En déduire la valeur critique φ_c de l'angle φ à partir de laquelle un phénomène d'avalanche de sable se produit. Effectuer l'application numérique et commenter.

Pour comprendre certaines caractéristiques des avalanches, il est utile de comprendre le mouvement d'un grain en chute sur une pente composée d'autres grains fixes faisant avec l'horizontale un angle $\varphi \simeq \varphi_c$ (**figure 17**).

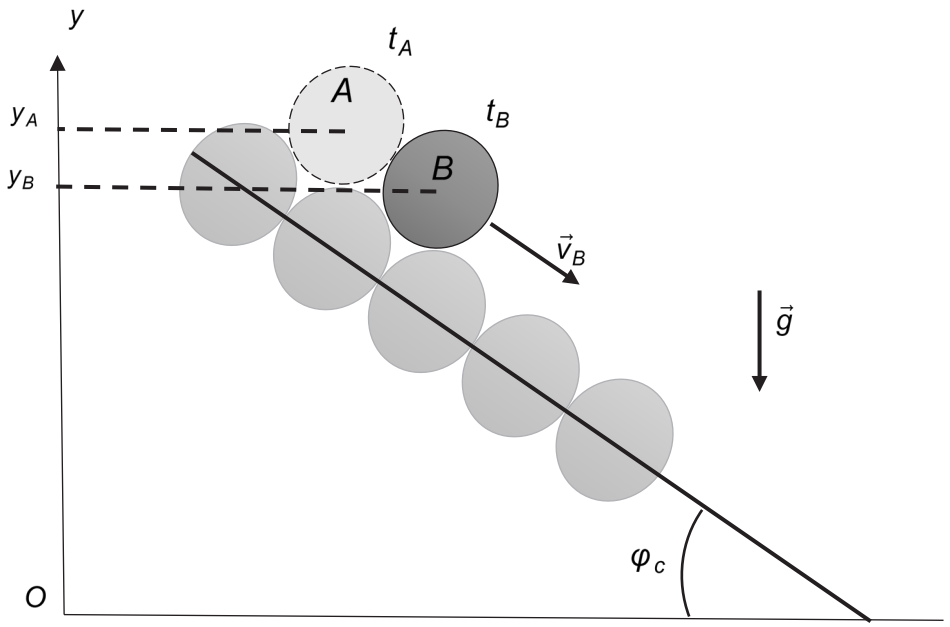


Figure 17 - Schéma représentant la chute d'un seul grain sur une assemblée d'autres grains et photographié à deux instants t_A et t_B

On adopte les notations suivantes pour le choc à l'instant t_A au point A :

	juste avant le choc en A	juste après le choc en A
instants	t_A^-	t_A^+
vitesses	v_{A^-}	v_{A^+}
énergies cinétiques	$E_C\left(t_A^-\right)$	$E_C\left(t_A^+\right)$.

De même pour le choc en B à la date suivante t_B.

On introduit un coefficient de restitution effective ε, tel que l'énergie cinétique juste après le choc soit proportionnelle à celle juste avant le choc :

$$E_c\left(t_A^+\right) = \varepsilon\, E_c\left(t_A^-\right).$$

On néglige les énergies de rotation devant celle de translation.

Q46. Exprimer la vitesse v_{A^+} en fonction de la vitesse v_{A^-} et de ε.

Q47. En supposant des sphères dures, montrer que :

$$y_A - y_B = d \sin\varphi_c .$$

Q48. Entre t_A^+ et t_B^-, le système est conservatif (absence de chocs). Exprimer alors $v_{B^-}^2$ en fonction de $v_{A^+}^2$, ε, g, d et de φ_c.

On repère chaque choc par l'entier naturel n et on appelle v_n la vitesse du grain juste avant un choc n.

