Concours Commun INP (CCINP), France

Session 2026, filière TSI

Modélisation

Durée : 3 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : modélisation et stabilisation d'un flotteur
- Partie II : modélisation géométrique
- Partie III : stabilisation du roulis

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/ccinp/tsi/2026/modelisation

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

MODÉLISATION

Durée : 3 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois parties, toutes indépendantes.

Si besoin, le candidat pourra admettre le résultat d'une question et l'utiliser dans les questions suivantes.

Stabilisation d'un robot serpentiforme

Une nouvelle génération de robots inspirés de la nage des serpents aquatiques a récemment émergé. Ces robots sont plus compacts, maniables et économes en énergie que les navires autonomes de surface. Ainsi, grâce à leur excellente manœuvrabilité, ils pourraient intervenir en urgence dans des situations complexes (chavirement, débris de surface, marée noire). Cependant, malgré ce potentiel, ils souffrent d'une stabilité en surface trop précaire dans des conditions extrêmes (houle, vent).

Le robot NATRIX [1] étudié dans ce sujet s'inspire de la cinématique des serpents " mocassins d'eau ". Le principe est d'induire des déformations du robot pour pouvoir varier localement le niveau d'immersion de chaque module du corps du robot tout en préservant l'onde de flexion latérale. Le robot NATRIX est composé de 14 solides, dont les mouvements relatifs sont actionnés par des servomoteurs, comprenant une tête, un cou et six modules ARIM pour " Anti-Roulis Indépendant et Modulaire " et une queue souple passive (**figure 1**).

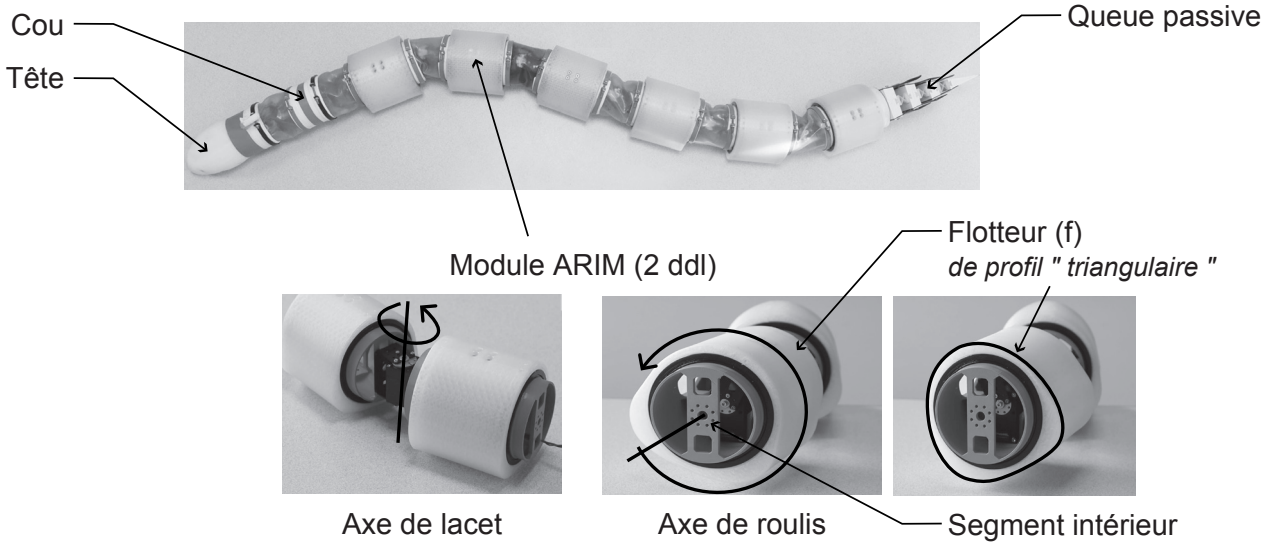


Figure 1 - Robot serpentiforme NATRIX

Chaque module ARIM dispose de 2 degrés de liberté (ddl) : l'un pour le lacet entre chaque module et l'autre pour le roulis permettant de faire tourner un flotteur. Le corps de chaque module est composé d'un segment intérieur et d'un flotteur. Les flotteurs des modules ARIM ont une forme globalement triangulaire pour reproduire la section des serpents. Leur géométrie est étudiée dans la **partie I.1**. Leur principe de fonctionnement et leur utilité dans le changement actif de la flottabilité sont étudiés dans la **partie I.2**, et leur équilibre dynamique dans la **partie I.3**. Dans la **partie II**, on propose une modélisation de l'espace des configurations du robot NATRIX afin de pouvoir le piloter. Enfin, dans la **partie III**, on étudie la stabilisation de l'angle de roulis du robot NATRIX.

Partie I - Modélisation et stabilisation d'un flotteur

I.1 - Géométrie d'un flotteur

Afin de pouvoir étudier et optimiser le profil extérieur des modules, il est nécessaire de disposer d'un modèle analytique et donc d'une fonction décrivant ce profil. Le corps de chaque module peut être considéré comme un flotteur cylindrique de section arbitraire dont le profil extérieur peut être défini par une fonction R_e continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, associant à chaque angle $\theta \in \mathbb{R}$ son rayon $R_e(\theta)$.

1. XIE, Xiao. *Processus de stabilisation d'un robot serpentiforme à la surface de l'eau : modélisation, contrôle et stabilité*. 2023. Thèse de doctorat. École nationale supérieure Mines-Télécom Atlantique.

