Concours Commun INP (CCINP), France

# Session 2012, filière TSI

## Mathématiques 2

Durée : 3 heures

### Ce que traite le sujet

- Partie I : existence de F et de I
- Partie II : calcul de I par une intégrale à paramètre
- Partie III : calcul de I par une intégrale double
- Partie IV : développements en séries entières

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/tsi/2012/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

**EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI**

# MATHEMATIQUES 2

**Durée : 3 heures**

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

---

**Les calculatrices sont autorisées**

L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, ainsi que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ , appelée intégrale de Gauss.

Les différentes parties de ce problème sont largement indépendantes les unes des autres.

L'ensemble des nombres réels sera noté $\mathbf{R}$.

## Partie I : existence de $F$ et de $I$

Soit $f$ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par, pour tout $x$ de $[0,+\infty[$ , $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

**1. a.** Donner le tableau de variations de $f$. On fera figurer les limites en 0 et en $+\infty$.
**1. b.** Tracer la courbe représentative de $f$. On précisera la demi-tangente en (0,1) et l'asymptote.

**2.** Démontrer que $F$ est définie et de classe $C^1$ sur $[0,+\infty[$ et donner sa dérivée. On citera précisément le théorème utilisé.

**3.** Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.



**Tournez la page S.V.P.**

## Partie II : calcul de $I$ : première méthode

On pose, pour tout $x$ de $[0,+\infty[$, $G(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ .

**1.** Montrer que $G$ est bien définie et de classe $C^1$ sur $[0,+\infty[$. On pourra montrer que pour tout réel $a$ strictement positif, la restriction de $G$ à l'intervalle $[0,a]$ est de classe $C^1$.
Donner l'expression de $G'(x)$.

**2. a.** Montrer que la fonction $H = F^2 + G$ est constante. On pourra faire un changement de variable linéaire dans l'une des intégrales apparaissant dans la dérivée de $H$.

**2. b.** Calculer cette constante en considérant $x = 0$.

**3. a.** Montrer que, pour tout $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,1]$ : $0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$ .
En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$ .

**3. b.** Déduire de ce qui précède que $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

**4.** Étudier les variations de $F$ sur $[0,+\infty[$. Tracer sa courbe représentative en précisant la demi-tangente en (0,0) et l'asymptote.

## Partie III : calcul de $I$ : deuxième méthode

**1.** Si $R$ est un réel strictement positif, on note $D(R) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+,\ x^2+y^2 \leqslant R^2\right\}$ .
On pose : $J(R) = \displaystyle\iint_{D(R)} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ .
En utilisant un changement de variables en coordonnées polaires, montrer que :

$$J(R) = \frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-R^2}\right) .$$

**2.** Si $R$ est un réel strictement positif, on note $\Gamma(R)$ le carré $[0,R]\times[0,R]$.
Exprimer $K(R) = \displaystyle\iint_{\Gamma(R)} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en fonction de $F(R)$.

**3. a.** Représenter les trois ensembles $D(R)$, $\Gamma(R)$ et $D(\sqrt{2}\,R)$ sur un même croquis.

**3. b.** Montrer que pour tout $R$ strictement positif : $J(R) \leqslant K(R) \leqslant J(\sqrt{2}\,R)$.

**4.** En déduire que $K(R)$ admet une limite lorsque $R$ tend vers $+\infty$ et la déterminer.

**5.** Retrouver, grâce à ce qui précède, la valeur de $I$.

## Partie IV : développements en séries entières

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par, pour tout $x$ de $\mathbf{R}$, $g(x) = \mathrm{e}^{x^2} F(x)$.

Dans cette partie, on désire étudier le développement en série entière des fonctions $F$ et $g$.

**1. a.** Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière sur $\mathbf{R}$ de la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^u$.

**1. b.** En déduire que la fonction notée encore $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est développable en série entière sur $\mathbf{R}$, et donner son développement.

**2. a.** Montrer que $F$ est développable en série entière sur $\mathbf{R}$. On citera précisément le théorème utilisé.

**2. b.** Donner le développement en série entière de $F$ sur $\mathbf{R}$.

**3.** On s'intéresse maintenant à la fonction $g$ définie au début de cette partie.

On considère l'équation différentielle $(E)$ suivante : $y' - 2xy = 1$ .

On désire déterminer les solutions de $(E)$ développables en série entière et s'annulant en 0, puis en déduire que $g$ est développable en série entière sur $\mathbf{R}$.

**3. a.** Soit $\sum a_n\, x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, dont la somme sur l'intervalle $]-R, R[$ est notée $y$. En supposant que $y$ est solution de (E) sur l'intervalle $]-R, R[$ et que $a_0 = 0$, montrer que $a_1 = 1$ et que, pour tout $n \geqslant 1$ : $a_{n+1} = \dfrac{2}{n+1}\, a_{n-1}$ .

**3. b.** En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}\, n!}{(2n+1)!}$ .

**3. c.** Réciproquement, on considère la série entière $\sum \dfrac{2^{2n}\, n!}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$ . Calculer son rayon de convergence. En déduire que sa somme est solution de $(E)$ sur $\mathbf{R}$ et s'annule en 0.

**3. d.** Montrer que $g$ est solution de l'équation $(E)$ sur $\mathbf{R}$ et s'annule en 0.

**3. e.** Déduire de ce qui précède que $g$ est développable en série entière sur $\mathbf{R}$. Donner son développement. On citera précisément le théorème utilisé.

**Fin de l'énoncé**

IMPRIMERIE NATIONALE – 12 1251 – D'après documents fournis

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de TSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Intégration sur un intervalle quelconque
- Dérivabilité et convexité
- Techniques fondamentales de calcul en analyse
- Séries entières
- Équations différentielles linéaires

## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/tsi