Concours Centrale-Supélec, France

Session 2005, filière MP

Option sciences industrielles de l'ingénieur

Ce que traite le sujet

- Partie I : dispositifs d'orientation des axes des tuyères
- Partie II : étude du servo-vérin
- Partie III : pulsations propres et résonance de la tuyère centrale

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/mp/2005/si

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

LA FUSÉE ARIANE 5

Suite à l'échec du tout premier vol du lanceur Ariane 5, deux vols de qualification ont été réalisés avec succès les 30 octobre 1997 et 21 octobre 1998. Ceux-ci ont permis de faire quelques modifications et le premier vol commercial a ensuite eu lieu le 10 décembre 1999. Depuis cette date, de nombreux lancements ont été réalisés avec un taux de succès qui place cette fusée parmi les plus compétitives actuellement.

Avec une technologie à corps central à deux étages et deux propulseurs latéraux, Ariane 5 a marqué une évolution notable dans la famille des lanceurs européens. Ce choix permet d'obtenir une grande source de puissance au décollage et une meilleure gestion de la position et de la répartition des masses. En revanche, il induit des problèmes de couplage importants qui nécessitent une orientation de l'axe des tuyères situées en extrémité du corps central et des deux propulseurs latéraux.

La fusée Ariane 5 est globalement composée d'un corps central **CC** à deux étages et deux propulseurs latéraux **PG** et **PD** (voir photographie 1) :

- Le 1er étage, commun à tous les types de lancement, est appelé **EPC** comme **Étage Principal Cryogénique**, car il transporte de l'oxygène et de l'hydrogène liquides refroidis à des très basses températures. Ces fluides permettent d'alimenter le moteur cryogénique Vulcain situé en extrémité basse de cet étage. La tuyère de ce moteur est orientable selon deux directions orthogonales et elle est refroidie en permanence par la circulation de l'oxygène et de l'hydrogène liquide.
- La configuration du 2ème étage, appelé **EPS** comme **Étage Propulsif Stockable**, peut varier selon la mission. Il contient le satellite ou les éléments à propulser.
- De chaque côté du corps central **CC** à deux étages sont fixés les propulseurs **PG** et **PD** ou **EAP** comme **Étages Accélérateurs à Poudre**. Les tuyères **TG** et **TD** placées respectivement aux extrémités de ces deux **EAP** sont aussi orientables selon deux directions orthogonales. Allumés peu après le décollage, les deux **EAP** fonctionnent à pleine puissance pendant une durée de 130 secondes puis, lorsque leurs réservoirs sont vides, ils se détachent du

Filière MP

corps central **CC** et retombent dans la mer où leurs carcasses sont ensuite récupérées.

Photographie 1 : fusée Ariane 5



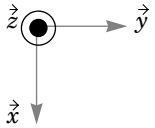
Corps central CC à deux étages

Le 1er étage, ou **EPC** (Étage Principal Cryogénique), est situé dans la partie basse de ce corps central ; la tuyère de cet étage est allumée avant le décollage et le reste jusqu'à séparation des deux étages.

Le 2ème étage, ou **EPS** (Ensemble Propulsif Stockable), est situé dans la partie haute de ce corps central ; la tuyère de cet étage est allumée au moment de la séparation des deux étages.

Moteur Vulcain et sa tuyère centrale TC

La tuyère centrale **TC** du moteur Vulcain du 1er étage du corps central **CC** est situé en extrémité basse de ce corps. Elle est orientable autour des directions $\vec{y}$ et $\vec{z}$ de $\pm 7°$.



Propulseurs latéraux PG et PD

Les deux **EAP** (Étage Accélérateurs à Poudre) latéraux sont utilisés au décollage pour apporter de la puissance et sont ensuite largués. En extrémité du propulseur gauche $(y < 0)$ noté **PG**, se trouve la tuyère gauche **TG**, orientable autour des directions $\vec{y}$ et $\vec{z}$ de $\pm 6°$. En extrémité du propulseur droit $(y > 0)$, noté **PD**, se trouve la tuyère droite **TD**, orientable autour des directions $\vec{y}$ et $\vec{z}$ de $\pm 6°$.