Q1. Justifier que la fonction R_e est bornée sur $\mathbb{R}$.

Le profil intérieur est un cercle de rayon $R_i < \min_{\theta\in\mathbb{R}} R_e(\theta)$. On associe au flotteur (**figure 2**) le repère $\mathscr{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de base orthonormée directe, tel que le domaine de ses points matériels soit défini en coordonnées polaires comme :

$$\mathscr{D} = \left\{ M \;\middle|\; \overrightarrow{OM} = \rho\, \vec{e_r}(\theta) + z\, \vec{z}, \quad \rho \in [R_i, R_e(\theta)],\ \theta \in [0, 2\pi],\ z \in \left[\frac{-\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right] \right\} .$$

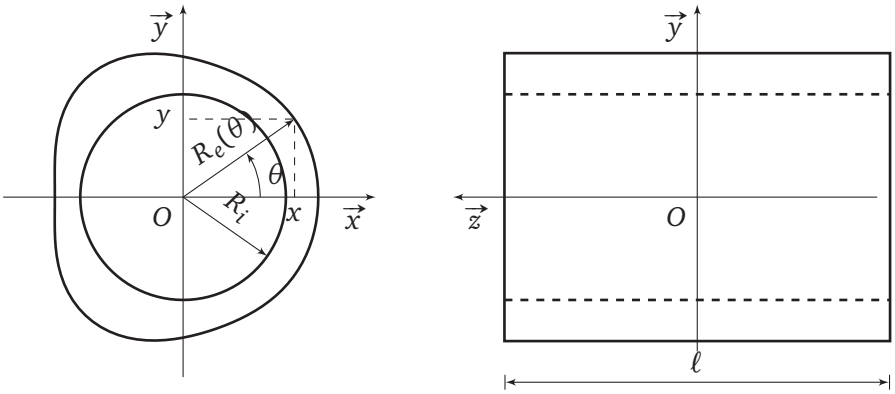


Figure 2 - Profil d'un flotteur

Q2. On note $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ les coefficients trigonométriques de Fourier de la fonction R_e. On note aussi pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $\theta \in \mathbb{R}$:

$$S_N(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{N-1} [a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)] .$$

Rappeler la définition des coefficients de Fourier $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

Q3. Exprimer une condition sur la fonction R_e pour que le profil soit symétrique par rapport à la droite $(O, \vec{x})$.

Q4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En admettant que R_e soit une fonction paire, donner une expression simplifiée de $S_N(\theta)$.

Q5. Énoncer le théorème de Dirichlet pour la fonction R_e.

Pour la suite, on va approcher la fonction R_e par les fonctions S_N et négliger l'erreur commise. Si bien qu'on prend désormais pour définition de R_e la fonction qui pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ associe :

$$R_e(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{N-1} [a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)] ,$$

avec $N \in \mathbb{N}^*$ et où les $(a_k)_{0\leqslant k<N}$ et $(b_k)_{1\leqslant k<N}$ sont des coefficients réels.

On suppose que l'on dispose d'un nuage de points $\{(r_i, \theta_i), 1 \leqslant i \leqslant m\}$ de $\mathbb{R}^2$ pour décrire le profil extérieur de chaque flotteur du robot NATRIX en coordonnées polaires.

Q6. Expliquer comment obtenir numériquement à partir de ce nuage de points l'expression des N paramètres d'une fonction R_e ; par exemple avec $N = 5$ paramètres, la fonction :

$$R_e(\theta) = 54{,}42 - 1{,}56\cos(\theta) - 1{,}71\cos(2\theta) + 2{,}91\cos(3\theta) - 1{,}47\cos(4\theta)$$

associe à chaque angle θ son rayon R_e en mm. On précisera notamment la famille d'algorithmes.

Q7. Justifier que le centre d'inertie G du flotteur appartient à la droite $(O, \vec{x})$.

I.2 - Équilibre d'un flotteur

On cherche maintenant à étudier les conditions d'équilibre statique d'un flotteur du robot NATRIX dont la géométrie est celle étudiée dans la sous-partie précédente. Chaque flotteur est soumis à :

- l'action du poids $\vec{P} = -mg\vec{x_0}$ induite par le champ de pesanteur supposé uniforme $\vec{g} = -g\vec{x_0}$. C'est un glisseur tel que :

$$\{\mathcal{T}_{\text{pes}\to\text{f}}\} = \left\{ \begin{array}{c} -mg\vec{x_0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G,$$

  où G est le centre d'inertie du flotteur (fixe dans le référentiel du flotteur) ;
- l'action de la poussée d'Archimède $\vec{F} = \rho V g\vec{x_0}$ correspondant à l'opposé du poids du volume d'eau déplacé V, de masse volumique ρ. C'est un glisseur tel que :

$$\{\mathcal{T}_{\text{eau}\to\text{f}}\} = \left\{ \begin{array}{c} \rho V g\vec{x_0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C,$$

  où C est le centre de carène, qui correspond à la position du centre d'inertie du volume d'eau correspondant au flotteur immergé.

La stabilité d'un flotteur dépend des positions relatives de son centre d'inertie G et de son centre de carène C dont la position varie selon le tirant d'eau (pilonnement du flotteur), l'assiette (tangage) et la gîte (roulis). Le pilonnement et la gîte sont illustrés sur la **figure 3**.