Q49. En déduire la relation de récurrence suivante :

$$v_{n+1}^2 = \varepsilon\, v_n^2 + 2gd \sin\varphi_c \,.$$

À l'aide d'un programme informatique, on trace la suite des valeurs des vitesses v_n :

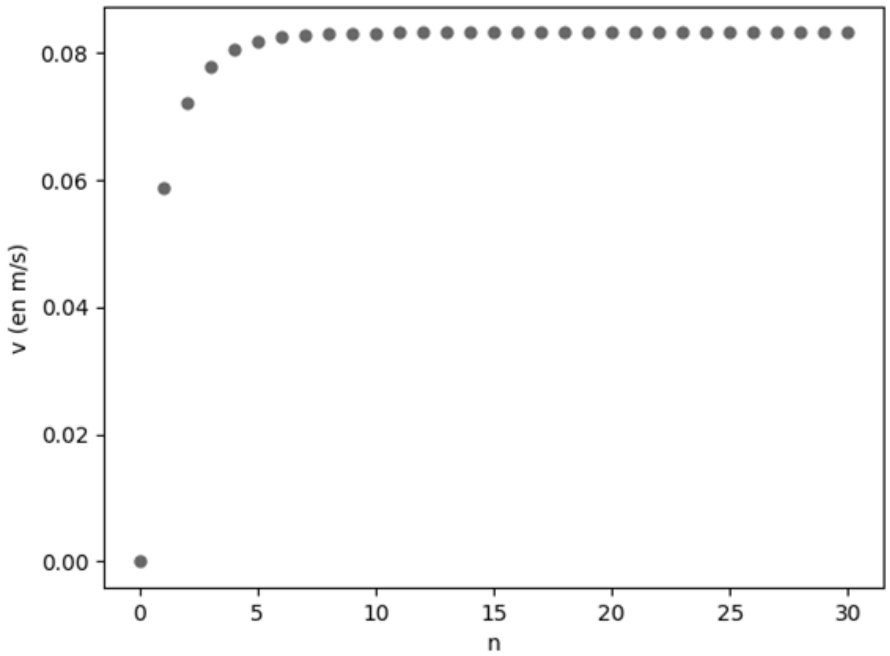


Figure 18 - Suite des valeurs v_n de vitesses d'un grain avant chaque choc

Q50. En interprétant le graphe de la **figure 18**, montrer que la vitesse d'un grain tend vers une limite donnée par :

$$v_\ell = \Omega\sqrt{gd}$$

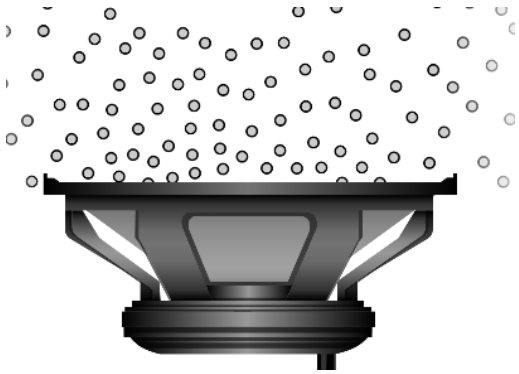
avec Ω un coefficient à exprimer en fonction de φ_c et de ε.

