Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2021, filière TSI

Modélisation

Durée : 3 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : moteur Stirling double effet
- Partie II : étude d'un concentrateur solaire

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/tsi/2021/modelisation

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

MODÉLISATION

Durée : 3 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de deux parties qui peuvent être traitées indépendamment.

Si besoin, le candidat pourra admettre le résultat d'une question et l'utiliser dans les questions suivantes.

Étude d'un système dish-stirling

Présentation générale

Le support étudié (**figure 1**) est une unité de conversion d'énergie solaire en énergie électrique constituée principalement :

- d'un miroir parabolique (" dish " en anglais) qui concentre le rayonnement solaire sur un récepteur plan situé en son foyer ;
- d'un moteur à air chaud de type Stirling dont la source chaude est fournie par le récepteur précédent ;
- d'un générateur électrique entraîné par le moteur.

Un dispositif de poursuite (ou tracking) permet également d'orienter le miroir afin de suivre le mouvement du soleil.

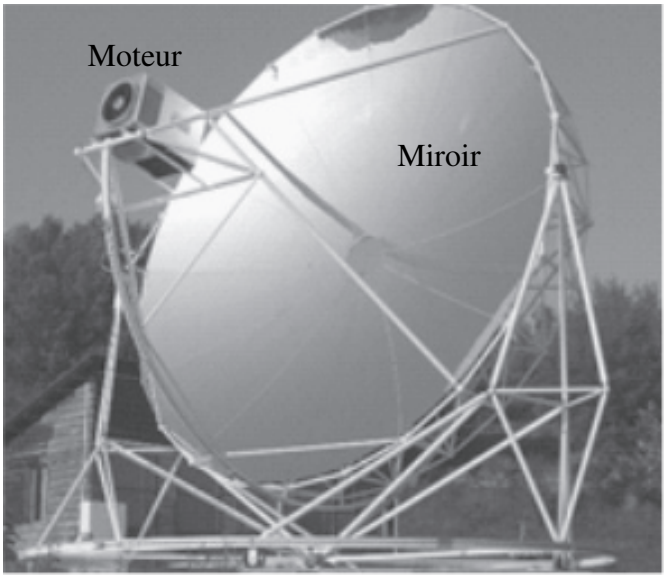


Figure 1 - Unité dish-stirling

Objectifs de l'étude

Dans la partie I du sujet, on présente un concept innovant de moteur Stirling dont on effectue ensuite une modélisation thermomécanique.

Dans la partie II, on propose de déterminer les caractéristiques géométriques et les performances optiques d'un miroir parabolique.

Partie I - Moteur Stirling " double effet " de type β

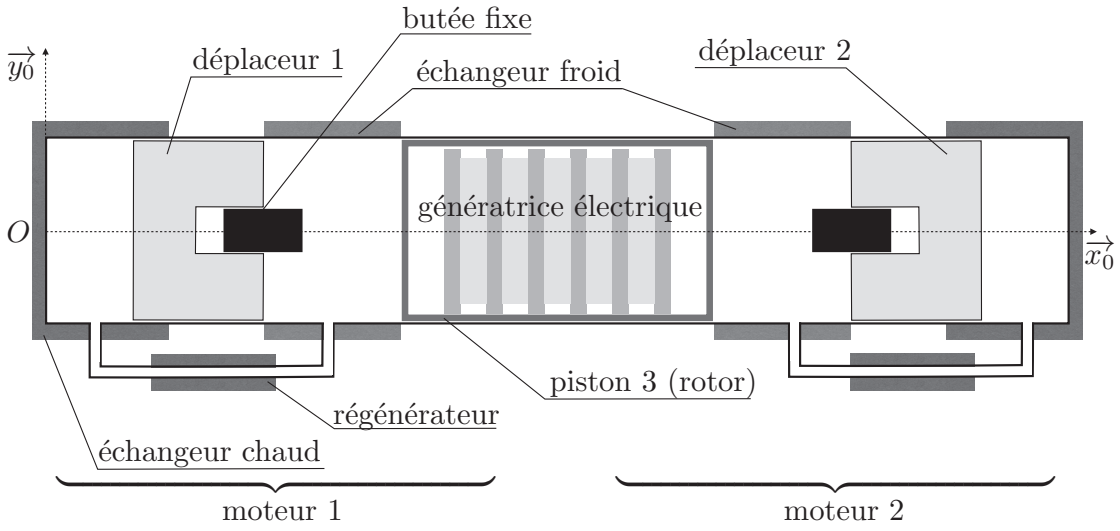


Figure 2 - Structure du moteur Stirling " double effet "

Le fonctionnement du moteur Stirling " double effet " (**figure 2**) est caractérisé par le travail en opposition de phase thermodynamique de ses deux moteurs Stirling β.

Chaque moteur est ainsi muni d'un déplaceur dont le mouvement résulte des échanges thermiques et des transferts de gaz entre les chambres froides et chaudes. Les variations de pression de chaque moteur permettent alors de mouvoir le piston 3 qui transforme cette énergie mécanique en énergie électrique via la génératrice électrique. Afin d'optimiser le rendement, il est important de faire fonctionner les deux moteurs en opposition de phase et donc de contrôler le déplacement du piston 3.

Ainsi, le moteur Stirling " double effet " évite une grande partie des pertes mécaniques liées au système d'entraînement, des usures et notamment des bruits engendrés par des liaisons mécaniques externes.

Le moteur Stirling à piston libre " double effet " présente les avantages suivants :

- la cinématique est réduite à l'extrême ; il n'y a que 3 solides en mouvement avec l'absence totale de liaisons mécaniques (ex. bielle, ressort...) ;
- la compacité du moteur Stirling " double effet " devrait permettre d'obtenir un meilleur rendement par rapport à des moteurs Stirling " simple effet ".

