Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2013, filière TSI

Mathématiques 2

Durée : 3 heures

Ce que traite le sujet

- Partie A : un arc de cercle apparent
- Partie B : un contour apparent d'une quadrique

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/tsi/2013/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI

MATHEMATIQUES 2

Durée : 3 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Les deux **parties A et B** de ce problème peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : un arc de cercle apparent

On se place dans un plan euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 et le point $\mathrm{A}(a, 0)$ où $a \in]1, +\infty[$.

On cherche l'ensemble des points du cercle $\mathcal{C}$ visibles du point A.

Définition : on dit qu'un point $\mathrm{M}(x, y)$ du cercle $\mathcal{C}$ est **visible** du point A lorsque pour tout $\mathrm{M}'(x', y')$, point d'intersection du cercle et de la droite (AM), on a : $x' \leqslant x$.

Sur la figure 1, l'ensemble des points du cercle visibles du point A *est en trait plein tandis que la partie non-visible du cercle est en pointillé. Les deux points distincts* M_1 *et* M_2 *d'abscisses respectives* x_1 *et* x_2 *sont sur le cercle* $\mathcal{C}$*. Les points* $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2$ *et* A *sont alignés. Le point* M_1 *est visible du point* A *car il n'y a pas d'autre point du cercle sur le segment* $[\mathrm{AM}_1]$ *alors que le point* M_2 *ne l'est pas car le point* M_1 *est sur le segment* $[\mathrm{AM}_2]$*, ce qui se vérifie par la condition :* $x_2 < x_1 < a$.

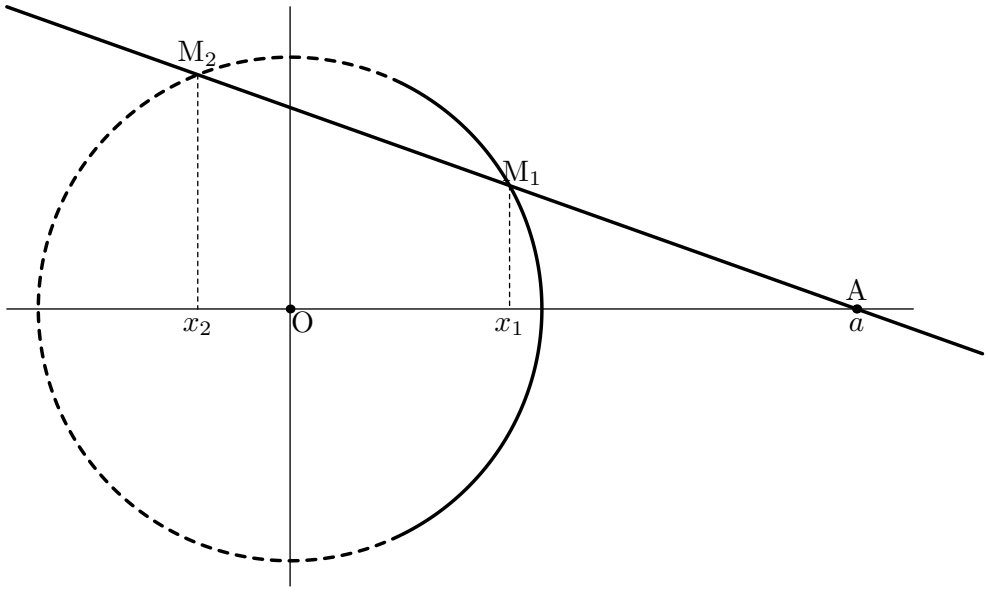


figure 1 : une illustration graphique

Pour $\theta \in \mathbf{R}$, on note $\mathrm{M}(\theta)$ le point de coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$.
De plus, on pose : $\omega = \mathrm{Arc}\cos\left(\dfrac{1}{a}\right)$.

1. Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Justifier que le point $\mathrm{M}(\theta)$ est sur le cercle $\mathcal{C}$.