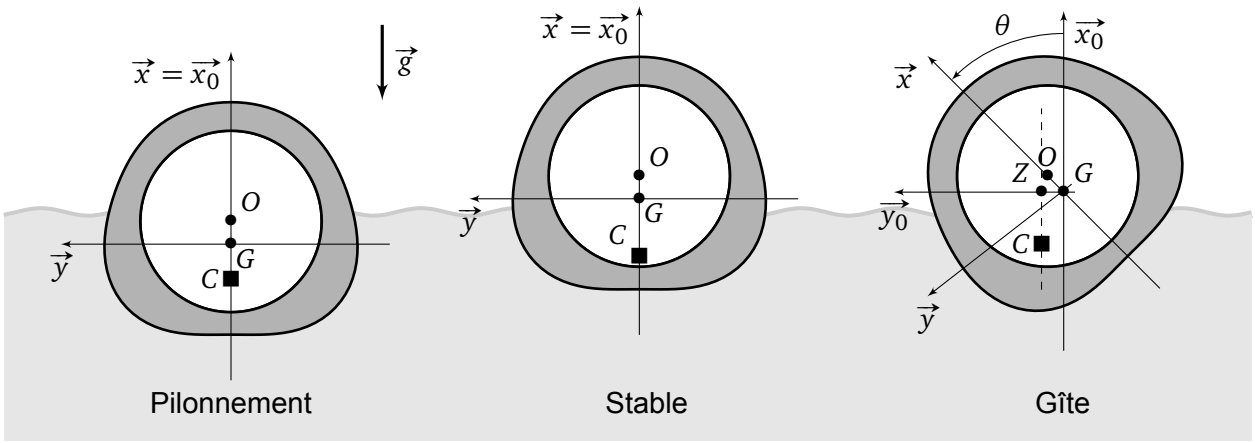


Figure 3 - Conditions de stabilité d'un flotteur

Dans une configuration d'équilibre sur mer calme (cas " stable " de la **figure 3**), le centre d'inertie G et le centre de carène C sont situés sur le même axe vertical $(G, \vec{x_0})$. Lorsque le flotteur du robot est incliné d'un angle θ, le centre de carène se déplace vers une nouvelle position (cas " gîte " de la **figure 3**) et n'est plus aligné sur la verticale passant par G. Dans ce cas, il est d'usage de noter Z le projeté orthogonal du point G sur la droite $(C, \vec{x_0})$.

Q8. En appliquant le principe fondamental de la statique au flotteur, au point G, montrer qu'il n'est en équilibre que si les points G et Z sont confondus. Préciser ce qui se passe dans le cas contraire.

Pour étudier les conditions de stabilité du flotteur, il est nécessaire de faire tourner le flotteur autour de son axe longitudinal $(G, \vec{z})$ d'un angle θ, et de déterminer le couple de redressement $\Gamma = \rho V g\overline{GZ}$, proportionnel à la distance $\overline{GZ} = \overline{GZ} \cdot \vec{y_0}$, appelée " bras de redressement ". Le travail nécessaire pour amener de façon quasi-statique le flotteur de sa position d'équilibre stable ($\theta = 0$) à sa position en gîte correspond à l'énergie potentielle de basculement :

$$E_p(\theta) = mg \int_0^{\theta} \overline{GZ}(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha \ .$$

On donne sur la **figure 4** des tracés caractéristiques de $\overline{GZ}(\theta)$ et de $E_p(\theta)$ pour les flotteurs du robot NATRIX.

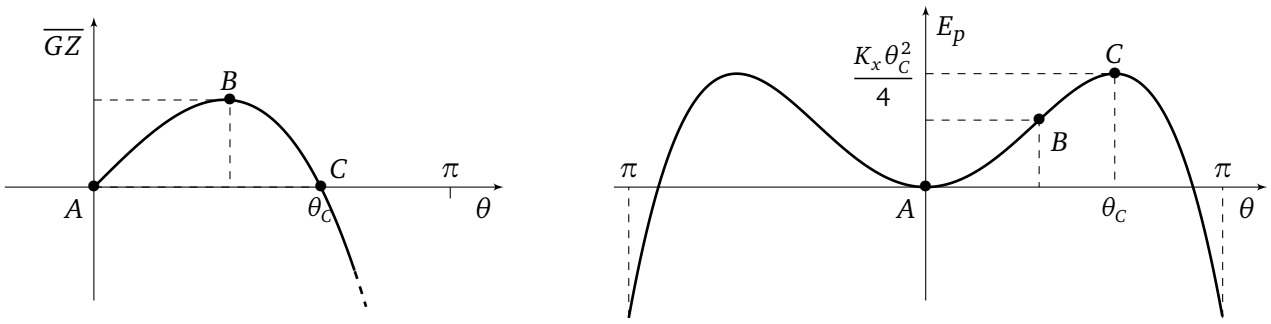


Figure 4 - Bras de redressement $\overline{GZ}$ et énergie potentielle de basculement d'un flotteur en fonction de l'angle de gîte θ

Sur les tracés de la **figure 4**, on peut remarquer que pour un angle θ tel que $|\theta| < \theta_C$, alors un couple de redressement tend à ramener le flotteur vers sa position d'équilibre stable. À l'inverse, lorsque $|\theta| > \theta_C$, le couple de redressement éloigne le flotteur de sa position d'équilibre.

Q9. Expliquer précisément à quoi correspondent les points A et C de la **figure 4**. En B, indiquer si l'angle de gîte va augmenter ou diminuer.