Néanmoins, cette technologie présente un certain nombre de défis :

- le fonctionnement en mode opposition de phase thermodynamique des deux moteurs élémentaires est difficile à maîtriser ;
- la position instantanée du piston 3 doit être maîtrisée par une commande dont la variable de commande est la force électromagnétique de la génératrice électrique ;
- les positions des deux déplaceurs 1 et 2 restent " libres " et résultent du couplage thermomécanique non-linéaire avec le piston 3.

I.1 - Modélisation de la chaîne thermomécanique

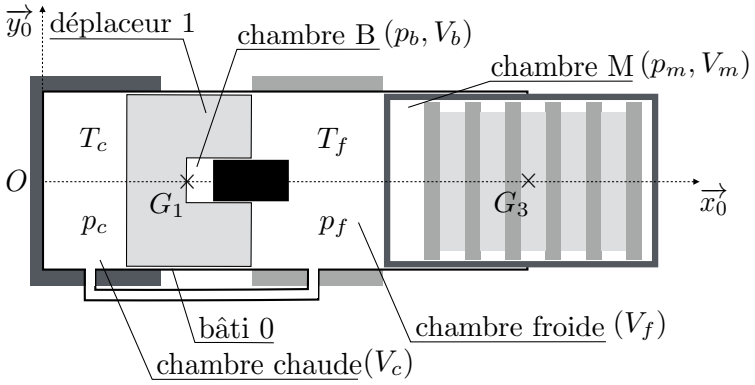


Figure 3 - Modèle thermomécanique du moteur 1

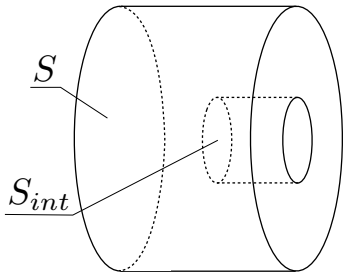


Figure 4 - Déplaceur seul

Notations et hypothèses associées au modèle :

- p_f, T_f et V_f sont respectivement la pression, la température et le volume de la chambre froide ;
- p_c, T_c et V_c sont respectivement la pression, la température et le volume de la chambre chaude ;
- p_b et V_b sont respectivement la pression et le volume de la chambre B ;
- p_m et V_m sont respectivement la pression et le volume de la chambre M ;
- $F_{gen}\overrightarrow{x_0}$ l'action de la génératrice sur le piston 3 ;
- $\mathcal{R}_0 = (O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ le repère lié au bâti ;
- les liaisons sont supposées parfaites et l'action de la pesanteur est supposée négligeable devant les autres actions mécaniques.

Modèle mécanique d'un moteur Stirling " libre "

Pour établir le modèle du moteur Stirling " double effet ", nous ne considérons tout d'abord que le moteur 1 (**figures 2** et **3**). Ce modèle sera par la suite complété par analogie avec le moteur 2. Le système présente alors deux pièces mobiles :

- le déplaceur 1 de masse m_1, de section S, de section interne S_{int} et de centre de gravité G_1. On note $\overrightarrow{OG_1} = (l_1 + x_1(t))\overrightarrow{x_0}$ avec l_1 la position de référence du déplaceur et $x_1(t)$ son déplacement par rapport à cette position de référence ;
- le piston 3 de masse m_3, de section S et de centre de gravité G_3. On note $\overrightarrow{OG_3} = (l_3 + x_3(t))\overrightarrow{x_0}$ avec l_3 la position de référence du piston et $x_3(t)$ son déplacement par rapport à cette position de référence.

Un premier principe fondamental de la dynamique appliqué au piston 3 dans le repère $\mathcal{R}_0$ a permis d'obtenir une première loi de mouvement pour le déplacement $x_3(t)$ du piston :

$$\ddot{x}_3(t) = \frac{1}{m_3}\Big(F_{gen}(t) + S \cdot (p_f(t) - p_m(t))\Big). \tag{1}$$

Q1. Étant donné la forme cylindrique du déplaceur 1 et du bâti 0 (**figures 3** et **4**), proposer une liaison cinématique pour modéliser le contact entre 1 et 0, lorsqu'il n'est pas en butée. Argumenter ce choix. Donner alors la forme du torseur des actions mécaniques $\{\mathcal{T}_{0\to1}\}$ dans la base $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$.

Q2. Réaliser le bilan des actions mécaniques s'exerçant sur le déplaceur 1 en prenant soin d'exprimer chaque torseur d'action mécanique en fonction des paramètres du système.

Q3. Quelle équation du principe fondamental de la dynamique permet d'obtenir la relation suivante :

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{1}{m_1}\left(S \cdot p_c(t) - (S - S_{int}) \cdot p_f(t) - S_{int} \cdot p_b(t)\right). \tag{2}$$

Modèle thermodynamique des gaz

Le modèle mécanique est étroitement couplé au modèle thermodynamique des gaz des chambres chaude $V_c(t)$ et froide $V_f(t)$. De plus, la quantité de gaz à l'intérieur de la chambre B est fixe. Il joue le rôle de " ressorts de rappel " pour le déplaceur 1. De la même façon, le gaz dans l'espace fermé de la chambre M fait office de ressort gazeux pour le piston 3.

On pose le paramétrage suivant pour définir les différents volumes gazeux du moteur (**figure 3**) :

- V_0 : volume de référence de la chambre froide et chaude ;
- chambre froide : volume $V_f(t) = V_0 - (S - S_{int}) \cdot x_1(t) + S \cdot x_3(t)$, de pression p_f et de température T_f ;
- chambre chaude : volume $V_c(t) = V_0 + S \cdot x_1(t)$, de pression p_c et de température T_c ;
- chambre adiabatique B : volume de référence V_b^0 et de pression de référence p_b^0 pour $x_1 = 0$;
- chambre adiabatique M : volume de référence V_m^0 et de pression de référence p_m^0 pour $x_3 = 0$.

On négligera le volume de gaz présent dans le régénérateur.

