Concours Centrale-Supélec, France

Session 2000, filière MP

Mathématiques 2

Ce que traite le sujet

- Partie I : une norme sur Mat(n, R)
- Partie II : diagonalisation pour n = 2
- Partie III : quelques résultats généraux

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/mp/2000/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

MATHÉMATIQUES II

On se propose dans ce problème d'étudier une méthode de calcul approché des valeurs propres d'une matrice symétrique réelle.

Notations : On désigne par $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, par $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace des matrices symétriques, par $O_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales d'ordre n et par $O_n^+(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales directes (i.e. dont le déterminant vaut 1).

On désigne par $diag(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ la matrice diagonale d'ordre n :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

La notation $A = (a_{i,j})$ signifie que la matrice A de $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ a pour coefficient $a_{i,j}$ en i-ème ligne et j-ème colonne. Dans ce cas, la transposée de A sera notée ${}^tA$ et la trace de A définie par $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Liens entre les parties du problème : La partie I sert dans tout le problème. La partie II traite d'un cas particulier que l'on aura intérêt à traiter soigneusement avant de poursuivre. La partie IV est indépendante de ce qui précède et sert dans V.D - .

Partie I - Une norme sur $Mat(n, \mathbb{R})$

I.A - Montrer que pour tout couple de matrices carrées (A, B), $(Tr(AB)) = Tr(BA)$.

I.B - Montrer que l'application

$\phi : Mat(n, \mathbb{R}) \times Mat(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, définie par : $\phi(A, B) = Tr(A\,{}^tB)$

Filière MP

est un produit scalaire ; calculer en particulier $\phi(A, A)$. On note $\| \ \|$ la norme associée à ϕ. Exprimer $\|A\|^2$ en fonction des $(a_{i,j})$.

I.C - Montrer que pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{i,j}$ de $Mat(n, \mathbb{R})$, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2$$

En déduire la norme de l'application $Tr : Mat(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (norme subordonnée à la norme $\| \ \|$).

I.D - Soit Ω un élément de $O_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour toute matrice A, $\|\Omega A\| = \|A\|$. Prouver que si A est une matrice symétrique, la matrice $B = {}^t\Omega A \Omega$ est elle-même symétrique et que l'on a, en notant $(b_{i,j})$ les coefficients de B :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 .$$

Partie II - Diagonalisation pour n = 2

Soient A une matrice de $S_2(\mathbb{R})$, et Ω une matrice de $O_2^+(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{bmatrix}, \ \Omega = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} .$$

On pose $B = {}^t\Omega A \Omega = (b_{i,j})$.

II.A - Calculer les termes de la matrice B.

II.B - Montrer que

$$\sum_{i=1}^{2} b_{i,i}^2 + 2b_{2,1}^2 = \sum_{i=1}^{2} a_{i,i}^2 + 2a_{2,1}^2 .$$

II.C - On suppose ici que $a_{1,2} \neq 0$. Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $]-\frac{\pi}{4}, \ 0[\cup]0, \frac{\pi}{4}]$, et un seul, tel que $b_{2,1} = 0$ (penser à distinguer deux cas).

Définir la fonction F qui, à une matrice symétrique non diagonale de $S_2(\mathbb{R})$, associe le réel θ ainsi défini.

II.D - Montrer que pour ce choix de θ, la matrice B est diagonale et que $b_{1,1}$ et $b_{2,2}$ sont les valeurs propres de A.

II.E - On donne

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}.$$

Calculer $\theta = F(A)$ puis la matrice B. En déduire les éléments propres de A.

Partie III - Quelques résultats généraux

On définit, pour θ réel, p et q entiers donnés (avec $p<q$), une matrice $\Omega = (\omega_{i,j})$ de $Mat(\mathbb{R},n)$ en posant :

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \cos(\theta) & \dots & \sin(\theta) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\sin(\theta) & \dots & \cos(\theta) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

où $\omega_{p,p} = \omega_{q,q} = \cos(\theta)$, $\omega_{p,q} = \sin(\theta)$ et $\omega_{q,p} = -\sin(\theta)$.
On considère $A = (a_{i,j})$ une matrice de $S_n(\mathbb{R})$ et $B = {}^t\Omega A \Omega$.

III.A - Justifier que $B = (b_{i,j})$ est symétrique et que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2.$$

III.B - Calcul des coefficients de B

III.B.1) Soit $M = (m_{i,j}) = A\Omega$. Exprimer, en fonction de θ et des coefficients de A, les coefficients $m_{i,j}$, $m_{i,p}$ et $m_{i,q}$ lorsque j est un élément de $[1,n]$ distinct de p et de q, i est quelconque dans $[1,n]$.

III.B.2) Exprimer, en fonction des coefficients de A et de θ les coefficients $b_{i,j}$, puis $b_{i,p}$, $b_{i,q}$ pour i, j tous deux différents de p et de q, ainsi que $b_{p,q}$, $b_{p,p}$ et $b_{q,q}$.

III.B.3) Donner une relation simple entre les matrices.

$$\begin{bmatrix} b_{p,p} & b_{p,q} \\ b_{q,p} & b_{q,q} \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} a_{p,p} & a_{p,q} \\ a_{q,p} & a_{q,q} \end{bmatrix}.$$

En déduire que

$$b_{p,p}^2 + b_{q,q}^2 + 2b_{p,q}^2 = a_{p,p}^2 + a_{q,q}^2 + 2a_{p,q}^2 .$$

III.B.4) On suppose que $a_{p,q}$ est non nul, montrer qu'il existe un réel $\theta_{p,q}$ appartenant à $]-\frac{\pi}{4}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{4}]$ et un seul, tel que $b_{p,q} = 0$.