I.3 - Stabilité dynamique

On s'intéresse maintenant à la stabilisation dynamique autorisée par le fait que le flotteur (f) est en liaison pivot motorisée d'axe $(O, \vec{z})$ avec le segment intérieur (s). On note $\overrightarrow{\Omega_{f/s}} = \omega_m \vec{z}$ le vecteur taux de rotation du flotteur par rapport au segment et $\overrightarrow{C_{s\to f}} = C_m \vec{z_0}$ le couple moteur associé exercé par le segment intérieur sur le flotteur.

Afin de simplifier l'étude, on suppose qu'au cours d'un mouvement de gîte, le flotteur est en rotation autour de l'axe $(O, \vec{z})$, qui sera donc considéré comme fixe dans un référentiel galiléen. On suppose aussi que le segment intérieur est un cylindre homogène d'axe $(O, \vec{z})$. Les matrices d'inertie du flotteur $\bar{\bar{I}}_{\mathrm{f}}(O)$ et du segment intérieur $\bar{\bar{I}}_{\mathrm{s}}(O)$, au point O, sont définies par :

$$\bar{\bar{I}}_{\mathrm{f}}(O) = \begin{pmatrix} A_f & 0 & 0 \\ 0 & B_f & 0 \\ 0 & 0 & C_f \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \text{et} \quad \bar{\bar{I}}_{\mathrm{s}}(O) = \begin{pmatrix} A_s & 0 & 0 \\ 0 & A_s & 0 \\ 0 & 0 & C_s \end{pmatrix}_{(-,-,\vec{z})}$$

où $(-,-,\vec{z})$ indique une symétrie de révolution d'axe $(O, \vec{z})$. On note $\overrightarrow{\Omega_{f/0}} = \dot{\theta}\vec{z}$ le vecteur taux de rotation du flotteur par rapport au référentiel galiléen. La position du centre d'inertie G du flotteur est définie par $\overrightarrow{GO} = c\vec{x}$, avec $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x}) = (\vec{y_0}, \vec{y})$, et celle du centre de carène C par $\overrightarrow{CO} = a\vec{x_0} + b\vec{y_0}$.

Q10. Justifier que la matrice d'inertie au point O dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ du flotteur soit diagonale.

Q11. Justifier la forme de la matrice d'inertie au point O dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ du segment intérieur.

Q12. Déterminer une expression du vecteur taux de rotation du segment intérieur par rapport au référentiel galiléen, noté $\overrightarrow{\Omega_{s/0}}$, en fonction de $\dot{\theta}$ et de ω_m.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique au segment, on obtient l'équation différentielle régissant son mouvement dans un référentiel galiléen :

$$C_s\left(\ddot{\theta} - \dot{\omega}_m\right) + C_m = 0 \,.$$

Le moment dynamique du flotteur au point O est défini par :

$$\overrightarrow{\delta_{O,f/0}} = C_f \ddot{\theta}\vec{z} \,.$$

Q13. En appliquant le principe fondamental de la dynamique au flotteur au point O, établir l'équation différentielle régissant son mouvement dans un référentiel galiléen.

Q14. En supposant que $m = \rho V$, déterminer une expression du couple de redressement Γ en fonction de m, g, b, c et de θ.

Pour étudier le comportement dynamique du flotteur au voisinage de sa position d'équilibre, on suppose que l'on a $|\theta| \ll \theta_C$.

Q15. Montrer que l'on peut alors linéariser l'équation de dynamique du flotteur sous la forme :

$$C_f \ddot{\theta} = C_m - K_x \theta \ .$$

Préciser l'expression de K_x.

L'axe de roulis permettant de faire tourner le flotteur par rapport au segment intérieur est mû par un servomoteur qui présente l'avantage de posséder une très faible inertie. Le comportement électromécanique de ce type de moteur est donné par les équations suivantes :

$$u(t) = R\, i(t) + L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + e(t) \quad (1)$$

$$e(t) = K_e\, \omega_m(t) \quad (2)$$

$$C_m(t) = K_t\, i(t) \quad (3)$$

avec $u(t)$ la tension appliquée aux bornes du moteur, $i(t)$ le courant d'induit, $e(t)$ la force contre-électromotrice, $\omega_m(t)$ la vitesse de rotation du moteur et $C_m(t)$ le couple délivré par le moteur. Ses caractéristiques sont sa résistance R, l'inductance L de son bobinage d'induit, sa constante de couple K_t et sa constante de vitesse K_e.

Afin de conserver " le mieux possible " la position d'équilibre stable $\theta = 0$, on met en place un asservissement avec un capteur MEMS, de gain K_{capt}, permettant d'acquérir une image de l'angle θ. Un correcteur, de fonction de transfert $C(p)$, permet de générer une tension de commande adaptée au moteur. On donne sur la **figure 5** le schéma-blocs de cet asservissement.

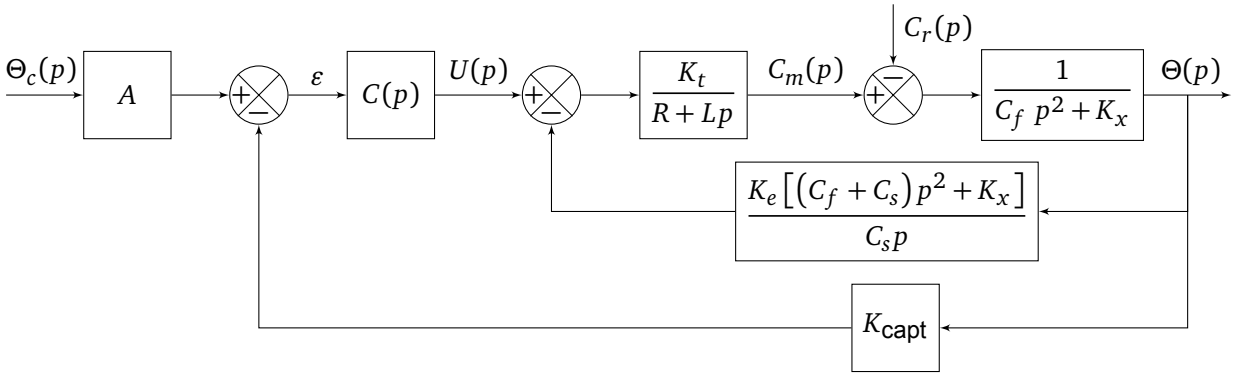


Figure 5 - Schéma-blocs de l'asservissement de l'angle de roulis

Q16. Préciser ce que peut représenter $C_r(p)$.