Modèle thermodynamique des chambres froide et chaude

On rappelle qu'un gaz parfait vérifie la relation :

$$p \cdot V = m \cdot r \cdot T \tag{3}$$

avec m la masse du gaz et r la capacité thermique massique du gaz. On note m_f la masse de gaz de la chambre froide et m_c, la masse de gaz de la chambre chaude. On supposera que la masse de gaz dans le régénérateur est négligeable.

Q4. On note ici m, la masse de l'ensemble des gaz du système : {chambre chaude, chambre froide, régénérateur}. Appliquer le principe de conservation de la masse et exprimer m en fonction de m_f et m_c, puis montrer que :

$$m \cdot r = p_f \frac{V_f}{T_f} + p_c \frac{V_c}{T_c}. \tag{4}$$

L'approche étudiée est la méthode de Schmidt qui est, en thermodynamique, une méthode d'ordre 1 très utilisée. Pour pouvoir utiliser cette méthode, on considère qu'en régime permanent :

- les variations des volumes sont sinusoïdales selon le temps, ce qui se traduit par :
  - $x_3(t) = x_3^0 \cos(\omega_0 t)$;
  - $x_1(t) = x_1^0 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$

  avec x_3^0, x_1^0 respectivement les amplitudes de la course du piston 3 et du déplaceur 1. On note ω_0 la pulsation des oscillations mécaniques et φ_1 le déphasage entre le mouvement du piston et du déplaceur 1 ;
- les étapes de détente et de compression sont considérées isothermes ;
- le gaz est idéal : pas de perte de charge ni de fuite.

Si toutes les conditions sont satisfaites, la pression instantanée du gaz de travail au sein du moteur est identique dans les deux chambres soit :

$$p(t) = p_c = p_f. \tag{5}$$

Q5. En utilisant les équations (4) et (5), exprimer $p(t)$ en fonction de m, r, V_f, T_f, V_c et T_c.

En prenant les expressions des volumes V_f et V_c définies précédemment, on montre que :

$$p(t) = \frac{m \cdot r}{A_0\left(1 + \frac{A_1}{A_0}x_1(t) + \frac{A_3}{A_0}x_3(t)\right)} \tag{6}$$

avec $A_0 = \frac{V_0}{T_c} + \frac{V_0}{T_f}$, $A_1 = \frac{S}{T_c} - \frac{S - S_{int}}{T_f}$ et $A_3 = \frac{S}{T_f}$.

Q6. En supposant de petits déplacements $x_1(t)$ et $x_3(t)$ tels que $\left|\frac{A_1}{A_0}x_1(t) + \frac{A_3}{A_0}x_3(t)\right| << 1$, réaliser un développement limité à l'ordre 1 de l'équation (6). On mettra le résultat sous la forme :

$$p(t) = p^0 - k_1 x_1(t) - k_2 x_3(t). \tag{7}$$

Préciser alors les expressions de p^0, k_1 et k_2 en fonction de m, r, A_0, A_1 et A_3.

Modèle thermodynamique des chambres adiabatiques B et M

Les chambres B et M subissent des transformations adiabatiques réversibles. Elles jouent le rôle de " ressorts gazeux " à l'intérieur du piston et du déplaceur 1. On a alors dans ces chambres :

$$p \cdot V^\gamma = cste \tag{8}$$

avec γ l'indice adiabatique du gaz.

Q7. Exprimer la pression instantanée du gaz $p_b(t)$ en fonction du volume instantané $V_b(t)$, de γ et des grandeurs de références p_b^0 et V_b^0.

Q8. Après avoir donné l'expression de $V_b(t)$ en fonction de $x_1(t)$ et des dimensions de la chambre B, exprimer p_b en fonction de V_b^0, p_b^0, γ, S_{int} et x_1.

Q9. Réaliser un développement limité à l'ordre 1 de l'expression pour des petits déplacements $x_1(t)$ tels que $\left|\frac{S_{int}x_1(t)}{V_b^0}\right| << 1$ et montrer que :

$$p_b(t) = p_b^0 - k_3 x_1(t). \tag{9}$$

Exprimer alors k_3 en fonction des dimensions de la chambre B.

Pour la chambre M, on obtient de façon analogue :

$$p_m(t) = p_m^0 - k_4 x_3(t). \tag{10}$$

Modèle thermomécanique du moteur Stirling " double effet "

Différentes sources de frottement (perte de charges, frottement visqueux/sec) sont également prises en compte dans le modèle. On peut alors rassembler les modèles mécaniques (équations (1) et (2)) avec les modèles thermodynamiques des différentes chambres (équations (7), (9) et (10)). Une étude analogue est également menée sur le deuxième moteur. Le modèle se résume à :

$$\ddot{x}_1(t) = K_{13}x_3(t) + K_{11}x_1(t) + D_{13}\dot{x}_3(t) + D_{11}\dot{x}_1(t)\,; \tag{11}$$

$$\ddot{x}_3(t) = K_{33}x_3(t) + 2K_{31}x_1(t) + D_{33}\dot{x}_3(t) + \frac{1}{m_3}F_{gen}(t), \tag{12}$$

où les coefficients K_{ij} et D_{ij} sont des constantes.

Q10. Réécrire le système d'équation (11) et (12) dans le domaine de Laplace. On supposera que les conditions de Heaviside sont respectées.

La fonction de transfert globale $H_{mot}(p) = \dfrac{X_3(p)}{F_{gen}(p)}$ du moteur Stirling " double effet " peut se mettre sous la forme :

$$H_{mot}(p) = K_{mot}\frac{1 + a_1 p + a_2 p^2}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3 + b_4 p^4}$$

où les coefficients K_{mot}, a_i et b_i s'expriment en fonction des coefficients K_{ij}, D_{ij} et m_3.

Q11. L'étude de $H_{mot}(p)$ permet de faire apparaître quatre pôles :

$$p_{1,2} = 20 \pm 178i \quad p_{3,4} = -113 \pm 173i.$$

Conclure sur la stabilité du système.