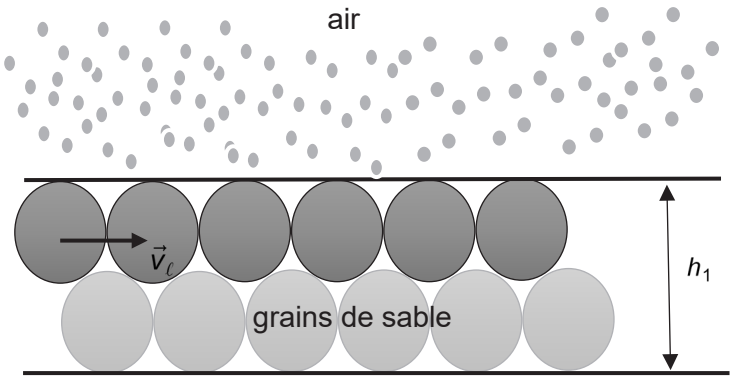
II.2 - Le chant des dunes

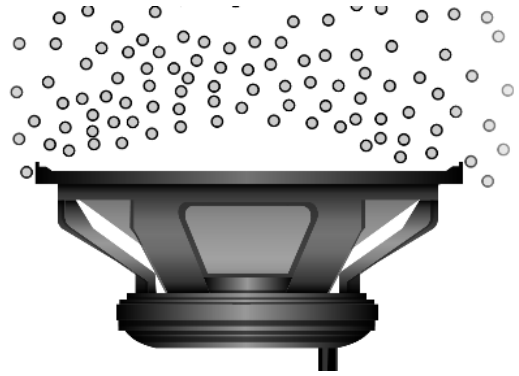
Pour la plupart des dunes, le coefficient Ω précédent est le même, ainsi la vitesse d'un grain tend rapidement vers une valeur limite:

$$v_\ell \simeq 0{,}4\,\sqrt{gd}\,.$$

Lors d'une avalanche, les grains passent de creux à bosses alternativement, y compris dans les sous-couches inférieures. Le mouvement d'ensemble déplace alors la couche d'air au-dessus de la dune qui " monte " et qui " descend " dans un mouvement coordonné comme le provoquerait un haut-parleur (**figure 19, page suivante**) :







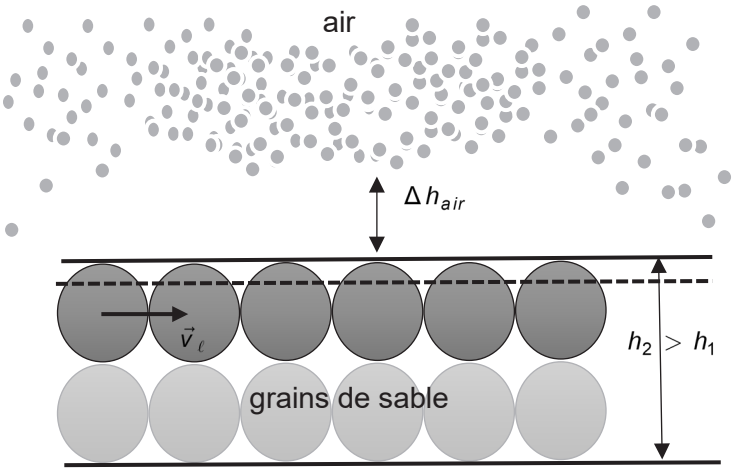


Figure 19a - Déplacement d'une membrane de haut-parleur

Figure 19b - Déplacement d'une rangée de grains de sable

Ce mouvement d'ensemble génère ainsi une onde sonore appelée chant des dunes.

Q51. Sachant que les grains se déplacent à vitesse constante v_ℓ, déterminer le temps entre deux chocs successifs et montrer que le son émis possède une fréquence :

$$f = 0,4\sqrt{\frac{g}{d}}\,.$$

Q52. Vérifier la cohérence de cette modélisation avec les relevés sur le terrain des chants émis par les dunes Al-Wagan à Oman et Omega1 au Maroc (**figure 20**).

