Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2005, filière TSI

Mathématiques 2

Ce que traite le sujet

- Partie I : la méthode des traces
- Partie II : mise en place de l'algorithme
- Partie III : trois exemples et une application

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie dont l'en-tête du concours (session, filière, épreuve, durée) est absent ; le contenu de l'énoncé correspond au corrigé de la même année et de la même épreuve.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/tsi/2005/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Les calculatrices sont autorisées

****

N.B. :Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Ce sujet présente la méthode des traces, algorithme de calcul itératif du polynôme caractéristique d'une matrice. Cette méthode fut utilisée par l'astronome français Urbain Le Verrier pour découvrir la planète Neptune en 1845.

Le principe de la méthode est expliqué en partie **I**. Le programme informatique qui s'en déduit est analysé en partie **II**. Trois exemples et une application concluent le problème, partie **III**. Les parties **II** et **III** sont indépendantes et pourront être traitées dans un ordre arbitraire.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2, et $M_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes. On notera I la matrice identité.

I. La méthode des traces

Soit une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$. On souhaite en calculer de façon systématique le polynôme caractéristique χ_A défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n\end{aligned}$$

où les coefficients $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ ont volontairement été indexés à rebours pour faciliter l'issue de la question **I.6** . Dans le cas général, deux difficultés se posent :

- Le développement du déterminant, qui doit être réalisé avec une complexité raisonnable.
- La collecte des coefficients à l'issue du développement.

Nous verrons en question **II.4 d/** que ces deux contraintes excluent d'office toute méthode de calcul récursif. Des méthodes plus appropriées ont donc été mises au point, dont la méthode des traces expliquée ci-après.

Tournez la page S.V.P

1. **a/** Que vaut a_0 ?

b/ Quelle hypothèse du problème et quel théorème du cours vous permettent - au moins d'un point de vue théorique - de factoriser $\chi_A(\lambda)$ sous la forme :

$$\chi_A(\lambda) = a_0 \cdot (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)...(\lambda - \lambda_n)$$

où les complexes λ_1, λ_2,…, λ_n sont les valeurs propres (non nécessairement distinctes) de A.

c/ Lorsque ces valeurs propres sont connues, elles permettent de remonter aux coefficients de χ_A. Expliquer comment pour les coefficients a_1 et a_n.

Malheureusement, les valeurs propres ne sont pas toujours connues avant le calcul du polynôme caractéristique. Plutôt que de relier les coefficients aux racines, on peut relier les coefficients à des sommes de puissances de valeurs propres, grâce à des formules de Newton (question **I.7**) : c'est la méthode des traces.

2. Le polynôme caractéristique χ_A étant scindé, on rappelle qu'il est possible de trigonaliser A. Il existe une matrice T triangulaire semblable à A dont les coefficients diagonaux sont précisément λ_1, λ_2,…, λ_n. Exprimer en fonction de $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n$ les traces de T^p puis de A^p pour tout entier naturel p.

3. On note χ'_A la dérivée de χ_A. Établir l'identité :

$$\frac{\chi'_A(\lambda)}{\chi_A(\lambda)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda - \lambda_k}$$

4. En déduire que, pour λ assez grand en module :

$$\frac{\chi'_A(\lambda)}{\chi_A(\lambda)} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda} \right)^p$$

On fournira un minorant strict m de $|\lambda|$ le plus précis possible.

5. En conclure que, pour $|\lambda| > m$:

$$\frac{\chi'_A(\lambda)}{\chi_A(\lambda)} = \frac{1}{\lambda} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{tr}(A^p)}{\lambda^p}$$

6. Démontrer alors que, pour λ assez petit en module, on a :

$$n.a_0 + (n-1).a_1.\lambda + ... + 1.a_{n-1}\lambda^{n-1} = \left(a_0 + a_1.\lambda + ... + a_n.\lambda^n\right)\sum_{p=0}^{+\infty} tr(A^p)\,\lambda^p$$

On traitera le cas $\lambda = 0$ à part, et on fournira un majorant strict M de $|\lambda|$ le plus précis possible.

7. En déduire les relations de Newton, valables pour tout k, $1 \le k \le n$:

$$-ka_k = a_0.tr\left(A^k\right) + a_1.tr\left(A^{k-1}\right) + ... + a_{k-1}tr(A)$$

8. Expliquer sommairement en quoi ces relations permettent d'obtenir le polynôme caractéristique χ_A. Restent-elles valables lorsque $A \in M_n(\mathbb{R})$?

II. Mise en place de l'algorithme

Dans cette partie, on s'intéresse à la mise en œuvre pratique de l'algorithme des traces et on en évalue les performances en termes de complexité. Cette partie en appelle à l'expérience du candidat en matière de calcul formel : Maple, Mathematica, ou tout simplement le logiciel de sa calculatrice programmable. Dans tous les cas, indiquez sur la copie le langage utilisé.

Dire qu'un programme a une complexité de l'ordre de n^k (n et k entiers naturels non nuls) signifie que le nombre d'additions, de multiplications et de divisions élémentaires à réaliser est équivalent à $\alpha n^k (\alpha > 0)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Par exemple, un programme réalisant le produit de n complexes est d'une complexité de l'ordre de n. En revanche, un programme réalisant n fois un produit de n complexes est d'une complexité de l'ordre de n^2.

