Concours Commun INP (CCINP), France

# Session 2025, filière TPC

## Mathématiques

Durée : 4 heures

### Ce que traite le sujet

- Exercice 1 : probabilité d'extinction d'une espèce
- Exercice 2 : matrices symétriques et antisymétriques
- Exercice 3, partie I : résultats préliminaires
- Exercice 3, partie II : suite d'intégrales et intégrale généralisée

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/tpc/2025/maths

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

# ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TPC

# MATHÉMATIQUES

**Durée : 4 heures**

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

***RAPPEL DES CONSIGNES***

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

---

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de trois exercices indépendants.**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer leurs réponses.

# EXERCICE 1

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Dans tout l'exercice, $p$ désigne un réel de $]0;1[$ et on pose $q = 1 - p$.

## Partie I - Résultats préliminaires

**Q1.** Rappeler le développement en série entière de $\frac{1}{1-x}$ pour $x \in \mathbb{R}$, en précisant son intervalle de validité.

Soit $x \in [0,1[$ , calculer les sommes $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}$ et $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2}$.

On considère une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}([X = k]) = q^k p = (1-p)^k p$$

**Q2.** À l'aide de la question **Q1**, montrer que $X$ possède une espérance et une variance et les calculer.

**Q3.** On se propose d'établir les résultats de la question **Q2** par une autre méthode.

**a)** On pose $Y = X + 1$. Montrer que $Y$ suit une loi géométrique.
Rappeler les expressions de $E(Y)$ et de $V(Y)$.

**b)** Retrouver que $X$ admet une espérance et une variance.

## Partie II - Étude de la probabilité d'extinction d'une espèce

Une variété annuelle de plante produit un certain nombre $k$ de graines avant de mourir avec $k \in \mathbb{N}$.

- Si $k = 0$, la plante n'a aucun descendant. L'espèce est donc éteinte l'année suivante.
- Si $k \geq 1$, l'année suivante chaque graine germe à coup sûr et donne une nouvelle plante. Chacune de ces nouvelles plantes produit de la même façon un certain nombre de graines avant de mourir.
- On suppose que les différentes plantes d'une même génération produisent chacune un nombre de graines suivant la même loi que la variable $X$ de la **partie I**, ceci indépendamment les unes des autres. Ainsi, par exemple, s'il y a $k$ plantes à une génération donnée, le nombre de graines produit par une plante donnée est indépendant du comportement des autres plantes.

*On cherche à étudier la probabilité d'extinction de l'espèce en fonction de $p$ .*
*On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $Z_n$ la variable aléatoire égale au nombre de plantes vivantes à la génération $n$.*
*On suppose qu'à la génération $n = 0$, il n'y a qu'une seule plante ; ainsi $Z_0 = 1$.*
*On remarque que $Z_1$ suit la même loi que $X$.*
*On définit, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, la probabilité $u_n$ qu'à la génération $n$ il n'y ait plus de plantes :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n = \mathbf{P}([Z_n = 0])$$

*On note $E$ l'événement : " l'espèce finit par s'éteindre ".*

**Q4.** **a)** Préciser les valeurs de $u_0 = \mathbf{P}([Z_0 = 0])$ et de $u_1 = \mathbf{P}([Z_1 = 0])$.

**b)** Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

**c)** Justifier que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on a $[Z_n = 0] \subset [Z_{n+1} = 0]$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, puis qu'elle converge.

Dans la suite de l'exercice, on note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et on admet que $\mathbf{P}(E) = \ell$.

**Q5.** **a)** **(i)** Sans calculs, justifier que $\mathbf{P}_{[Z_1=1]}([Z_2 = 0]) = u_1$.

**(ii)** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $Z_1 = k$ et on note $X_1, \cdots, X_k$ les nombres de descendants respectifs de chacune des plantes de la génération 1. Montrer que :

$$\mathbf{P}_{[Z_1=k]}([Z_2 = 0]) = (u_1)^k$$

On admet le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}_{[Z_1=k]}([Z_{n+1} = 0]) = (u_n)^k$$

**b)** À l'aide de la formule des probabilités totales et d'un système complet d'événements lié à $Z_1$, en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (u_n)^k\, \mathbf{P}([Z_1 = k])$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{p}{1 - q\,u_n}$$

On cherche maintenant à déterminer la limite $\ell$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Q6.** **a)** Déduire de la question précédente que la limite $\ell$ vérifie la relation :

$$(\ell - 1)(q\ell - p) = 0$$

En déduire les valeurs que peut prendre la limite $\ell$.