Q17. Déterminer une expression de la fonction de transfert en boucle ouverte du système. En déduire la classe minimale du correcteur à utiliser pour que le système ait une erreur nulle en réponse à un échelon de consigne et à un échelon de perturbation. Proposer une fonction de transfert pour $C(p)$.

Partie II - Modélisation géométrique

II.1 - Espace des configurations

La configuration d'un solide dans l'espace est déterminée par la position et l'orientation d'un repère $\mathscr{F}$ attaché au solide par rapport à un repère $\mathscr{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de base orthonormée directe. Pour le serpent qui est composé de plusieurs modules, on prend le repère de la tête comme repère de référence de l'ensemble du robot. Puis, pour des raisons de degrés de liberté internes, la configuration du corps (la tête exclue) est caractérisée par un éléments de T^n où T est le cercle unité et n le nombre de positions contrôlables.

On va s'intéresser ici à la représentation de la tête. À un repère quelconque $\mathscr{F}_i = (M_i, \vec{x_i}, \vec{y_i}, \vec{z_i})$ de base orthonormée directe, on associe la configuration de la tête suivante (**figure 6**) :

- la tête est placée au point M_i ;
- la tête est dans la direction $\vec{y_i}$;
- le haut de la tête est dirigé par $\vec{z_i}$.

Or, passer de la base orthonormée directe de référence $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ à une base orthonormée directe quelconque $\mathscr{B}_i = (\vec{x_i}, \vec{y_i}, \vec{z_i})$ revient à se donner une matrice du groupe spécial orthogonal $SO_3(\mathbb{R})$.

Ainsi, une configuration de la tête est la donnée d'une position $p \in \mathbb{R}^3$ et d'une matrice de rotation $R \in SO_3(\mathbb{R})$. On définit alors une configuration de la tête comme étant une matrice :

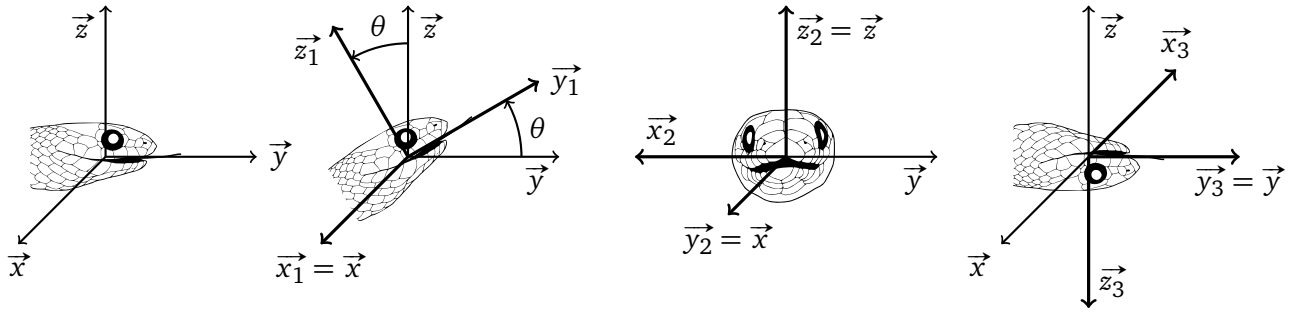
$$g = \begin{pmatrix} R & p \\ 0_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}) \,,$$

avec $0_{1,3}$ le vecteur ligne $(0,0,0)$ et on note $SE(3) = \left\{ \begin{pmatrix} R & p \\ 0_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \mid R \in SO_3(\mathbb{R}) \,,\ p \in \mathbb{R}^3 \right\}$ l'ensemble des configurations de la tête.

Ainsi, la position 0 (celle de référence) de la **figure 6** correspond à la matrice $g_0 = \begin{pmatrix} I_3 & 0_{3,1} \\ 0_{1,3} & 1 \end{pmatrix} = I_4$.

La position 1 correspond à la matrice $g_1 = \begin{pmatrix} R_1 & p_1 \\ 0_{1,3} & 1 \end{pmatrix}$ avec $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

En effet, pour passer de la configuration de référence g_0 à la configuration g_1, la tête de serpent s'est translatée d'un vecteur $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et a effectué une rotation d'axe $\mathrm{Vect}(\vec{x})$ orientée par $\vec{x}$ et d'angle θ (le serpent a relevé sa tête d'un angle θ).



Position 0 Position 1 Position 2 Position 3

Figure 6 - Différentes positions de la tête du serpent

Q18. Donner la matrice R_2 de la rotation d'axe $\text{Vect}(\vec{z})$ orientée par $\vec{z}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Q19. En déduire l'élément de $SE(3)$ correspondant à la configuration g_2 de la position 2 de la **figure 6** sachant que la tête de la configuration g_2 est positionnée au point $M_2 = (-1, 3, 1)$.