I.2 - Commande du moteur Stirling " double effet "

La variable de commande du modèle est la force électromagnétique instantanée. Les sorties du modèle sont les mouvements instantanés du piston. La force électromagnétique doit être asservie afin de stabiliser le moteur Stirling au point de fonctionnement nominal. On propose l'architecture suivante :

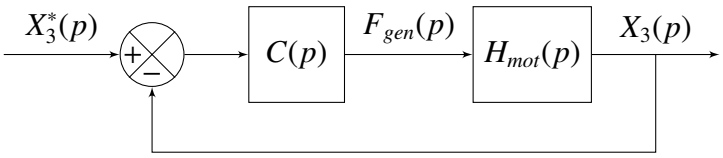


Figure 5 - Schéma-bloc de l'asservissement en position du piston

Le correcteur $C(p)$ présente une action intégrale et une double avance de phase, tel que :

$$C(p) = \frac{K_i}{p}\left(\frac{1 + T_2 p}{1 + T_1 p}\right)^2 \quad \text{avec} \quad T_2 > T_1.$$

Q12. Rappeler les avantages associés à ce correcteur.

Une simulation du système permet d'obtenir la réponse indicielle de $x_3(t)$ (pour un échelon unitaire $x_3^*(t)$) :

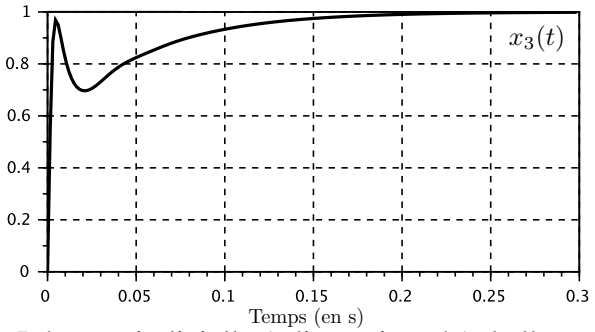


Figure 6 - Réponse indicielle (adimensionnée) de l'asservissement

Q13. Conclure sur la stabilité de l'asservissement. Puis estimer sa rapidité, sa précision et son amortissement.

Partie II - Étude d'un concentrateur solaire

Le rôle du miroir parabolique est de concentrer le rayonnement solaire au niveau du récepteur (ou absorbeur) du moteur afin d'obtenir une température élevée de la source chaude.

Dans la première sous-partie de l'étude, on justifie le choix d'une surface parabolique également nommée paraboloïde de révolution pour concentrer les rayons réfléchis.

Dans la deuxième sous-partie, on s'emploie à caractériser l'image du soleil, vu comme un disque lumineux, dans le plan focal du miroir.

Enfin la dernière sous-partie s'achève par une estimation de la puissance rayonnée (ou flux énergétique) reçue par l'absorbeur.

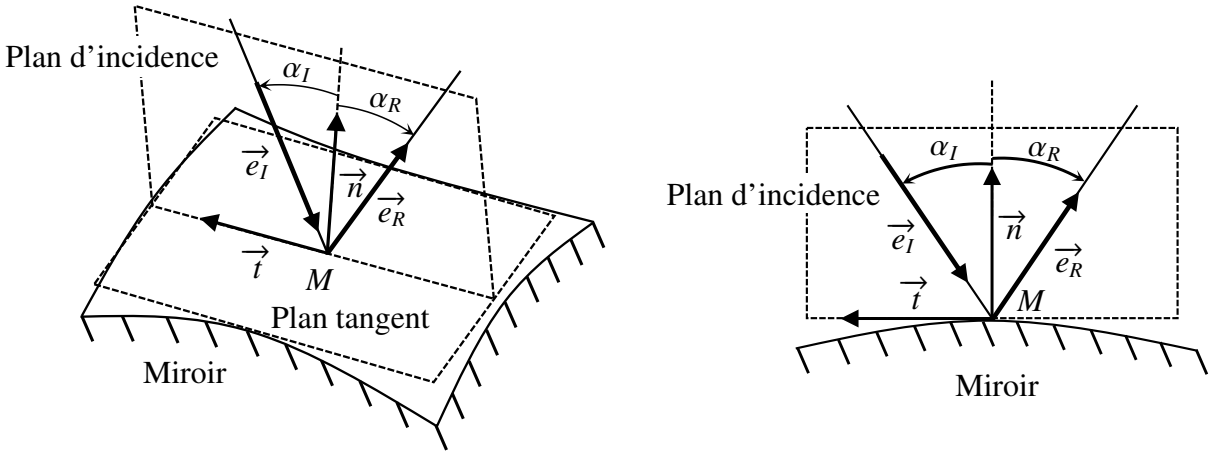
II.1 - Équation de la surface réfléchissante

On recherche une équation de la surface d'un miroir parfait (c'est-à-dire sans absorption) vérifiant la propriété que les rayons du soleil incidents parallèles à une direction donnée possèdent un point de concours après réflexion.

On considère ainsi un rayon lumineux dirigé selon le vecteur unitaire $\overrightarrow{e_I}$ et incident en un point M d'un miroir de surface régulière quelconque. Le rayon réfléchi est lui dirigé selon le vecteur $\overrightarrow{e_R}$ également unitaire.

On introduit le vecteur $\overrightarrow{n}$ normal au plan tangent à la surface en M et de même sens que $\overrightarrow{e_R}$. Le plan $\left(M, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{e_I}\right)$ est alors appelé plan d'incidence (choisi arbitrairement dans le cas où $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{e_I}$ sont colinéaires). Avec $\overrightarrow{t}$ vecteur directeur commun au plan d'incidence et au plan tangent, $\left(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{t}\right)$ forme une base orthonormée directe du plan d'incidence.

On définit enfin l'angle d'incidence $\alpha_I = \left(\overrightarrow{n}, -\overrightarrow{e_I}\right)$ (> 0 sur la **figure 7**) et l'angle réfléchi $\alpha_R = \left(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{e_R}\right)$ (< 0 sur la **figure 7**).