**b)** On suppose que $p \geqslant \frac{1}{2}$. Montrer que : $\mathbf{P}(E) = 1$.
Que peut-on, dans ce cas, en déduire des chances de survie de l'espèce à long terme ?

**c)** On suppose que $p < \frac{1}{2}$. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[0; \frac{p}{q}\right]$.
En déduire que $\mathbf{P}(E) < 1$.

**d)** Que peut-on en déduire du nombre moyen de descendants par plante lorsque l'espèce a une chance de survie à long terme ?

# EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \geq 2$ et on note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels.
Si $M$ est une matrice de $E$, on note $M^T$ la matrice transposée de $M$.

On rappelle la définition des ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ :

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in E\,;\, M^T = M\} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in E\,;\, M^T = -M\}$$

On note $B$ et $C$ les matrices :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que $B$ et $C$ vérifient la relation : $C = B^T$.

## Partie I - Étude de la matrice $B$

**Q7.** **a)** Déterminer $\ker(B)$.

**b)** Montrer que $B$ est diagonalisable.

**c)** Déterminer une matrice $D$ diagonale et une matrice $P$ inversible vérifiant $B = PDP^{-1}$.

**Q8.** **a)** Montrer que $B$ et $C$ sont des matrices semblables.

**b)** Déterminer l'expression en fonction de $P$ et de $P^T$, d'une matrice inversible $R$ telle que :

$$C = R^{-1}BR$$

**Q9.** L'objectif de cette question est de déterminer toutes les matrices $M$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ solutions de l'équation $M^2 = B$.
On pose $N = P^{-1}MP$, où $P$ est la matrice déterminée dans la question **Q7**.

**a)** Montrer que $M^2 = B \iff N^2 = D$.

**b)** Soit $N$ vérifiant $N^2 = D$. Montrer que $ND = DN$.
Déterminer les matrices $N$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant l'équation $ND = DN$.
En déduire les solutions de l'équation $N^2 = D$.

**c)** Résoudre l'équation $M^2 = B$, les expressions des solutions seront données en fonction des solutions de $N^2 = D$ et de $P$. Combien obtient-on de solutions ?

## Partie II - Étude d'endomorphismes de $E$

**Q10.** Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$.

**Q11.** On veut démontrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $E$.

**a)** Soit $M \in E$. On veut déterminer $U \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = U + V$.
Établir un système d'équations vérifiées par $U$, $V$, $U^T$ et $V^T$. En déduire les expressions de $U$ et de $V$ en fonction de $M$ et de $M^T$.
Vérifier que les matrices $U$ et $V$ ainsi obtenues appartiennent respectivement à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

**b)** Montrer que $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

**c)** En déduire une relation entre les dimensions de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

**Q12.** On considère l'endomorphisme $\varphi$ défini par :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \longrightarrow & E \\ & M & \longmapsto & M^T \end{array}$$

**a)** Que vaut $\varphi \circ \varphi$ ? Que peut-on en déduire pour les valeurs propres de $\varphi$ ?

**b)** L'endomorphisme $\varphi$ est-il bijectif ?

**c)** Déterminer les sous-espaces propres de $\varphi$.

**d)** L'endomorphisme $\varphi$ est-il diagonalisable ?

**Q13.** Soit $a \in \mathbb{R}$ et l'application $f_a$ telle que :

$$\begin{array}{rccc} f_a : & E & \longrightarrow & E \\ & M & \longmapsto & M + a\,M^T \end{array}$$

**a)** Montrer que $f_a$ est un endomorphisme de $E$.

**b)** On rappelle que $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Soit $\mathcal{B}$ une base de $E$ adaptée à cette somme directe, déterminer la forme de la matrice de $f_a$ dans $\mathcal{B}$.