Q20. Donner l'élément de $SE(3)$ correspondant à la configuration g_3 de la position 3 de la **figure 6** sachant que la tête de la configuration g_3 est positionnée au point $M_3 = (5, 2, 0)$.

On va maintenant traduire deux éléments de $SE(3)$ en termes de déplacements de la tête du serpent.

Q21. Décrire les déplacements subis par la tête du serpent pour passer de la position initiale $g_0 = I_4$ à la position $g_4 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SE(3)$.

On note $R = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q22. Montrer que R est une matrice orthogonale.

Q23. Montrer que R est une matrice du groupe spécial orthogonal $SO_3(\mathbb{R})$.

Q24. Ainsi R est la matrice d'une rotation r de $\mathbb{R}^3$. Donner l'axe de cette rotation.

On choisira l'orientation de cet axe en fixant le vecteur $\vec{a}$ de cet axe dont le premier coefficient est 1.

Q25. Retrouver l'angle $\theta \in]-\pi; \pi]$ de la rotation r pour l'orientation fixée par le vecteur $\vec{a}$.

Q26. Soit p une position fixée de $\mathbb{R}^3$. En déduire, à l'aide des questions **Q24** et **Q25**, les déplacements subis par la tête du serpent pour passer de la position g_0 à la position $g_5 = \begin{pmatrix} R & p \\ 0_{1,3} & 1 \end{pmatrix}$.

II.2 - Intérêt d'une telle modélisation

L'intérêt de modéliser la configuration de la tête par $SE(3)$ vient du fait que $SE(3)$ est un groupe de Lie. Ainsi, il sera possible d'établir des équations différentielles sur l'espace $SE(3) \times T^n$ des configurations du robot.

Vérifions les propriétés de groupe de l'ensemble $SE(3)$.
Pour cela, on admettra que si $(R, S) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$, $(p, q) \in (\mathbb{R}^3)^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors le produit matriciel de la matrice $g = \begin{pmatrix} R & p \\ 0_{1,3} & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ avec la matrice $h = \begin{pmatrix} S & q \\ 0_{1,3} & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est donné par :

$$gh = \begin{pmatrix} RS & Rq + bp \\ 0_{1,3} & ab \end{pmatrix}.$$

Q27. Justifier que $SE(3)$ est stable par produit matriciel.

Q28. Soit $g = \begin{pmatrix} R & p \\ 0_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \in SE(3)$, calculer le déterminant de g. En déduire que g est inversible.

Q29. Soit $g = \begin{pmatrix} R & p \\ 0_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \in SE(3)$. En cherchant g^{-1} sous la forme $\begin{pmatrix} S & q \\ 0_{1,3} & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, avec $S \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $q \in \mathbb{R}^3$ et $b \in \mathbb{R}$, déterminer l'inverse de g.
En déduire que $SE(3)$ est stable par passage à l'inverse.

II.3 - Simulateur

Dans cette sous-partie, on se focalise maintenant sur la validation d'un simulateur établi à partir d'un modèle dynamique complet du corps du robot. On considère le cas le plus simple où aucune force extérieure n'est appliquée sur le robot et donc seuls les termes inertiels sont considérés dans le cas d'une flexion latérale uniforme paramétrée par la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{160}\left(0{,}25t^4 - 0{,}5\tau t^3 + 0{,}25\tau^2 t^2\right) & \text{pour } t \in [0, \tau] \\ -f(t-\tau) & \text{pour } t \in [\tau, 2\tau] \end{cases},$$

où $\tau = 10\,s$ est la durée de la demi-période.

Q30. Déterminer le tableau de variations complet de f sur l'intervalle $[0, \tau]$. On donnera la valeur maximale de f sous forme d'une fraction irréductible.

Q31. Tracer le graphe de la fonction f sur $[0, \tau]$.

Q32. En utilisant la relation $\forall t \in [\tau, 2\tau]$, $f(t) = -f(t-\tau)$, compléter le graphe de f sur $[0, 2\tau]$ et donner la signification graphique de cette relation.

Q33. Sachant que chacune des 5 liaisons pivot d'axes parallèles entre les 6 segments du corps est pilotée avec cette fonction f, expliquer quelles sont les configurations extrêmes et donner la différence d'orientation en degrés entre la tête et la queue.

Partie III - Stabilisation du roulis

On se propose maintenant d'analyser la stabilité du robot NATRIX complet avec un modèle simplifié pour l'angle de roulis θ.

III.1 - Modélisation du mouvement

Par analogie avec le mouvement de la marche humaine, on se propose de modéliser le mouvement de roulis avec un pendule simple dont la base est en translation dans un référentiel galiléen comme représenté sur la **figure 7**. Une masse m est attachée au bout d'un fil inextensible de longueur ℓ et de masse négligeable en liaison pivot d'axe $(A, \vec{z_0})$ avec un support mobile dans un référentiel galiléen de repère $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$. La liaison pivot est supposée parfaite (sans frottement) et, compte tenu de la faible vitesse du pendule, les frottements avec l'air sont aussi négligés. On note $\theta = (\vec{x_0}, \vec{x_1}) = (\vec{y_0}, \vec{y_1})$ l'angle mesurant l'écart à la verticale du fil entre les points A et G et λ la distance algébrique $\overrightarrow{OA} \cdot \vec{y_0}$.