Partie IV - Suites dans espace vectoriel normé de dimension finie

Soit E un espace vectoriel normé, de dimension finie, dont la norme est notée $\| \|$.

IV.A - On se propose de montrer le résultat suivant : une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'espace normé $(E, \| \|)$ telle que :

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, (1)

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet un nombre fini de valeurs d'adhérences, (2)

$\lim_{n \to \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$, (3)

est convergente.

On considère donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifie les propriétés (1), (2) et (3) et M un entier strictement supérieur à 1 ; on note a_μ pour $1 \le \mu \le M$, les valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

IV.A.1) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, k \ge n_\varepsilon \Rightarrow x_k \in \bigcup_{\mu=1}^{M} B(a_\mu, \varepsilon),$$

où $B(a_\mu, \varepsilon)$ est la boule ouverte de centre a_μ et de rayon ε.

IV.A.2) En déduire, par un choix judicieux de ε, qu'il existe $\mu \in [1, M]$ et un entier n_0 tels que : $k \ge n_0 \Rightarrow x_k \in B(a_\mu, \varepsilon)$, et conclure.

Partie V - Méthode de Jacobi : une suite de matrices convergeant vers une diagonalisée de A

Soit A un élément de $S_n(\mathbb{R})$. On note $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ ses valeurs propres, éventuellement répétées avec leur multiplicité.

On définit par récurrence une suite de matrices $A_k = (a_{i,j}^{(k)})$ en posant $A_0 = A$, et $A_{k+1} = {}^t\Omega_k A_k \Omega_k$ où Ω_k est construite de la façon suivante :

si A_k est diagonale, Ω_k est la matrice unité,

sinon la matrice Ω_k est définie comme dans la partie III, en choisissant :

(1) deux entiers p et q tels que $p<q$ et $a_{p,q}^{(k)} = \sup_{i \neq j} \left|a_{i,j}^{(k)}\right|$

(2) $\theta = \theta_k$, dans $]-\frac{\pi}{4}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{4}]$ tel que $\operatorname{cotan}(2\theta_k) = \dfrac{a_{q,q}^{(k)} - a_{p,p}^{(k)}}{2a_{p,q}^{(k)}}$.

On observera que p et q dépendent de k et on pourra noter, si le besoin s'en fait sentir, $p = p_k$ et $q = q_k$.

V.A - Donner une conséquence du choix de θ_k pour la matrice A_{k+1}.

V.B - On pose $A_k = D_k + B_k$ avec $D_k = diag(a_{i,i}^k)$ et $\varepsilon_k = \|B_k\|^2$, la norme étant définie comme dans la partie I.

V.B.1) Montrer que $\varepsilon_k \leq n(n-1)\left|a_{p,q}^{(k)}\right|^2$.

V.B.2) Montrer, en utilisant la question III.B.3, que $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k - 2\left|a_{p,q}^{(k)}\right|^2$.

V.B.3) En déduire que

$\varepsilon_{k+1} \leq \left(1 - \dfrac{2}{n(n-1)}\right)\varepsilon_k$, puis que $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$.

Que peut-on dire de la suite $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans l'espace normé $(Mat(\mathbb{R},n), \|\ \|)$?

V.C - On veut montrer que la suite des matrices diagonales $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$ admet un nombre fini de valeurs d'adhérence dans $E = (Mat(\mathbb{R},n), \|\ \|)$, qui sont toutes des matrices de la forme $diag(\lambda_{\sigma_1},\ldots,\lambda_{\sigma_n})$ où la suite finie $(\lambda_{\sigma_1},\ldots,\lambda_{\sigma_n})$ est obtenue par permutation des valeurs propres de A. Pour cela considérons une suite extraite que nous noterons $(D_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ convergeant vers une matrice Δ dans l'espace E ($(k_l)_{l \in \mathbb{N}}$ désigne une suite d'entiers naturels strictement croissante).

V.C.1) Montrer que la limite Δ est une matrice diagonale.

V.C.2) Montrer que A et Δ ont le même polynôme caractéristique.

V.C.3) Conclure.

V.D - Convergence de la méthode

V.D.1) Montrer que la suite (D_k) est bornée et que $\lim_{k \to \infty} (D_{k+1} - D_k) = 0$.

V.D.2) Montrer que les suites (D_k) et (A_k) convergent dans $(Mat(\mathbb{R}, n), \| \|)$ et dire en quoi l'algorithme ainsi défini permet d'obtenir une valeur approchée des valeurs propres de A.

Partie VI - Étude d'un exemple pour $n = 3$

On donne ici

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 12 \\ 3 & 12 & -1 \end{bmatrix}$$, et on définit la suite A_k comme dans V - .

VI.A - Déterminer θ_0 puis Ω_0. Donner les valeurs rationnelles des coefficients $(a_{i,j}^{(1)})$.

VI.B - Calculer de la même façon θ_1, Ω_1 et les coefficients $(a_{i,j}^{(2)})$ de A_2.

VI.C - Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A. Observation ?

••• FIN •••

Prepa Help

prepahelp.com · classes préparatoires, Maroc et France

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

s et endomorphismes des espaces euclidiens

toriels normés

ismes et des matrices carrées

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/mp