(a) Vue en perspective **(b)** Vue en plan

Figure 7 - Réflexion sur un miroir dans un cas général

Q14. Rappeler les lois de réflexion de Snell-Descartes. En déduire la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{e_R} = \overrightarrow{e_I} - 2\left(\overrightarrow{e_I} \cdot \overrightarrow{n}\right)\overrightarrow{n}. \tag{13}$$

On munit l'espace d'un repère cartésien orthonormé direct $\left(F, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ où l'origine F est supposée concentrer, après réflexion, les rayons lumineux initialement dirigés selon $-\vec{k}$.

$\left(F, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z}\right)$ est le repère cylindrique associé (**figure 8**) tel que $\vec{k} = \vec{e_z}$ et $\theta = \left(\vec{i}, \vec{e_r}\right) = \left(\vec{j}, \vec{e_\theta}\right) \in [0; 2\pi[$.

Un point géométrique M est alors caractérisé aussi bien par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) que cylindriques (r, θ, z) et sa position est donnée par $\overrightarrow{FM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = r\vec{e_r}(\theta) + z\vec{e_z}$ $(r \in \mathbb{R}_+)$.

On suppose enfin la surface du miroir (notée $\mathcal{S}_G$) suffisamment régulière pour pouvoir être décrite en premier lieu par l'équation cartésienne $G(x, y, z) = 0$ où G est une fonction $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$. Par abus de notation, on écrira également dans la suite $G\left(x(r, \theta), y(r, \theta), z\right) = G(r, \theta, z)$.

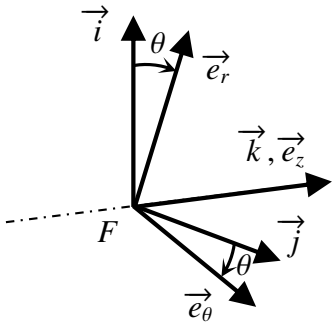


Figure 8 - Repères utilisés

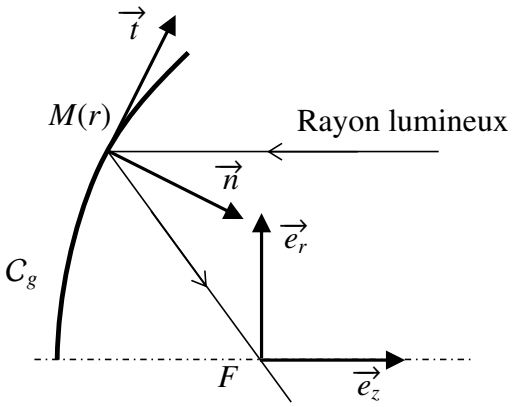


Figure 9 - Courbe et plan d'étude

Q15. Soit $M(x, y, z)$ un point de $\mathcal{S}_G$.

a) Rappeler les expressions de x et y en fonction de r et θ puis de $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

b) Démontrer, par dérivation de fonction composée, la relation $\dfrac{\partial G}{\partial \theta}(r, \theta, z) = r\nabla G(x, y, z) \cdot \vec{e_\theta}$ où $\nabla G(x, y, z)$ désigne le vecteur gradient de G dirigeant la normale $\vec{n}$ à la surface $\mathcal{S}_G$ au point considéré.

c) Montrer que $\vec{n}$ est dans le plan $\left(F, \vec{e_r}, \vec{e_z}\right)$ et en déduire que $\mathcal{S}_G$ est une surface de révolution d'axe $\left(F, \vec{e_z}\right)$.

On suppose désormais que G peut s'écrire sous forme séparable $G(r, \theta, z) = z - g(r)$ où g est une fonction $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ et on restreint l'étude de $\mathcal{S}_G$ à une demi-méridienne C_g c'est-à-dire la courbe (**figure 9**) obtenue par l'intersection de $\mathcal{S}_G$ et d'un plan méridien $\left(F, \vec{e_r}, \vec{e_z}\right)$ pour $\theta \in [0; 2\pi[$ fixé et $r \in \mathbb{R}_+$. $\mathcal{S}_G$ peut donc être vue comme la surface engendrée par la rotation de C_g autour de l'axe de révolution $\left(F, \vec{e_z}\right)$.

La courbe C_g est l'ensemble des points M de paramètre $r \in \mathbb{R}_+$ tels que $\overrightarrow{FM} = r\vec{e_r} + g(r)\vec{e_z}$. On définit en tout point de C_g une base orthonormée directe $\left(\vec{t}, \vec{e_\theta}, \vec{n}\right)$ où $\vec{t}$ est choisi tangent à la courbe, de sorte que $\vec{t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{FM}}{\mathrm{d}r}$ soient colinéaires et de même sens ; quant à $\vec{n}$, il vérifie par construction la relation $\vec{n} = \vec{t} \wedge \vec{e_\theta}$.

On considère dans la suite un rayon lumineux parallèle à $\left(F, \vec{e_z}\right)$ incident au point $M(r)$ appartenant à C_g et réfléchi en direction du point F.

Par abus de notation, on notera g au lieu de $g(r)$ et g' au lieu de $g'(r)$.

Q16. Calculer $\overrightarrow{t} = \dfrac{\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{FM}}{\mathrm{d}r}}{\left\|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{FM}}{\mathrm{d}r}\right\|}$. En déduire que $\overrightarrow{n} = \dfrac{-g'}{\sqrt{1+g'^2}}\overrightarrow{e_r} + \dfrac{1}{\sqrt{1+g'^2}}\overrightarrow{e_z}$.

