Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2001, filière TSI

Mathématiques 1

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Préliminaires : développement en série de Fourier de cos(ax)
- Partie I : l'opérateur différence sur l'espace des suites
- Partie II : les fonctions Gamma et Psi d'Euler
- Partie III : formule des compléments
- Conclusion : retour à la somme de la série

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/tsi/2001/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

MATHÉMATIQUES 1

DURÉE : 4 heures

L'usage des calculatrices programmables et alphanumériques est autorisé sous réserve des dispositions définies dans la circulaire n° 99-186 du 16.11.99.

Il est rappelé aux candidats qu'il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction des copies.

Dans tout le problème, α désigne un réel de l'intervalle $]0;1[$. Lorsque cela a un sens, on pose $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{1}{\tan x}$.

Préliminaires

1 : Soit f la fonction 2π-périodique qui coïncide sur $]-\pi;\pi]$ avec $x \mapsto \cos(\alpha x)$. Montrer qu'elle est développable en série de Fourier, puis donner son développement (on pourra linéariser le produit $\cos p \cos q$).

2 : En considérant $f(\pi)$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2-\alpha^2}$ converge, et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha}\cot(\alpha\pi).$$

Pourtant, à l'instruction :

sum(1/(k^2-α^2),k=**1..infinity**).

Le logiciel de calcul formel MAPLE retourne la formule apparemment compliquée :

$$\frac{1}{2\alpha}\left(\Psi(1+\alpha) - \Psi(1-\alpha)\right).$$

Seules des options spécifiques de MAPLE permettraient de transformer cette formule. On observe des phénomènes analogues sur MATHEMATICA.

L'objet de ce problème est d'éclaircir ce comportement inattendu. Après l'étude d'un endomorphisme sur l'espace des suites, la fonction Ψ est définie en partie **II**. Les parties **I**, **II** et **III** sont indépendantes.

I L'opérateur différence Δ

On désigne par E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}^*$. On notera u_n le terme général d'une suite $u=(u_n)_{n\geq 1}$ de E. A toute suite u de E, on associe la suite $\Delta(u)$ définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad [\Delta(u)]_n = u_{n+1} - u_n .$$

Par exemple, pour la suite arithmétique $(A_n)_{n\geq 1} = (n)_{\geq 1}$, on a $[\Delta(A)]_n = A_{n+1} - A_n = (n+1) - n = 1$. La suite $\Delta(A)$ est ici la suite constante de valeur 1.

1 : Un autre exemple : On définit la suite dite harmonique H par $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \geq 1$. Déterminer $\Delta(H)$.

2 : a) Montrer que Δ définit un endomorphisme de E.

b) Soient u une suite de E et a un réel. Montrer qu'il existe une unique suite U de E satisfaisant

$$\Delta(U) = u \text{ et } U_1 = a$$

et donner une expression de U_n en fonction de a et de termes successifs de la suite u.

c) En utilisant ce résultat, préciser ce que sont respectivement $\mathrm{Im}(\Delta)$ et $\mathrm{Ker}(\Delta)$, et en déduire que la dimension de E est infinie.

3 : Soient u et v deux suites de E. Montrer la formule, dite de sommation par parties, valable pour tous p et q dans $\mathbb{N}^*$ avec $q > p$:

$$\sum_{k=p}^{q-1} [\Delta(u)]_k v_k = [u_q v_q - u_p v_p] - \sum_{k=p}^{q-1} u_{k+1} [\Delta(v)]_k .$$

4 : *Application* : Calculer la somme $\sum_{k=1}^{n-1} H_k$ en fonction de n et de H_n pour $n \geq 2$.

II Les fonctions Γ et Ψ d'Euler

1 : Justifier que $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ existe et que $\Gamma(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

2 : Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, la relation valable pour tout réel $x > 0$:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

En déduire que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3 : a) Soient a et b deux réels avec $0 < a < b$, et $t > 0$.

Déterminer $\max(t^{a-1}, t^{b-1})$ selon la valeur de t. Montrer que, pour tout $t > 0$ et tout $x \in [a;b]$:

$$0 \leq t^{x-1} \leq \max(t^{a-1}, t^{b-1}).$$

b) En déduire que Γ est de classe C^2, d'abord sur tout segment $[a;b]$, puis sur $\mathbb{R}_+^*$, et donner les expressions intégrales de Γ' et Γ''.