Lors d'un décollage et d'un vol de la fusée Ariane 5, de très nombreuses contraintes définies par un cahier des charges doivent être respectées. Toutes, bien évidemment, ne seront pas étudiées dans ce sujet, mais nous nous intéresserons au dispositif d'orientation de la fusée nécessaire à la poursuite de trajectoires impo-

sées, et à la limitation de certaines fréquences de résonance pour limiter les couplages vibratoires.

Pour cela, nous ferons respectivement dans chacune des trois parties de ce sujet :

- l'analyse de l'architecture générale des solutions technologiques retenues pour orienter les tuyères,
- la mise en évidence du risque de résonance à basse fréquence du système d'orientation d'une tuyère, réalisé avec deux servo-vérins hydrauliques, et à l'analyse de la solution retenue pour limiter l'amplitude de la résonance,
- la vérification des fréquences de résonance de la tuyère centrale **TC** du moteur Vulcain qui doivent rester inférieures à 20 Hz lors de la phase de décollage sur une hauteur de 2 000 mètres.

Partie I - Étude des dispositifs d'orientation des axes des tuyères centrale TC, droite TD et gauche TG

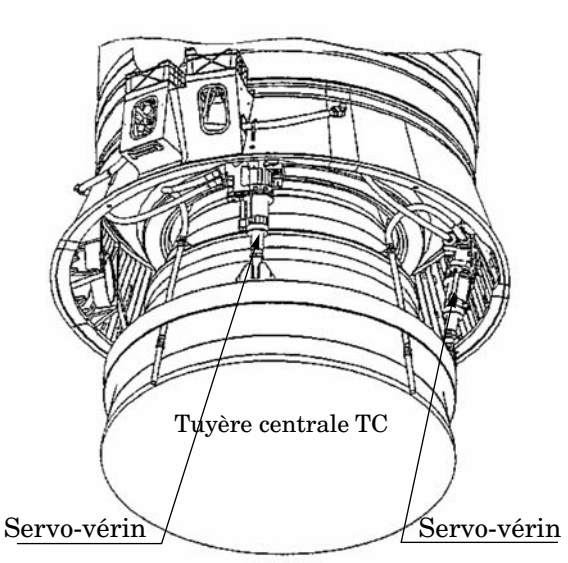
L'objectif de cette partie est d'analyser l'architecture générale des solutions technologiques retenues pour orienter les axes des tuyères.

Pour diriger la fusée on doit orienter la force propulsive. La solution retenue consiste à orienter les tuyères plutôt qu'à dévier les jets des moteurs.

Pour orienter une tuyère, deux vérins hydrauliques ont été choisis pour délivrer la puissance élevée nécessaire. Ce système hydraulique convertit la pression interne en énergie mécanique d'orientation des tuyères.

Comme il faut contrôler constamment le braquage des deux vérins asservis en position, deux servo-vérins hydrauliques ont donc été adoptés (voir figure 1.1. qui représente les deux servo-vérins qui s'appliquent sur la tuyère centrale **TC**).

Figure 1.1 : tuyère centrale TC et les deux servo-vérins



Pour orienter les tuyères autour des directions $\vec{y}$ (axe de tangage) et $\vec{z}$ (axe de lacet) on utilise l'élongation de servo-vérins placés dans des plans bissecteurs aux plans $(\vec{x},\vec{z})$ et $(\vec{x},\vec{y})$. La figure 1.2. définit les axes de tangage et de lacet, la figure 1.3. définit les plans bissecteurs aux plans $(\vec{x},\vec{z})$ et $(\vec{x},\vec{y})$, la figure 1.4. montre l'implantation des servo-vérins pour la tuyère centrale **TC**.