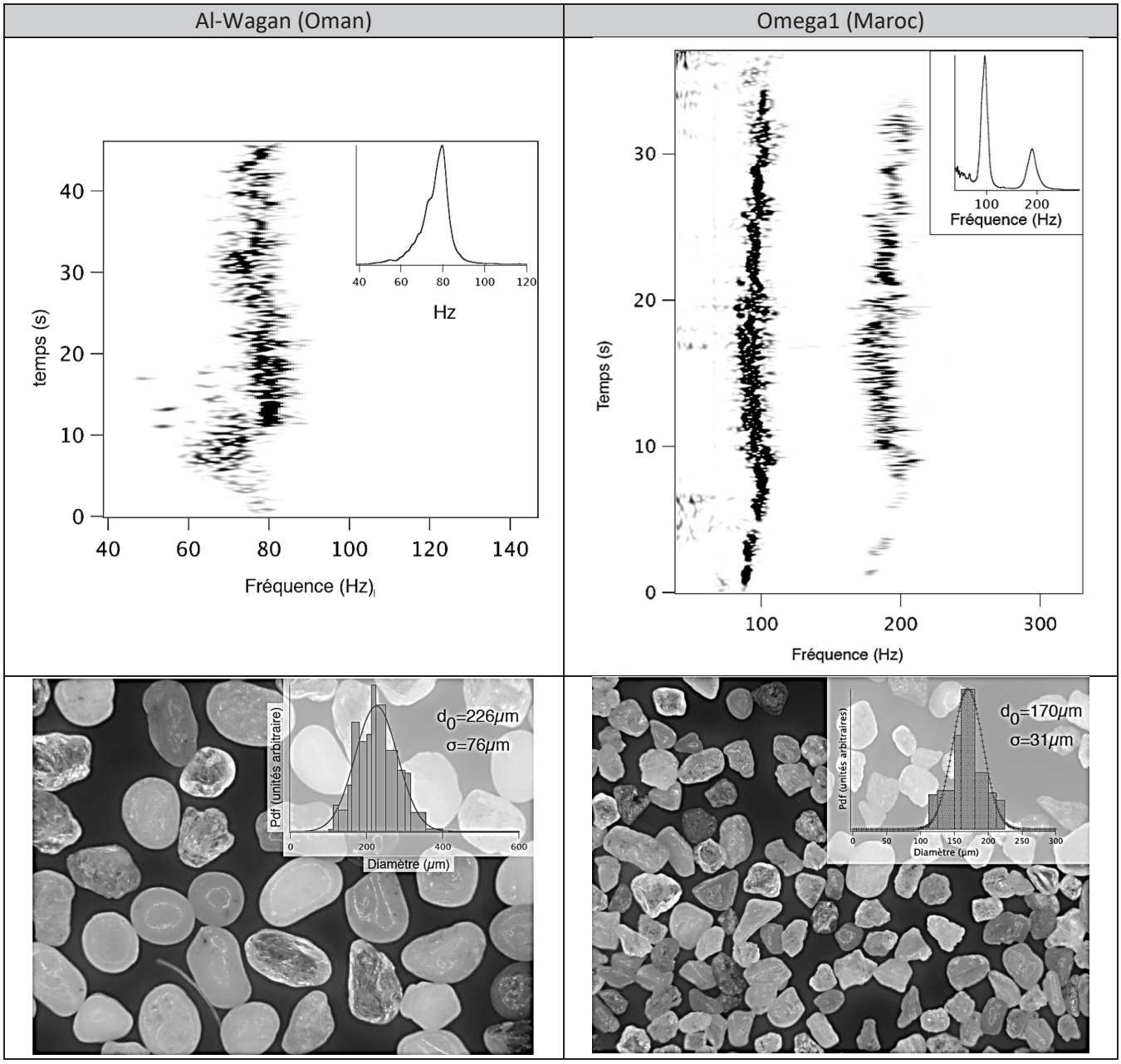


Figure 20 - Sonogrammes et diamètres des grains de deux dunes chantantes

Q53. En observant les photos des grains de la **figure 20**, expliquer qualitativement pourquoi la dune Omega1 possède deux raies distinctes alors que celle d'Al-Wagan n'en possède qu'une.

On estime à une vingtaine le nombre de couches de sable qui ont un mouvement synchrone, si bien que lorsque la hauteur de la surface libre d'un grain varie de $h_2 - h_1 \simeq 0{,}13\,d$, celle de l'air environnant varie de $\Delta h_{air} \simeq 3d$ (**figure 19b**).

Q54. En assimilant le mouvement de l'air à un mouvement sinusoïdal d'amplitude $\frac{\Delta h_{air}}{2}$, montrer que l'amplitude de la vitesse de l'air s'écrit :

$$V_{ma} = 3\pi f d\ .$$

Calculer V_{ma} pour la dune Al-Wagan à Oman.

Q55. Pour une onde plane progressive harmonique se propageant dans l'air, rappeler la relation entre l'amplitude de la surpression P_{ma} , l'amplitude de la vitesse V_{ma} et l'impédance acoustique Z .