4 : On pose $\Psi(x)=\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ pour tout $x>0$. Vérifier que, pour tout $x>0$:

$$\ln(\Gamma(x+1))-\ln(\Gamma(x))=\ln x\,.$$

Quelle relation différentielle très simple relie les applications $\ln(\Gamma)$ et Ψ sur $\mathbb{R}_+^*$? En déduire que, pour tout $x>0$:

$$\Psi(x+1)-\Psi(x)=\frac{1}{x}.$$

Déterminer alors $\Delta\left(\left(\Psi(n+\alpha)\right)_{n\geq 1}\right)$ et $\Delta\left(\left(\Psi(n-\alpha)\right)_{n\geq 1}\right)$.

III Formule des compléments

1 : Montrer que pour tout $x\in\,]0;1[$, l'intégrale $I(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^{2x-1}\theta\,d\theta$ converge. *On admet que sa valeur est* $\dfrac{\pi}{2\sin(\pi x)}$.

2 : Soit x donné dans $]0;1[$. On définit la fonction de deux variables $h(u,v)=\left(\dfrac{v}{u}\right)^{2x-1}e^{-(u^2+v^2)}$ où (u,v) appartient au quart de plan $u>0$ et $v>0$. On pose : $F(a,b)=\iint_{C(a,b)}h(u,v)dudv$ et $G(\rho,\varphi)=\iint_{S(\rho,\varphi)}h(u,v)dudv$ où :

- $0<a<b$ et $C(a,b)$ est le carré limité par les quatre droites d'équations cartésiennes : $u=a$, $u=b$, $v=a$ et $v=b$.
- $1<\rho$ et $0<\varphi<\dfrac{\pi}{4}$ et $S(\rho,\varphi)$ est le secteur du quart de plan supérieur droit bordé extérieurement par les deux cercles centrés en O et de rayons respectifs $\dfrac{1}{\rho}$ et ρ, et les deux droites passant par O et d'angles polaires respectifs φ et $\dfrac{\pi}{2}-\varphi$.

Faire un dessin de C, puis un dessin de S dans un plan rapporté à un repère orthonormé.

3 : Transformer $G(\rho,\varphi)$ en utilisant les coordonnées polaires. En déduire $\lim\limits_{\rho\to+\infty}\left(\lim\limits_{\varphi\to 0}G(\rho,\varphi)\right)$.

4 : Montrer que : $\lim\limits_{\rho\to+\infty}\left(F\left(\dfrac{1}{\rho\sqrt{2}},\dfrac{\rho}{\sqrt{2}}\right)\right)=\dfrac{1}{4}\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\lim\limits_{\rho\to+\infty}\left(\lim\limits_{\varphi\to 0}F\left(\dfrac{\sin\varphi}{\rho},\rho\right)\right)$ (on pourra poser $\mu=u^2$ et $V=v^2$).

5 : Soit ρ donné, $\rho > 0$. Justifier les inclusions : $C\left(\frac{1}{\rho\sqrt{2}}, \frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) \subset S(\rho,\varphi) \subset C\left(\frac{\sin\varphi}{\rho}, \rho\right)$ pour φ suffisamment petit (on s'aidera d'un dessin). Quelles inégalités en résultent pour les intégrales $F\left(\frac{1}{\rho\sqrt{2}}, \frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)$, $G(\rho,\varphi)$ et $F\left(\frac{\sin\varphi}{\rho}, \rho\right)$?

6 : En déduire la formule, dite des compléments, valable pour tout $x \in]0;1[$:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Conclusion

1 : Montrer que pour tout $x \in]0;1[$:

$$\Psi(1-x) - \Psi(x) = \pi\cot(\pi x).$$

2 : a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle : $\frac{1}{X^2-\alpha^2}$.

b) Montrer que, pour tout $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha}(\Psi(1+\alpha) - \Psi(1-\alpha)) + \frac{1}{2\alpha}(\Psi(n+1-\alpha) - \Psi(n+1+\alpha)).$$

3 : a) Montrer que Ψ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (on utilisera l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales en reprenant les expressions de Γ' et Γ'' calculées en **II**).

b) En déduire que, pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq \Psi(n+1+\alpha) - \Psi(n+1-\alpha) \leq \Psi(n+2) - \Psi(n) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}.$$

4 : Conclure.

Fin de l'énoncé

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de TSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Séries de Fourier
- Séries numériques et vectorielles
- Nombres complexes et trigonométrie
- Compléments d'algèbre linéaire
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires
- Intégration sur un intervalle quelconque
- Techniques fondamentales de calcul en analyse
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/tsi