Figure 1.3 : position relative des servo-vérins par rapport à la tuyère centrale TC

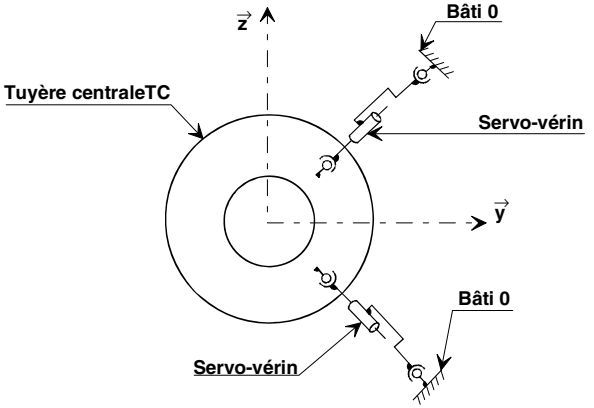


Figure 1.2 : axes de tangage, de lacet et de roulis

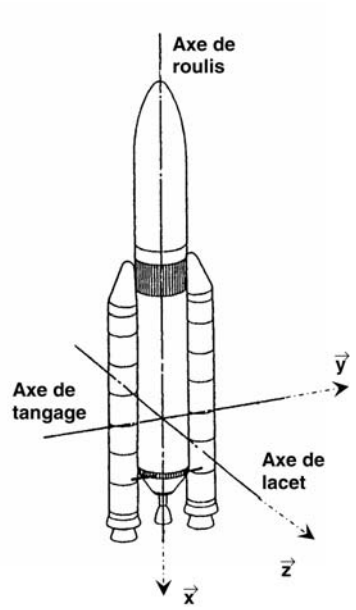
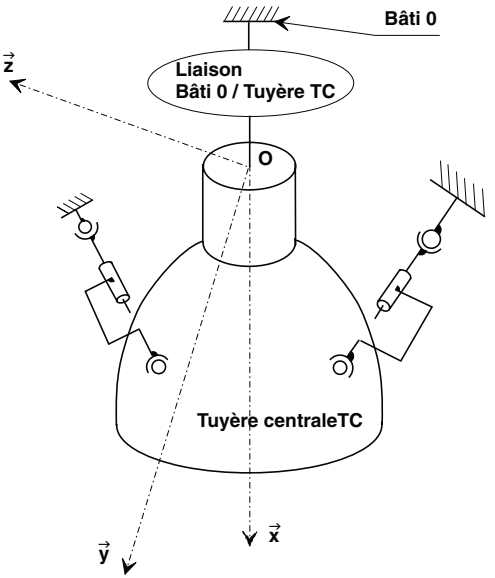
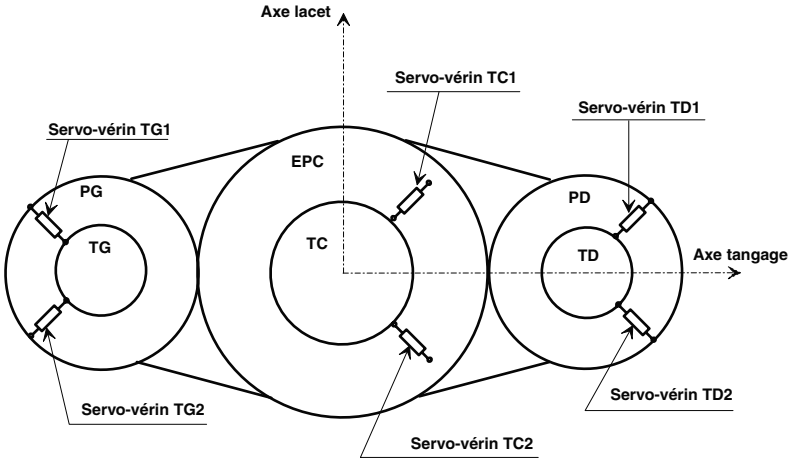


Figure 1.4 : schématisaton de l'implantation des servo-vérins



1.1 - La figure 1.5. ci-dessous est une représentation synoptique de la position des tuyères et des servo-vérins. Le pilotage de la fusée est réalisé en orientant les tuyères **TC**, **TD** et **TG**.