Q56. On donne $Z = \rho c$, avec c la célérité de l'onde sonore et ρ la masse volumique de l'air. En déduire que l'intensité sonore d'une telle onde s'écrit :

$$I = \frac{1}{2}\rho c V_{ma}^2 .$$

On donne pour la dune Al-Wagan :

- $\rho = 1{,}1\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$,
- $c = 340\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Q57. En déduire pour cette dune la valeur de sa puissance sonore en dB définie par $L_{dB} = 10 \times \log\frac{I}{I_0}$,

avec $I_0 = 10^{-12}\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ l'intensité sonore de référence.
Commenter sachant que la puissance sonore d'un TGV lancé à pleine vitesse est autour de 110 dB à quelques mètres du train.

La **figure 21** fournit le spectre sonore de la dune Cerro Bramador (qui signifie d'ailleurs " colline rugissante " en espagnol…) :

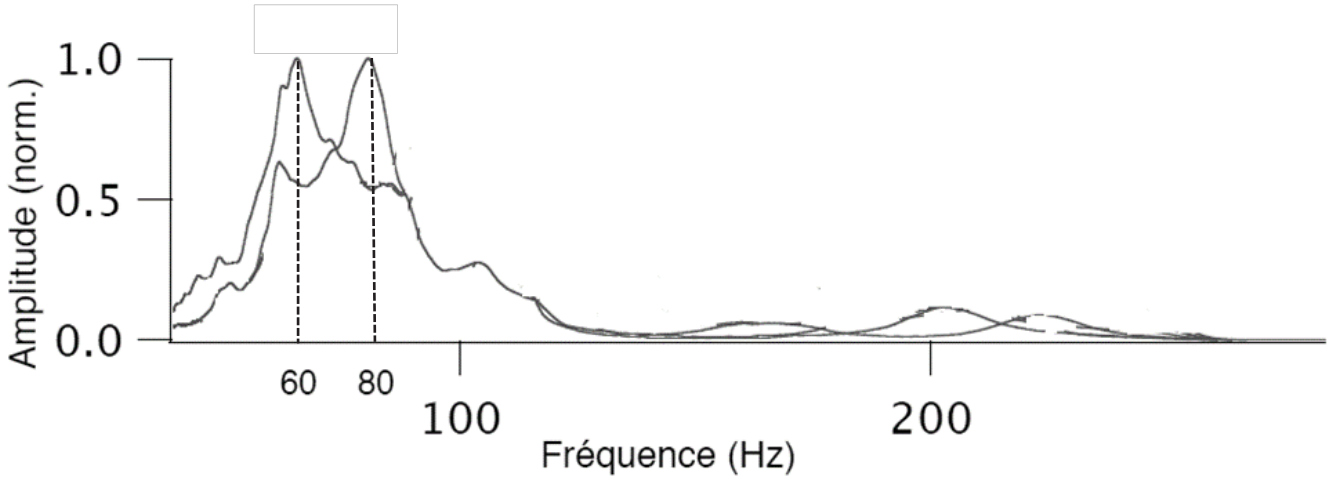


Figure 21 - Spectre de l'onde sonore générée par la dune Cerro Bramador au Chili

Le sable du désert chilien contient essentiellement deux types de grains :

type de grain	masse volumique μ (en kg.m^{-3})	forme
minerai de fer	5 000	petit
felspath	2 600	gros

Q58. Déterminer, à l'aide du modèle simple de la **question Q51** et du spectre de la **figure 21**, les diamètres d_1 et d_2 des grains responsables du chant de la dune Cerro Bramador. Relier chaque diamètre à un type de grain.

Q59. Calculer le produit $\kappa = \mu\, d$ pour chaque type de grain. Commenter en rapport à la **question Q34**.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 24 1117 – D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de TPC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Équations différentielles linéaires du premier ordre
- Grandeurs, unités, analyse dimensionnelle et ordres de grandeur
- Propagation d'un signal

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/tpc