**c)** Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, l'endomorphisme $f_a$ est-il bijectif ?

**d)** L'endomorphisme $f_a$ est-il diagonalisable ?

**Q14.** Étude d'un cas particulier
On considère dans cette question que $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $a = 1$. On note $f : M \mapsto M + M^T$.
Soit $S = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 1 & 12 & -1 \\ -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

**a)** Déterminer la dimension de $\ker(f)$ et le rang de $f$.

**b)** Montrer que $S$ appartient à $\mathrm{Im}\,(f)$.

**c)** Résoudre l'équation $f(M) = S$ d'inconnue $M \in E$.

# EXERCICE 3

## Partie I - Résultats préliminaires

**Q15.** *Questions de cours*

**a)** Donner le développement en série entière de $\cos x$ et préciser le rayon de convergence de cette série. Aucune justification n'est attendue dans la réponse.

**b)** Soit $(a_n)$ une suite réelle à termes positifs. La série $\sum(-1)^n a_n$ est appelée série alternée. Énoncer le théorème de convergence des séries alternées.

**Q16.** Dans cette question, on va établir une propriété utile dans l'étude des séries alternées.

Soit $(a_n)$ une suite décroissante qui converge vers 0. On considère la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$.

On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de cette série. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$$

**a)** Montrer que $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes.
En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leq \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k \leq S_{2n}$$

**b)** Soit $N \in \mathbb{N}$, on note :

$$R_N = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n - S_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty}(-1)^n a_n$$

Montrer que :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \left|R_N\right| \leq a_{N+1}$$

On pourra utiliser le résultat de la question **Q16a** et considérer les cas $N = 2p$, puis $N = 2p+1$ c'est-à-dire $N$ pair, puis $N$ impair.

On admet que si les hypothèses du théorème de convergence des séries alternées sont vérifiées à partir d'un rang $N_0$ avec $N_0 \in \mathbb{N}$, alors la suite des restes $(R_n)$ vérifie la propriété établie à la question **Q16b** à partir du rang $N_0$, c'est-à-dire :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ N \geq N_0 \Longrightarrow \left|R_N\right| \leq a_{N+1}$$

## Partie II - Étude d'une suite d'intégrales, calcul d'une intégrale généralisée

On définit la suite d'intégrales $(I_n)$ telle que, pour $n \in \mathbb{N}$ :

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2/2} dt$$

et on admet que $I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

On définit également pour tout $x$ réel l'intégrale généralisée :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} \cos(xt) \mathrm{d}t$$

**Q17.** **a)** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Calculer :

$$\lim_{t \to +\infty} t^{2n+2} e^{-t^2/2}$$

**b)** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n$ converge.

**Q18.** **a)** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = (2n-1) I_{n-1}$.

**b)** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$I_n = \frac{(2n)!}{2^n n!} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

**Q19.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale généralisée $F(x)$ est convergente.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

**Q20.** Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq N_0,\ u_{n+1} - u_n \leq 0$.

On considère désormais la série alternée $\sum_{n \geq N_0} (-1)^n u_n$.

**Q21.** À l'aide des résultats des questions **Q16** et **Q20**, montrer que pour tout entier $N \geq N_0$, on a :

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n u_n \right| \leq \frac{x^{2N+2}}{(2N+2)!}$$

**Q22.** À l'aide de la question **Q21**, établir que pour tout entier $N \geq N_0$, on a :

$$\left| F(x) - \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} I_n \right| \leq \frac{x^{2N+2}}{(2N+2)!} \int_0^{+\infty} t^{2N+2} e^{-t^2/2} \mathrm{d}t$$

**Q23.** À l'aide des questions **Q18** et **Q22**, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} I_n$$

**Q24.** Montrer que $F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-x^2/2}$.

**FIN**



IMPRIMERIE NATIONALE – 25 1068 – D'après documents fournis

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de TPC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Séries numériques et vectorielles
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Compléments d'algèbre linéaire
- Intégration sur un intervalle quelconque

## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/tpc