Figure 1.5 : représentation synoptique des servo-vérins et des tuyères



Pour obtenir un braquage de la fusée suivant l'axe de lacet, l'axe de tangage ou l'axe de roulis, il est nécessaire de piloter les servo-vérins TC1, TC2, TD1, TD2, TG1 et TG2.

Dans le tableau incomplet ci-dessous, le mouvement d'une (ou plusieurs) tige(s) de servo-vérins est (sont) imposé(s) pour chacun des braquages en lacet, en tangage et en roulis et les notations suivantes ont été adoptées : + la tige du servo-vérin sort, - la tige du servo-vérin rentre, **0** la tige du servo-vérin reste immobile.

	Servo-vérin TC1	Servo-vérin TC2	Servo-vérin TD1	Servo-vérin TD2	Servo-vérin TG1	Servo-vérin TG2
Braquage en roulis	**0**	**0**	**+**			
Braquage en tangage						-
braquage en lacet			-			

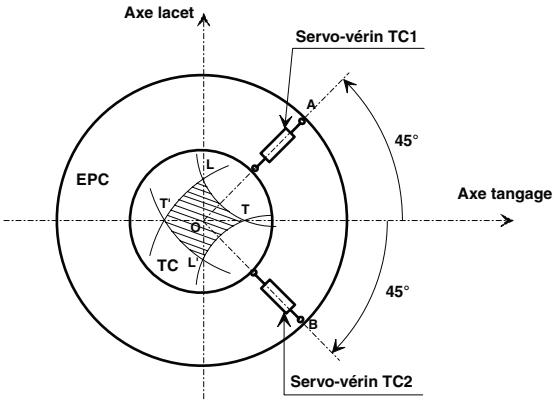
Recopier et compléter ce tableau sur la copie.

1.2 - La figure 1.6. représente la tuyère centrale **TC** avec les servo-vérins **TC1** et **TC2** à mi-course et situés dans les plans bissecteurs.

Sur cette figure, le lieu des positions possibles du point O qui appartient à l'axe de la tuyère centrale **TC** est la zone hachurée délimitée par les quatre arcs de cercle LT, $L'T'$, $T'L$, et $L'T$. Ces arcs de cercle ont été obtenus en traçant les cercles de rayons $AO \pm \frac{\text{course}}{2}$ centrés en A et B, respectivement centre de la liaison $L_{TC1/EPC}$ et $L_{TC2/EPC}$.

Justifier, sans faire de démonstration, que le fait de placer les servo-vérins **TC1** et **TC2** dans des plans bissecteurs permet d'obtenir une plus grande amplitude de tangage seul et de lacet seul.

Figure 1.6 : tuyère centrale TC et servo-vérins représentés à mi-course



1.3 - Le cahier des charges impose pour l'ensemble tuyère centrale **TC** - tiges de servo-vérins - corps de servo-vérins - bâti **0**, représenté figure 1.4., deux critères :

- le premier est que la tuyère centrale **TC** doit être bloquée pour une élongation des servo-vérins imposée (servo-vérins bloqués),
- le deuxième est que l'ensemble soit isostatique.

a) Quelle doit être la mobilité utile maximale de l'ensemble tuyère centrale **TC** - tiges de servo-vérins - corps de servo-vérins - bâti **0**, pour vérifier le premier critère du cahier des charges sachant que :

- la position de la tuyère centrale **TC** est commandée par les deux servo-vérins qui ont chacun une seule mobilité utile,
- bloquer un servo-vérin correspond à annuler sa mobilité utile ?

b) Dans un premier temps, deux solutions ont été retenues pour réaliser la liaison tuyère centrale **TC** - bâti **0**. Elles sont représentées sur les figures 1.7. et 1.8. ci-dessous. Sur la figure 1.7., la solution retenue est une liaison sphérique de centre O. Sur la figure 1.8., la solution retenue est une liaison type cardan de centre O.

Une étude cinématique de l'ensemble tuyère centrale **TC** – tiges de servo-vérins – corps de servo-vérins – bâti **0** fait apparaître un système d'équations de rang $r_c = 12$, quelle que soit la solution retenue pour la liaison tuyère – bâti **0**.