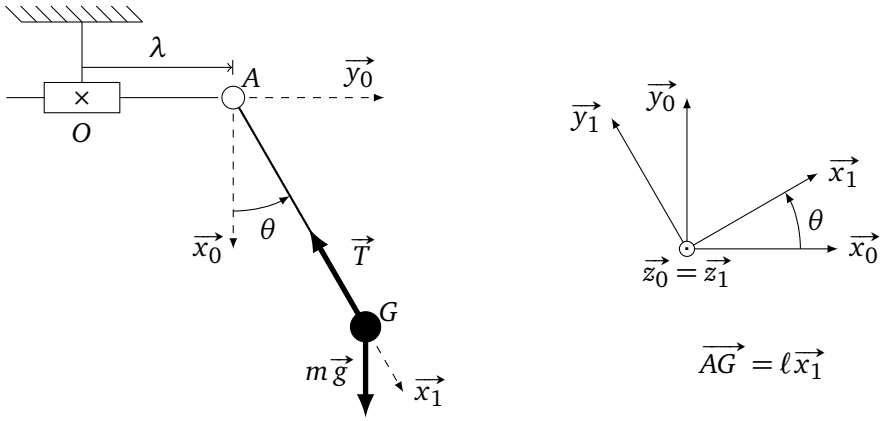


Figure 7 - Modèle de pendule simple et paramétrage associé

Q34. Déterminer l'accélération du centre de gravité G dans le référentiel galiléen en fonction de $\ddot{\lambda}$, ℓ, $\dot{\theta}$ et de $\ddot{\theta}$.

Q35. Déterminer une expression du travail élémentaire du poids exercé sur la masse m dans le référentiel galiléen. Préciser rigoureusement si cette force est conservative.

Q36. Expliquer comment déterminer une expression de la tension dans le fil T en fonction de m, g, ℓ, θ et de $\ddot{\lambda}$.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse m, on peut établir l'équation différentielle suivante régissant son mouvement dans un référentiel galiléen :

$$\ddot{\theta} + \frac{\ddot{\lambda}}{\ell}\cos\theta + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0\ . \tag{4}$$

On suppose que l'attache du fil est soumise à un déplacement sinusoïdal de petite amplitude X et de pulsation Ω telles que l'on ait :

$$\lambda : t \mapsto X\sin(\Omega t)\ .$$

On suppose de plus qu'initialement : $\theta(0) = 0\,\text{rad}$ et $\dot{\theta}(0) = 0\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

Q37. Montrer que l'équation différentielle (4) peut alors se mettre sous la forme :

$$\ddot{\theta}(t) + \omega^2\theta(t) = \Gamma\sin(\Omega t)\ , \tag{5}$$

et préciser les expressions des constantes ω et Γ en fonction de ℓ, g, X et de Ω.

Q38. On se place dans le cas où $\Omega \neq \omega$. Résoudre l'équation (5) dans $\mathbb{R}$.

Q39. On se place, à présent, dans le cas où $\Omega = \omega$. Résoudre l'équation (5) dans $\mathbb{R}$.

Q40. Commenter l'amplitude du mouvement de balancier (évolution de θ) pour chacun des deux cas.

III.2 - Stabilité de l'équation linéaire

On se propose maintenant de prendre en compte l'effet d'excitation (ou de forçage) sur la résonance paramétrique via les couplages induits par un accrochage en fréquence entre la réponse de l'oscillateur harmonique et la modulation de raideur. On arrive alors à l'équation :

$$\ddot{\theta}(t) + \omega^2\theta(t) = -\omega^2\delta\cos(2\Omega t)\theta(t)\ , \tag{6}$$

où δ est un paramètre de perturbation petit et Ω une pulsation.
On remarque que pour $\delta = 0$, on retombe sur l'équation homogène de l'équation (5).
La résonance la plus " dangereuse " se situe au voisinage de la pulsation ω, lorsque $\Omega - \omega$ est de l'ordre de δ. Pour l'étudier, on se place alors dans le cas où $\Omega = \omega + \underset{\delta\to 0}{O}(\delta)$.

III.2.1 - Théorie de perturbation naïve au premier ordre

On commence par résoudre l'équation différentielle (6) lorsque $\delta = 0$. On trouve alors l'équation homogène :

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0. \tag{7}$$

On reconnait l'équation d'un oscillateur harmonique dont une solution est donnée par :

$$\theta_0 : t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\ ,$$

avec A et B des réels.

L'idée est à présent de déterminer une solution approchée θ_δ de l'équation (6) en la cherchant sous la forme :

$$\theta_\delta(t) = \theta_0(t) + \delta\theta_1(t) + \underset{\delta\to 0}{O}\left(\delta^2\right)\ ,$$

avec θ_1 une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ qui est l'inconnue et avec les conditions initiales $\theta_\delta(0) = \Theta_0$ et $\dot{\theta_\delta}(0) = 0$.

Q41. Sachant que $\Omega = \omega + \underset{\delta\to 0}{O}(\delta)$, montrer que $\cos(2\Omega t) = \cos(2\omega t) + \underset{\delta\to 0}{O}(\delta)$.