2. (a) Justifier l'existence de ω et que : $\omega \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

(b) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OM}(\omega)}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AM}(\omega)}$, en fonction des réels a et ω.

(c) Exprimer a en fonction de ω.

(d) Établir que la droite $(\mathrm{AM}(\omega))$ est tangente au cercle $\mathcal{C}$.
On pourra utiliser un produit scalaire.

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x) - a}$.

3. (a) Montrer que cette fonction est bien définie sur $\mathbf{R}$ et est de classe $\mathcal{C}^1$.

(b) Étudier la parité de la fonction f.

(c) Soit $x \in \mathbf{R}$. Donner une expression de $f'(x)$ en fonction de a et de $\cos(x)$.

(d) En déduire que f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, \omega]$ et est strictement croissante sur l'intervalle $[\omega, \pi]$.

(e) Donner le tableau des variations de la fonction f sur $[-\pi, \pi]$.
On **ne** cherchera **pas** à calculer $f(\omega)$.

4. Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par A coupant le cercle $\mathcal{C}$ en au moins un point.
Montrer que $\mathcal{D}$ admet une équation de la forme : $y = m(x - a)$ où $m \in \mathbf{R}$.

Pour $m \in \mathbf{R}$, on note $\mathcal{D}_m$, la droite d'équation : $y = m(x - a)$.

5. Soit m et θ deux réels. Montrer que : $\mathrm{M}(\theta) \in \mathcal{D}_m$ si et seulement si $m = f(\theta)$.

6. Montrer que les points $\mathrm{M}(0)$ et $\mathrm{M}(\pi)$ sont sur la droite $\mathcal{D}_0$, puis après avoir comparé leurs abscisses, que le point $\mathrm{M}(0)$ est visible du point A alors que le point $\mathrm{M}(\pi)$ ne l'est pas.
On rappelle qu'un cercle et une droite se coupent en au plus deux points.

7. Soit deux réels θ_1 et θ_2 tels que : $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant \pi$ et $f(\theta_1) = f(\theta_2)$.

(a) Montrer que les points A, $\mathrm{M}(\theta_1)$ et $\mathrm{M}(\theta_2)$ sont alignés.

(b) Prouver que le point $\mathrm{M}(\theta_1)$ est visible du point A alors que le point $\mathrm{M}(\theta_2)$ ne l'est pas.

(c) Justifier brièvement que : $\theta_1 < \omega < \theta_2$.

8. Soit $\theta \in [0, \pi]$. Établir que :

(a) si $\theta \leqslant \omega$, alors le point $\mathrm{M}(\theta)$ est visible du point A.

(b) si $\omega < \theta$, alors le point $\mathrm{M}(\theta)$ n'est pas visible du point A.

9. Sans justification, donner des résultats analogues à la question précédente pour $\theta \in [-\pi, 0]$.

Partie B : un contour apparent d'une quadrique

On se place dans un espace euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
Soit la surface Σ d'équation : $3x^2 + y^2 - yz + z^2 = 1$.

On considère les matrices $\mathrm{S} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner les valeurs propres de la matrice S. On détaillera les calculs.

2. (a) Justifier, sans calcul, que l'on peut trouver une matrice diagonale $\mathrm{D} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et une matrice orthogonale $\Omega \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $\mathrm{D} = {}^t\Omega \mathrm{R} \Omega$ où ${}^t\Omega$ désigne la transposée de la matrice Ω.

(b) Donner une matrice diagonale D et une matrice orthogonale Ω telles que : $\mathrm{D} = {}^t\Omega \mathrm{R} \Omega$.
On pourra utiliser la calculatrice mais on explicitera la méthode utilisée.

3. En déduire la nature de la quadrique Σ.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation : $x = \dfrac{1}{3}$ et la courbe $\mathcal{E} = \mathcal{P} \cap \Sigma$, intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la surface Σ.