Figure 1.7 : solution avec une liaison rotule

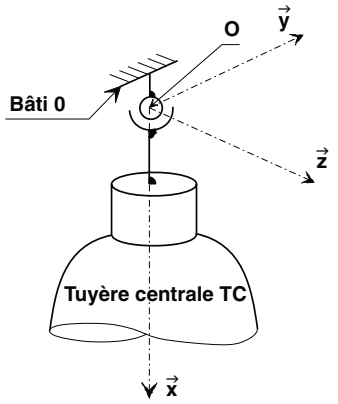
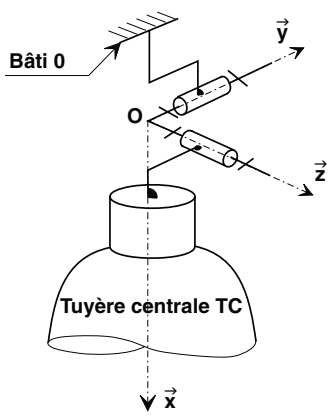


Figure 1.8 : solution avec une liaison type Cardan



Préciser clairement la méthode à utiliser pour déterminer ce rang : **seule la méthode est demandée mais en aucun cas il ne faut effectuer les calculs**.

Déterminer le degré de mobilité et le degré d'hyperstatisme de l'ensemble tuyère centrale **TC** – tiges de servo-vérins – corps de servo-vérins – bâti **0** pour chacune des deux solutions.

c) Sachant que 4 mobilités internes sont dues aux rotations des tiges et des corps des vérins autour de leur axe respectif, conclure quant au choix de la solution retenue pour le respect du deuxième critère du cahier des charges.

Partie II - Étude du servo-vérin

Une étude fréquentielle, non demandée dans ce sujet, montre que les fréquences de la loi de pilotage de la fusée doivent être faibles. L'objectif de cette partie est de mettre en évidence le risque de résonance à basse fréquence du système d'orientation d'une tuyère, réalisé avec deux servo-vérins hydrauliques, et d'analyser la solution retenue pour limiter l'amplitude de la résonance.

Pour cette étude le modèle simplifié de comportement utilisé pour un servo-vérin déplaçant une charge de masse M est représenté sur la figure 2.1. ci-après.

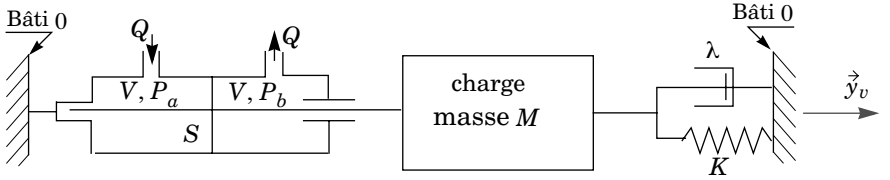
Les caractéristiques du servo-vérin et du fluide utilisé sont : S la surface utile du vérin et B le module de compressibilité du fluide.

Soit $y(t)$ la variation de déplacement de la charge par rapport à la position d'équilibre obtenue en l'absence de pression. La variation $y(t)$ étant petite, on peut faire les hypothèses suivantes :

- les volumes des deux chambres du vérin sont identiques et égaux à V,
- les débits entrant et sortant sont identiques et égaux à Q.

La charge de masse M est liée au bâti par un ressort de raideur K et un amortisseur de coefficient λ.

Figure 2.1 : modèle d'un servo-vérin



L'étude hydraulique du servo-vérin et notamment l'étude des débits de compressibilités et de déformations nous permet d'écrire :

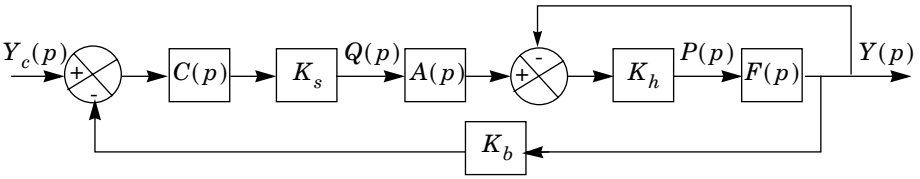
$$Q = S\dot{y} + \frac{V}{2B}\dot{P} \text{ avec } P = P_a - P_b .$$