Q17. **a)** Justifier que $\dfrac{\overrightarrow{FM}}{\left\|\overrightarrow{FM}\right\|} = \overrightarrow{e_z} - 2(\overrightarrow{e_z}\cdot\overrightarrow{n})\overrightarrow{n}$.

b) Calculer $\overrightarrow{e_z} - 2(\overrightarrow{e_z}\cdot\overrightarrow{n})\overrightarrow{n}$ en fonction de g'.

c) Calculer $\dfrac{\overrightarrow{FM}}{\left\|\overrightarrow{FM}\right\|}$ en fonction de r et g.

d) Déduire des questions précédentes le signe de g' et que g' vérifie l'équation :

$$g'^2 - 2\frac{g}{r}g' - 1 = 0, \text{pour tout } r \in \mathbb{R}_+^*. \tag{14}$$

Q18. **a)** Trouver l'unique solution positive de $X^2 - 2\dfrac{g}{r}X - 1 = 0$. On justifiera la réponse.

b) Sachant que $X = g'$, déterminer une expression de g' en fonction de g et r.

c) Montrer à l'aide du changement de fonction $h(r) = \dfrac{g(r)}{r}$ que h est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle :

$$\frac{h'}{\sqrt{1+h^2}} = \frac{1}{r}. \tag{15}$$

Q19. Pour faciliter les calculs et par abus de notation, on écrira h au lieu de $h(r)$.

a) Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Vérifier que la fonction $r \mapsto \dfrac{kr}{2} - \dfrac{1}{2kr}$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation (15).

b) Déterminer l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de $r \mapsto \dfrac{1}{r}$.

c) Résoudre l'équation $Y + \sqrt{1+Y^2} = A$ d'inconnue Y où $A \in \mathbb{R}_+^*$.

d) On considère la fonction $H : r \mapsto \ln(h + \sqrt{1+h^2})$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ où h est solution de (15). Calculer sa dérivée H'.

e) Montrer que $\ln(h + \sqrt{1+h^2}) = \ln(r) + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, puis en déduire h en fonction de r.

f) Conclure à propos des solutions de l'équation (15).

Q20. Soit $M(0)$ le point de C_g, situé sur l'axe $\left(F, \overrightarrow{e_z}\right)$ et défini par $\overrightarrow{FM} = -f\overrightarrow{e_z}$ où f, appelée distance focale du miroir, est un réel > 0. On rappelle que $h(r) = \dfrac{g(r)}{r}$ pour tout $r > 0$. Montrer que g, fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, peut y être définie par :

$$g(r) = \frac{r^2}{4f} - f. \tag{16}$$

C_g est donc un arc de parabole. Cette expression de g sera conservée dans toute la suite du sujet.

Q21. On souhaite représenter la courbe C_g pour $r \in [0; f]$. Déterminer, puis tracer sur la copie des points de C_g en utilisant un pas $\Delta r = \dfrac{f}{5}$ à partir de $r = 0$. En déduire l'allure de la courbe. On prendra $f = 5$ m pour les calculs et on adoptera une échelle de 1/100 pour le tracé. Les coordonnées (r, z) des points seront présentées dans un tableau et, concernant z, écrites sous forme fractionnaire et décimale approchée à 0,1 m près. Enfin, on indiquera sur la figure, en justifiant la construction, la direction de la normale au point de paramètre $r = 3$.

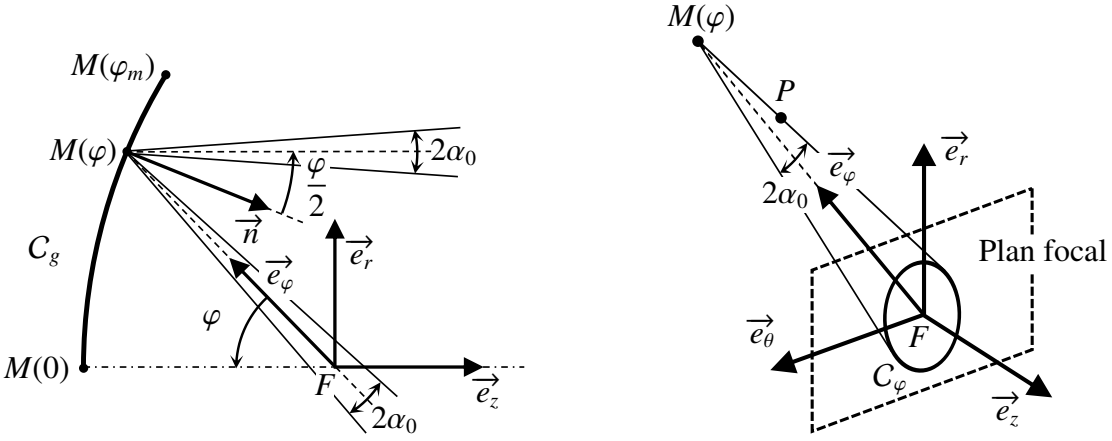
II.2 - Caractérisation de l'image du soleil

Compte tenu de la distance de la terre au soleil ($1{,}496 \cdot 10^8$ km), ce dernier peut être assimilé à une source lumineuse étendue de la forme d'un disque de rayon $6{,}955 \cdot 10^5$ km associé en première approximation à une densité de flux uniforme sur toute sa surface.

Par conséquent, on considère qu'en chaque point du miroir les rayons incidents et réfléchis forment un cône de révolution d'angle au sommet noté $2\alpha_0 \approx 32'$ (une minute d'arc valant $1' = 1/60°$). En supposant que l'axe du miroir pointe vers le centre du soleil, l'axe du cône incident est donc parallèle à l'axe optique $\left(F, \vec{e_z}\right)$ et l'axe du cône réfléchi passe, comme vu en **II.1** et représenté sur la **figure 10a**, par son foyer F.

On cherche alors à déterminer les caractéristiques de l'image formée lorsque le cône réfléchi rencontre le plan focal $\left(F, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}\right)$ (**figure 10b**).

Soit M un point de la courbe C_g où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par l'équation (16). On introduit l'angle $\varphi = \left(\overrightarrow{FM}, -\vec{e_z}\right) \in [0; \pi[$ et on pose $\overrightarrow{FM} = \rho(\varphi)\vec{e_\varphi}$ avec $\rho(\varphi) > 0$ et $\|\vec{e_\varphi}\| = 1$.
C_g peut donc être considérée comme une courbe paramétrée indifféremment par r ou φ.