Q42. En injectant θ_δ dans l'équation (6), montrer qu'on obtient :

$$\delta(\ddot{\theta_1}(t) + \omega^2\theta_1(t)) = -\delta\omega^2\cos(2\omega t)\,(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)) + \underset{\delta\to 0}{O}(\delta^2).$$

On cherche ainsi θ_1 une solution de l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta_1}(t) + \omega^2\theta_1(t) = -\omega^2\cos(2\omega t)\,(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))\ . \tag{8}$$

Q43. Montrer que l'équation (8) se réécrit :

$$\ddot{\theta_1}(t) + \omega^2\theta_1(t) = -\frac{\omega^2}{2}\,(A\cos(3\omega t) + A\cos(\omega t) + B\sin(3\omega t) - B\sin(\omega t)).$$

Cela nous amène à chercher θ_1 sous la forme :

$$\theta_1(t) = a\cos(3\omega t) + b\sin(3\omega t) + ct\cos(\omega t) + dt\sin(\omega t)\ ,$$

avec a, b, c, d quatre réels à déterminer.

En injectant θ_1 dans l'équation (8), on obtient :

$$\theta_1 \text{ est solution de (8) sur } \mathbb{R} \iff \left(\begin{array}{ll} \forall t\in\mathbb{R}, & -8\omega^2\,(a\cos(3\omega t) + b\sin(3\omega t)) + 2\omega\,(d\cos(\omega t) - c\sin(\omega t)) \\ & = -\dfrac{\omega^2}{2}\,(A\cos(3\omega t) + B\sin(3\omega t) + A\cos(\omega t) - B\sin(\omega t)) \end{array} \right).$$

Q44. En notant $g_1 : t \mapsto \cos(\omega t)$, $g_2 : t \mapsto \sin(\omega t)$, $g_3 : t \mapsto \cos(3\omega t)$ et $g_4 : t \mapsto \sin(3\omega t)$, montrer que la famille (g_1, g_2, g_3, g_4) est une famille libre de l'espace des fonctions continues $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Q45. En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\theta_1(t) = \dfrac{A}{16}\cos(3\omega t) + \dfrac{B}{16}\sin(3\omega t) - \dfrac{\omega B}{4}t\cos(\omega t) - \dfrac{\omega A}{4}t\sin(\omega t)$.

Q46. Avec les conditions initiales $\theta_\delta(0) = \Theta_0$ et $\dot{\theta_\delta}(0) = 0$, en déduire finalement que :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad \theta_\delta(t) = \Theta_0\cos(\omega t) + \delta\left(\frac{\Theta_0}{16}(\cos(3\omega t) - \cos(\omega t)) - \frac{\Theta_0\omega}{4}t\sin(\omega t)\right) + \underset{\delta\to 0}{O}(\delta^2).$$

Cette méthode introduit un terme séculaire $-\delta\dfrac{\Theta_0\omega}{4}t\sin(\omega t)$ qui ne pose pas de problème lorsque t est petit mais lorsque t est de l'ordre de $\dfrac{1}{\delta}$, alors ce terme de perturbation est d'ordre 1. Et cela s'aggrave si t est très grand devant $\dfrac{1}{\delta}$.

III.2.2 - Utilisation de la méthode de Poincaré-Lindstedt

Pour pallier ce problème, l'idée est d'utiliser la méthode de Poincaré-Lindstedt qui consiste à éliminer les termes séculaires en introduisant une seconde variable lente telle que $\tau = \delta t$. En extrayant l'ordre dominant $\theta_0(t, \tau) = 2x(\tau)\cos(\Omega t) - 2y(\tau)\sin(\Omega t)$, on peut éliminer les termes séculaires grâce aux fonctions x et y qui satisfont le système de solvabilité donné par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(\tau) & = & \dfrac{\omega\delta}{4}x(\tau) - (\Omega-\omega)y(\tau) \\ \dot{y}(\tau) & = & (\Omega-\omega)x(\tau) - \dfrac{\omega\delta}{4}y(\tau) \end{array} \right.. \tag{9}$$

En posant $M = \begin{pmatrix} \frac{\omega\delta}{4} & -(\Omega-\omega) \\ \Omega-\omega & -\frac{\omega\delta}{4} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, et $X : \tau \mapsto \begin{pmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \end{pmatrix}$, le système (9) se réécrit :

$$\dot{X}(\tau) = MX(\tau). \tag{10}$$

Q47. Déterminer les valeurs propres, réelles ou complexes, de M.

Q48. Dans le cas où $\left|\frac{\omega\delta}{4}\right| < |\Omega-\omega|$, déterminer si la matrice M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Q49. Toujours dans le cas où $\left|\frac{\omega\delta}{4}\right| < |\Omega-\omega|$, justifier qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que $M = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} i\varphi & 0 \\ 0 & -i\varphi \end{pmatrix}$.

Q50. En résolvant l'équation $\dot{Y}(\tau) = DY(\tau)$, où $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2$ est une fonction en τ de classe C^1, montrer que si $\left|\frac{\omega\delta}{4}\right| < |\Omega-\omega|$, alors les solutions réelles (x, y) du système (9) sont bornées.

Q51. Préciser ce qu'il advient si $\left|\frac{\omega\delta}{4}\right| > |\Omega-\omega|$.

Q52. En déduire les gammes de pulsations Ω pour lesquelles le robot est stable. Conclure quant à la possibilité d'utiliser le robot NATRIX en toutes situations de navigation.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 26 1023 – D'après documents fournis

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de TSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Géométrie des masses : centre d'inertie, matrice d'inertie, théorème de Huygens
- Cinétique : torseurs cinétique et dynamique, énergie cinétique, inertie équivalente
- Dynamique des systèmes de solides : principe fondamental, stratégie d'isolement, équilibrage
- Cinématique du solide : paramétrage, vitesse, taux de rotation et torseur cinématique
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Dérivabilité et convexité
- Équations différentielles linéaires du second ordre
- Équations différentielles linéaires

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/ccinp/tsi