L'étude mécanique de la charge nous permet d'écrire :

$$M\ddot{y} = PS - Ky - \lambda\dot{y} . \qquad (1)$$

Le débit Q est commandé par un servo-distributeur (association d'une servo-valve et d'un distributeur), non représenté ici et de fonction de transfert : K_s. La représentation sous forme de schéma-bloc du servo-vérin asservi en position est donnée sur la figure 2.2. ci-dessous avec $K_b = 1$:

Figure 2.2. : schéma-bloc d'un servo-vérin



Dans ce schéma-bloc, $Y_c(p)$ est la transformée de Laplace de la consigne de position $y_c(t) = y(t)$ du servo-vérin.

2.1 - Préciser la démarche à utiliser pour obtenir l'équation (1) : système isolé, bilan des actions mécaniques en précisant leurs expressions, hypothèses simplificatrices formulées, théorème utilisé …

2.2 - La première étude est menée avec $\boldsymbol{C(p) = 1}$. Déterminer les fonctions de transfert $A(p)$, $F(p)$ et le gain K_h.

2.3 - Sur l'annexe 2.1. sont tracés différents diagrammes du servo-vérin asservi en position :

- Diagramme de Bode en gain de la fonction de transfert en boucle fermée.
- Diagramme de Black de la fonction de transfert en boucle ouverte, tracé sur l'abaque de Black-Nichols avec un zoom autour du point $(0\text{ dB}, -180°)$.
- Réponse indicielle (entrée unitaire) de la fonction de transfert en boucle fermée.

À partir de ces diagrammes et sachant que le numérateur de la fonction de transfert en boucle fermée est un gain pur, identifier l'ordre du système en boucle fermée, son gain statique et déterminer sa fréquence de résonance. Justifier vos réponses.

2.4 - Le cahier des charges du servo-vérin définit certains critères :

- Écart nul en régime permanent en réponse à un échelon de position.
- Temps de réponse à $5\ \% = 0,15\text{ s}$.
- Marge de gain $\geq 6\text{ dB}$, marge de phase $\geq 45°$.

Vérifier si tous les critères ci-dessus sont respectés si $C(p) = 1$. Justifier vos réponses.

2.5 - Le système est corrigé par un dispositif appelé filtre réjecteur. La pulsation propre du filtre réjecteur a été calée sur la pulsation de résonance ω_R du système non corrigé. La fonction de transfert du correcteur est

$$C(p) = \frac{p^2 + 2z_1\omega_R p + \omega_R^2}{p^2 + 2z_2\omega_R p + \omega_R^2}.$$

z_1 et z_2 sont des coefficients d'amortissement positifs et inférieurs à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_1 < z_2$. Donner l'allure du diagramme de Bode réel, en gain, du correcteur.

2.6 - Sur l'annexe 2.2. sont tracés différents diagrammes du système corrigé :

- Diagramme de Bode en gain de la fonction de transfert en boucle fermée du système corrigé.
- Diagramme de Black de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé, tracé sur l'abaque de Black-Nichols.
- Réponse indicielle (entrée unitaire) de la fonction de transfert en boucle fermée du système corrigé.

Conclure quant au respect des critères du cahier des charges définis à la question 2.4. En fonction des diagrammes de Bode fournis à l'annexe 2.2. et de celui obtenu à la question 2.5., préciser l'apport de ce correcteur.