1. Les logiciels de calcul formel sont souvent livrés avec une fonction permettant de multiplier deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. Sans reprogrammer cette fonction, indiquer sa complexité.

2. Les logiciels de calcul formel sont souvent livrés avec une fonction permettant de calculer la trace d'une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. Sans reprogrammer cette fonction, indiquer sa complexité.

3.

Tournez la page S.V.P

a/ On suppose la matrice A et l'entier n connus du logiciel. Rédiger la partie de programme réalisant le stockage des traces $\mathrm{tr}\left(A^1\right)$, $\mathrm{tr}\left(A^2\right)$, …, $\mathrm{tr}\left(A^n\right)$ dans un tableau t, de sorte que $t[k]$ contienne $\mathrm{tr}\left(A^k\right)$ pour k variant de 1 à n.

b/ En général, la complexité d'un tel programme peut varier de n^4 à n^5 selon la manière dont on s'y prend. Quelle est la complexité du programme conçu en réponse au **a/** (justifier) ?

4.

a/ On suppose désormais la matrice A, l'entier n et le tableau t connus du logiciel. Rédiger la partie du programme réalisant le stockage des coefficients $a_0, a_1, \ldots a_n$, dans un tableau a, de sorte que $a[k]$ contienne a_k pour k variant de 0 à n.

b/ Que renseigne le dernier coefficient : a_n ?

c/ Quelle est la complexité totale de l'algorithme des traces (justifier) ?

d/ On revient maintenant à la méthode naïve évoquée au début du problème. Celle-ci consisterait en un développement récursif du déterminant caractéristique : développement du déterminant $n \times n$ par rapport à la première colonne, puis développement des sous-déterminants $(n-1)\times(n-1)$ par rapport à leur première colonne, etc. Quelle est la complexité de cette méthode (justifier) ? En quoi la collecte des coefficients pose-t-elle difficulté ? Conclure.

III. Trois exemples et une application

La validation d'un algorithme s'accompagne toujours de tests. On fait tourner le programme sur des exemples dont on connaît les résultats intermédiaires ou finaux. Puis on compare ce qui est attendu à ce qui est effectivement retourné. Les questions **1**, **2** et **3** de cette partie permettent d'élaborer de tels tests. La question **4** validera encore davantage cette étude, mais pour d'autres raisons.

Dans les trois premières questions de cette partie, on rapporte l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ à sa base canonique $B = \left(\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}\right)$. Dans la dernière question, on revient sur $\mathbb{C}$.

1. Exemple 1.

On définit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les conditions :

$$f\left(\overrightarrow{e_1}\right)=\overrightarrow{e_2}, f\left(\overrightarrow{e_2}\right)=\overrightarrow{e_3},...,f\left(\overrightarrow{e_{n-1}}\right)=\overrightarrow{e_n} \text{ et } f\left(\overrightarrow{e_n}\right)=\vec{0}.$$

a/ Pourquoi ces conditions définissent-elles f sans ambiguïté ? Déterminer la matrice A de f dans la base B , puis l'image, le rang et le noyau de f.

b/ Sans utiliser la méthode des traces, déterminer directement le polynôme caractéristique de f.

c/ Retrouver ce résultat en simulant la méthode des traces.

2. Exemple 2.

On définit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les conditions :

$$f\left(\overrightarrow{e_1}\right)=\overrightarrow{e_2}, f\left(\overrightarrow{e_2}\right)=\overrightarrow{e_3},...,f\left(\overrightarrow{e_{n-1}}\right)=\overrightarrow{e_n} \text{ et } f\left(\overrightarrow{e_n}\right)=\overrightarrow{e_1}.$$

Déterminer la matrice A de f dans la base B , puis l'image, le rang et le noyau de f. Sans utiliser la méthode des traces, déterminer directement le polynôme caractéristique de f. Retrouver ce résultat en simulant la méthode des traces.

3. Exemple 3.

On munit dans cette question $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.

a/ Soit $\vec{u}=(u_1,u_2,...,u_n)$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$. On définit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ comme étant la projection orthogonale sur la droite D engendrée par $\vec{u}$. Déterminer son image, son rang et son noyau. Sans utiliser la méthode des traces, déterminer directement le polynôme caractéristique de f (on choisira une base adaptée au problème).

b/ Déterminer la matrice A de f dans la base B en fonction des coefficients $u_1,u_2,...,u_n$. Justifier que $A^2 = A$. Retrouver le polynôme caractéristique de f en simulant la méthode des traces sur la matrice A.

Tournez la page S.V.P

4. Une application. On rétablit dans cette question un résultat classique de l'algèbre linéaire grâce - entre autres - à la méthode des traces.

a/ Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}\left(A^2\right) = ... = \mathrm{tr}\left(A^n\right) = 0$. Déterminer χ_A. En déduire que 0 est la seule valeur propre de A. Démontrer alors que $A^n = [0]$.

b/ Soit maintenant une matrice A de $M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A^n = [0]$. Prouver que 0 est valeur propre de A et qu'il n'y en a pas d'autre.

c/ En déduire l'équivalence, valable pour tout A de $M_n(\mathbb{C})$:

$$A^n = [0] \Leftrightarrow \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}\left(A^2\right) = ... = \mathrm{tr}\left(A^n\right) = 0$$

Fin de l'énoncé.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de TSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Séries entières
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires
- Déterminants
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Compléments d'algèbre linéaire

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/tsi