(a) Cônes lumineux **(b)** Image du soleil

Figure 10 - Réflexion du soleil sur le miroir

Q22. Par abus de notation et pour faciliter les calculs $\rho(\varphi)$ sera noté ρ.

a) Exprimer les coordonnées (r, z) du point M appartenant à C_g en fonction de ses coordonnées (ρ, φ).

b) Montrer que ρ est solution de $\rho^2 \dfrac{\sin^2 \varphi}{4f} + \rho \cos \varphi - f = 0$.

c) En déduire que ρ est une fonction de φ définie sur $[0; \pi[$ par :

$$\rho(\varphi) = \frac{2f}{1 + \cos \varphi}. \tag{17}$$

Q23. On rappelle que $\overrightarrow{FM} = r\overrightarrow{e_r} + g(r)\overrightarrow{e_z} = \rho(\varphi)\overrightarrow{e_\varphi}$. On note r_m le rayon d'ouverture de la parabole que l'on prend égal à f ($r_m = f$) ; le point M de paramètre r_m (ou de manière équivalente φ_m) est donc situé à l'extrémité de la courbe C_g, c'est-à-dire sur le bord du miroir. En déduire une expression de $\rho_m = \rho(\varphi_m)$ en fonction de f ainsi que les valeurs de $\cos\varphi_m$ et $\sin\varphi_m$ correspondantes. On vérifiera également que $\tan\varphi_m = \dfrac{4}{3}$. Ces valeurs seront conservées dans la suite.

Q24. Soit P un point du cône de sommet M appartenant à C_g, d'axe $\left(M, -\overrightarrow{e_\varphi}\right)$ et de demi-angle au sommet α_0 (**figure 10b**).

a) Montrer que P vérifie la relation $\left(\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{e_\varphi}\right)^2 = \|\overrightarrow{MP}\|^2\cos^2\alpha_0$.

On recherche une équation de la courbe notée C_φ issue de la section du cône par le plan focal. On pose à cet effet $\overrightarrow{FP} = X\overrightarrow{e_r} + Y\overrightarrow{e_\theta}$ (P est dans le plan focal) et on rappelle que $\overrightarrow{FM} = \rho\overrightarrow{e_\varphi}$.

b) Montrer que $\left(\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{e_\varphi}\right)^2 = (X\sin\varphi - \rho)^2$.

c) Montrer également que l'on a $\|\overrightarrow{MP}\|^2 = X^2 - 2\rho X\sin\varphi + Y^2 + \rho^2$.

d) En déduire après simplification l'équation homogène verifiée par X et Y.

C_φ représente donc le contour de l'image du soleil issue d'un point $M(\varphi)$ de la parabole C_g dans le plan focal ; le plan focal ayant pour vecteur normal $\overrightarrow{e_z}$, sa projection est une ellipse.

L'équation précédente peut s'écrire sous la forme $\dfrac{(X - X_c)^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ où les paramètres a, b et X_c sont fonctions de φ sur l'intervalle d'étude $[0;\varphi_m]$, pour lequel on admettra que $\varphi_m < \dfrac{\pi}{2} - \alpha_0$, avec :

$$a(\varphi) = \frac{\rho(\varphi)\sin\alpha_0\cos\alpha_0\cos\varphi}{\cos^2\alpha_0 - \sin^2\varphi}, b(\varphi) = \frac{\rho(\varphi)\sin\alpha_0\cos\varphi}{\sqrt{\cos^2\alpha_0 - \sin^2\varphi}} \text{ et } X_c(\varphi) = -\frac{\rho(\varphi)\sin^2\alpha_0\sin\varphi}{\cos^2\alpha_0 - \sin^2\varphi}. \qquad (18)$$

On propose par la suite d'approximer ces fonctions par d'autres d'expressions plus simples.

Pour a on considère par exemple l'approximation $\tilde{a}$ définie par $\tilde{a}(\varphi) = \dfrac{\rho(\varphi)\tan\alpha_0}{\cos\varphi}$ obtenue en écrivant $a(\varphi) = \dfrac{\rho(\varphi)\tan\alpha_0\cos\varphi}{1 - \dfrac{\sin^2\varphi}{\cos^2\alpha_0}} \approx \dfrac{\rho(\varphi)\tan\alpha_0\cos\varphi}{1 - \sin^2\varphi}$. On montre alors que l'erreur relative commise sur $a(\varphi)$, donnée pour tout $\varphi \in [0;\varphi_m]$ par $\left|\dfrac{\tilde{a} - a}{a}\right|(\varphi) = \tan^2\alpha_0\tan^2\varphi$, est négligeable (moins de $0,01\%$).

En procédant de la même manière pour b et X_c, on produit les approximations $\tilde{b}$ et $\tilde{X}_c$ telles que $\tilde{b}(\varphi) = \rho(\varphi)\tan\alpha_0$ et $\tilde{X}_c(\varphi) = 0$ pour lesquelles on ne demande pas de justification.

La courbe C_φ est donc désormais approchée par une courbe $\tilde{C}_\varphi$ d'équation $\dfrac{X^2}{\tilde{a}^2} + \dfrac{Y^2}{\tilde{b}^2} = 1$ dans le repère $\left(F, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}\right)$.

II.3 - Performances du concentrateur

Une mesure de la puissance rayonnée reçue par l'absorbeur du moteur situé dans le plan focal s'obtient en sommant les contributions en flux lumineux de l'ensemble des points du paraboloïde $\mathcal{S}_G$ sur la surface délimitée par $\tilde{C}_0$, c'est-à-dire le disque de centre F et de rayon $f\tan\alpha_0$ correspondant à l'image du soleil réfléchie depuis le sommet $M(0)$ d'une parabole C_g.