4. (a) Soit $\mathrm{M}(x, y, z)_{\mathcal{R}}$ un point de l'espace. Montrer que : $\mathrm{M} \in \mathcal{E} \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y^2 - yz + z^2 = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$

(b) Justifier que la courbe $\mathcal{E}$ est une conique et que dans un repère orthonormé du plan $\mathcal{P}$ noté $\left(\mathrm{O}', \overrightarrow{\mathrm{J}}, \overrightarrow{\mathrm{K}}\right)$, elle admet comme équation : $\dfrac{3\mathrm{Y}^2}{4} + \dfrac{9\mathrm{Z}^2}{4} = 1$.
On pourra utiliser la question **1** de la partie **B**. On **ne** cherchera **pas** à déterminer le point O' et les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{J}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{K}}$.

(c) Préciser la nature de la conique $\mathcal{E}$ et les coordonnées de ses sommets dans le repère $\left(\mathrm{O}', \overrightarrow{\mathrm{J}}, \overrightarrow{\mathrm{K}}\right)$ et représenter cette conique dans le plan $\mathcal{P}$ muni de ce repère.

On considère les points $\mathrm{A}(1,0,0)_{\mathcal{R}}$ et $\mathrm{N}(0,0,1)_{\mathcal{R}}$.

Définition : on dit qu'un point $\mathrm{M}(x,y,z)_{\mathcal{R}}$ de la surface Σ est **visible** du point A lorsque que pour tout $\mathrm{M}'(x',y',z')_{\mathcal{R}}$, point d'intersection de la surface Σ et de la droite (AM), on a : $x' \leqslant x$.

5. (a) Justifier que le point N est sur la surface Σ.

(b) Donner un système d'équations paramétriques de la droite (NA).

On pourra utiliser le point N et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{NA}}$ pour le paramétrage de cette droite.

(c) Donner les coordonnées des points d'intersection de la droite (NA) et de la surface Σ et en déduire que le point N n'est pas visible du point A.

On admet que la partie visible du point A *de la surface* Σ *est délimitée par une courbe constituée des points* M *tels que la droite* (AM) *soit tangente à la surface* Σ *en* M. *Cette courbe est le contour apparent conique de la surface* Σ *issu du point* A.

On note alors Γ l'ensemble des points M de la surface Σ tels que A appartienne au plan tangent à la surface Σ en M.

On considère la fonction φ définie sur $\mathbf{R}^3$ par : $\varphi(u,v,w) = 3u^2 + v^2 - vw + w^2 - 1$.

6. Soit $(u,v,w) \in \mathbf{R}^3$. Calculer $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\varphi(u,v,w)$.

7. On considère le point $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{\sqrt{2}}{3}, \dfrac{-\sqrt{2}}{3}\right)_{\mathcal{R}}$.

(a) Justifier que : $\mathrm{B} \in \Sigma$.

(b) On note Π_{B} le plan tangent en B à la surface Σ.

Établir que le plan Π_{B} admet comme équation : $2x + \sqrt{2}\,y - \sqrt{2}\,z = 2$.

On rappellera le lien entre le vecteur de coordonnées $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\varphi\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{\sqrt{2}}{3}, \dfrac{-\sqrt{2}}{3}\right)$ et ce plan.

(c) A-t-on : $\mathrm{A} \in \Pi_{\mathrm{B}}$? En déduire que : $\mathrm{B} \in \Gamma$.

8. Soit $\mathrm{T} \in \Sigma$, un point de coordonnées (u,v,w) dans le repère $\mathcal{R}$.

Établir que le plan tangent noté Π_{T} en T à la surface Σ admet comme équation :

$$6ux + (2v - w)y + (2w - v)z = 2.$$

9. Conclure que la courbe Γ est la conique $\mathcal{E}$.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 13 1175 – D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de TSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Dérivabilité et convexité
- Nombres complexes et trigonométrie
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/tsi