Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2006, filière TSI

Mathématiques 2

Durée : 3 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : deux équations différentielles
- Partie II : étude de f(x) = x - 1 - ln(x)
- Partie III : comparaison des moyennes
- Parties IV et V : la suite racine n-ième de n!

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/tsi/2006/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI

MATHEMATIQUES 2

Durée : 3 heures

Les calculatrices sont interdites

N.B. : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème

La partie I est indépendante de la suite du problème.

I) A) On considère l'équation différentielle $(E_1) : xy' - y = \ln(x)$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) a) Résoudre l'équation homogène associée.

b) Déterminer une solution particulière de l'équation complète.

c) Exprimer l'ensemble des solutions de l'équation (E_1).

2) Préciser la solution f de l'équation (E_1) telle que $f(1) = 0$.

B) On considère l'équation différentielle $(E_2) : x^2y'' - xy' + y = 1 - \ln(x)$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) a) Déterminer une solution de l'équation homogène associée de la forme $x \to x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Chercher une autre solution de l'équation homogène associée de la forme : $y(x) = K(x)x^\alpha$, en donnant à α la valeur trouvée à la question précédente. On montrera que K' vérifie une équation différentielle du premier ordre.

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

2) a) Vérifier que la fonction y_0 définie par $y_0(x) = -1 - \ln(x)$ est une solution particulière de l'équation (E_2).

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E_2).

3) Démontrer que la fonction f (définie à la question A) 2)) est l'unique solution de l'équation (E_2) telle que $f(1) = 0,\ f'(1) = 0$.

II) Étude de la fonction f.

1) f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = x - 1 - \ln(x)$.

a) Étudier les variations de la fonction f.

b) Étudier les branches infinies de f et construire une allure de la représentation graphique.

c) Déduire de l'étude des variations de f que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leq x - 1$.

2) a) Déterminer une primitive de la fonction f.

b) Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$ converge et la calculer.

c) Quelle est la nature de l'intégrale : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\ dx$?

III) Comparaison des moyennes.

$a_1,\ a_2, \cdots,\ a_n$ étant n nombres réels strictement positifs, on appelle moyenne arithmétique de ces nombres le nombre réel m_a défini par : $m_a = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$.

On appelle moyenne géométrique le nombre réel m_g défini par : $m_g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$.

On appelle moyenne harmonique le nombre réel m_h défini par : $m_h = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}$.

1) a) En appliquant l'inégalité montrée à la question II) 1) c) aux réels $\dfrac{a_i}{m_a}$, montrer que $m_g \leq m_a$.

b) Dans quel cas a-t-on $m_g = m_a$?

c) Démontrer que pour tout triplet (x, y, z) de réels, on a :

$$x^4y^2z^2 + x^2y^4z^2 + x^2y^2z^4 - 4x^2y^2z^2 + 1 \geq 0.$$

2) a) En appliquant l'inégalité vue en III) 1) a) aux réels $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}$, montrer que $m_h \leq m_g$?

b) Dans quels cas a-t-on $m_h = m_g$?

c) Déduire des questions précédentes que $m_h \leq m_a$.
En déduire que, pour tous nombres réels strictement positifs $x_1, \cdots, x_n$, on a :

$$(x_1 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$

IV) Applications.

1) Déduire de l'inégalité $m_g \leq m_a$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$.

2) a) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x}$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $\frac{n}{1+\ln(n)} \leq \sqrt[n]{n!}$.

3) a) En déduire la limite de $\sqrt[n]{n!}$ quand n tend vers l'infini.

b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ est bornée et en donner un encadrement à l'aide des questions précédentes.

4) a) Démontrer que la suite de terme général $\sqrt[n]{n!}$ est croissante (on pourra considérer la suite de terme général $\ln(\sqrt[n]{n!})$).

b) Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$?

V) Détermination d'un équivalent de $\sqrt[n]{n!}$.

1)a) k est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Déterminer un encadrement de $\ln(k)$ par deux intégrales de la fonction ln.

b) En déduire : $\displaystyle\int_1^n \ln(t)\ dt \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leq \int_1^{n+1} \ln(t)\ dt.$

c) En déduire un équivalent de $\sqrt[n]{n!}$ quand n tend vers l'infini.

2) Déterminer la nature des séries de termes généraux : $\dfrac{1}{(n!)^{1/n}}$ et $\dfrac{1}{(n!)^{2/n}}$.

Fin de l'énoncé

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de TSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Équations différentielles linéaires
- Techniques fondamentales de calcul en analyse
- Dérivabilité et convexité
- Intégration sur un intervalle quelconque
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires
- Nombres réels et suites numériques
- Séries numériques et vectorielles

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/tsi