Seule une fraction de la puissance émise depuis un point de la surface $\mathcal{S}_G$ est reçue au niveau du disque. Cette quantité est proportionnelle au rapport $\dfrac{\tilde{A}_0}{\tilde{A}_\varphi}$ (≤ 1) où $\tilde{A}_0$ et $\tilde{A}_\varphi$ désignent respectivement les aires délimitées par $\tilde{C}_0$ et $\tilde{C}_\varphi$.

La **figure 11** représente un quart de la courbe $\tilde{C}_\varphi$ pour un $\varphi \in [0;\varphi_m]$. Par symétries, l'aire $\tilde{A}_\varphi$ est donc le quadruple de l'aire délimitée par l'arc de courbe et les axes X et Y.

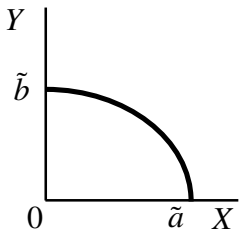
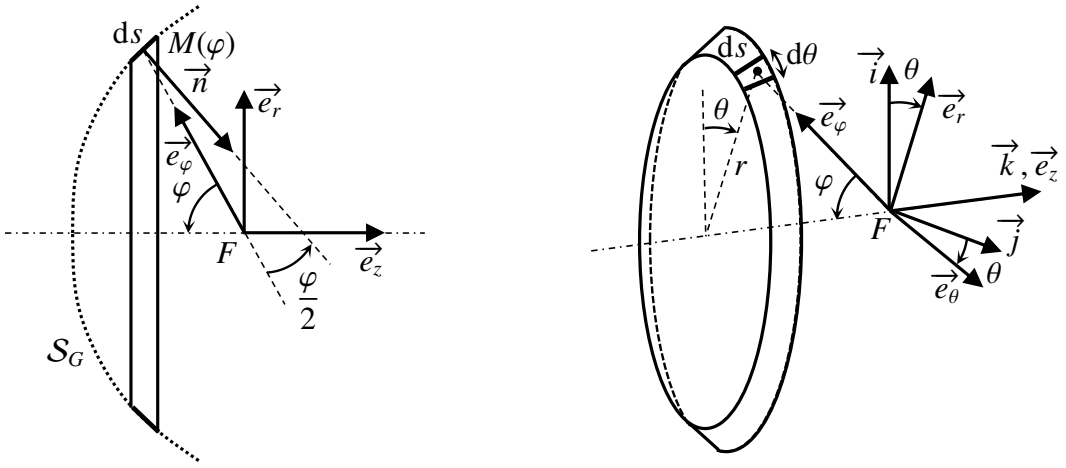


Figure 11 - Arc de courbe

On propose le paramétrage suivant pour l'arc considéré :

$$\begin{cases} X = \tilde{a}\cos t \\ Y = \tilde{b}\sin t \end{cases} \text{ pour tout } t \in [0;\frac{\pi}{2}]. \tag{19}$$

Q25. Donner une interprétation de la quantité $\displaystyle\int_0^{\tilde{a}} Y(X)\,\mathrm{d}X$ puis la calculer. En déduire que $\tilde{A}_\varphi = \pi\tilde{a}\tilde{b}$.



(a) Vue en plan **(b)** Vue en perspective

Figure 12 - Anneau élémentaire

On considère maintenant la puissance émise par un anneau élémentaire situé sur le paraboloïde, paramétré par l'angle φ et de longueur différentielle $\mathrm{d}s$ (**figure 12**).

L'anneau en question est constitué de facettes élémentaires de normale $\overrightarrow{n}$ telle que $(\overrightarrow{n},\overrightarrow{e_z}) = \dfrac{\varphi}{2}$ et d'aire $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}s$ avec $\mathrm{d}s = \left\|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{FM}}{\mathrm{d}\varphi}(\varphi)\right\|\mathrm{d}\varphi$ la longueur de l'élément de courbe associé.

La puissance émise par une facette est donnée par l'expression $\eta p_0\,\mathrm{d}S\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{e_z} = \eta p_0\cos\dfrac{\varphi}{2}\mathrm{d}S$ où $\mathrm{d}S\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{e_z}$ représente sa section apparente, p_0 est l'éclairement solaire au sol (en W/m^2) et $\eta < 1$ est un facteur correctif prenant en compte les pertes diverses (absorption atmosphérique, ...).

Tous les points de l'anneau générant une image du soleil de même aire $\tilde{A}_\varphi$, l'absorbeur reçoit une fraction de la puissance émise par l'anneau donnée par $\mathrm{d}P = 2\pi\eta p_0\dfrac{\tilde{A}_0}{\tilde{A}_\varphi}\cos\dfrac{\varphi}{2}r\,\mathrm{d}s$.

Q26. Par abus de notation, on écrira ρ pour $\rho(\varphi)$ et ρ' pour $\rho'(\varphi)$.

a) Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\varphi}}{\mathrm{d}\varphi}$ est unitaire et vérifie $\overrightarrow{e_\varphi} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\varphi}}{\mathrm{d}\varphi} = 0$.

b) Montrer que $\mathrm{d}s = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,\mathrm{d}\varphi$.

c) Montrer également que $\rho' = \rho \tan \dfrac{\varphi}{2}$.

d) En déduire que $\mathrm{d}P = 2\pi\eta p_0 f^2 \sin\varphi \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$.

e) Calculer en fonction de η, p_0, f et φ_m la puissance totale reçue par l'absorbeur en supposant la parabole totalement éclairée.

f) Effectuer l'application numérique pour $p_0 = 10^3$ W/m^2, $f = 5$ m et $\eta = 0{,}7$.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 21 1175 – D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de TSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Dynamique des systèmes de solides : principe fondamental, stratégie d'isolement, équilibrage
- Modélisation des liaisons, graphe des liaisons et schéma cinématique
- Équations différentielles linéaires du premier ordre
- Optique géométrique et formation des images
- Fonctions vectorielles et arcs paramétrés

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/tsi