Partie III - Partie 3. Étude des pulsations propres non amorties de la tuyère centrale TC, des coefficients d'amortissement et vérification des conditions de résonance de la structure

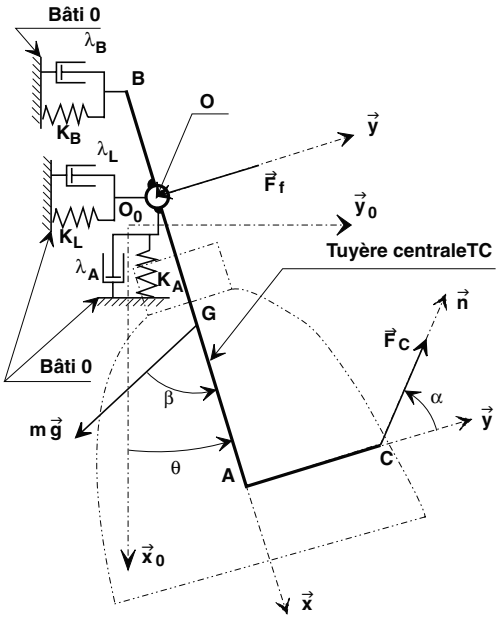
L'objectif de cette partie est de vérifier que les fréquences de résonance de la tuyère centrale ***TC*** *du moteur Vulcain restent inférieures à* 20 Hz *lors de la phase de décollage sur une hauteur de 2 000 mètres. Cette limitation est choisie pour éviter les couplages vibratoires avec la structure de la fusée et la commande du système d'orientation par les deux servo-vérins hydrauliques.*

Pour cette étude, le modèle de comportement utilisé pour la tuyère centrale **TC** est représenté sur la figure 3.1.. Sur cette figure, la forme réelle de la tuyère est représentée en trait mixte fin à deux tirets.

Il s'agit d'un ensemble construit autour d'une articulation en O montée sur un ressort axial et un ressort latéral de raideur respective K_A et K_L et sur deux amortisseurs de coefficient respectif λ_A et λ_L. La rigidité et l'amortissement de la timonerie liée au bâti **0** sont modélisés respectivement par un ressort de raideur K_B et un amortisseur de coefficient λ_B. Ces trois ressorts et ces trois amortisseurs sont liés au bâti **0**.

Sur cette figure, la tuyère centrale **TC** est représentée dans une position d'orientation quelconque par rapport à la fusée.

Figure 3.1. : modèle de comportement utilisé pour la tuyère centrale TC



Paramétrage

- Le repère $(O_0, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0} = \vec{z})$ lié au bâti est supposé galiléen pendant l'étude.

- Le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z_0} = \vec{z})$ est lié à la tuyère centrale **TC**.
- $\overrightarrow{O_0O} = x(t)\vec{x_0} + y(t)\vec{y_0}$.
- $(\vec{x_0}, \vec{x}) = (\vec{y_0}, \vec{y}) = \theta$.
- $(\vec{g}, \vec{x}) = \beta$ avec β variable de valeur maximale $\beta_{Maxi} = 10°$.
- $(\vec{y}, \vec{n}) = \alpha$ avec α variable de valeur moyenne $\alpha = 80°$.
- $AC = L_1 = 1,35$ m $\qquad OA = L_2 = 1,62$ m.
- $OB = L_3 = 1,10$ m $\qquad OG = L_4 = 0,75$ m.

Caractéristiques des ressorts et des amortisseurs

- $K_A = 58 \cdot 10^6$ N·m^{-1} $\qquad \lambda_A = 5 \cdot 10^5$ N·s·m^{-1}.
- $K_B = 24 \cdot 10^4$ N·m^{-1} $\qquad \lambda_B = 18 \cdot 10^4$ N·s·m^{-1}.
- $K_L = 55 \cdot 10^6$ N·m^{-1} $\qquad \lambda_L = 3 \cdot 10^5$ N·s·m^{-1}

Caractéristiques cinétiques de la tuyère centrale TC

La tuyère centrale **TC** est de masse $m = 6400$ kg et la matrice associée à l'opérateur d'inertie de la tuyère exprimée dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z_0})$ est

$$\overline{\overline{I}}\,(O, TC) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}. \text{ On donne : } C = 11 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Actions mécaniques s'appliquant sur la tuyère centrale TC

La tuyère centrale **TC** est soumise (voir figure 3.1.) :

- aux actions dues à la pression appliquée sur le flanc de la tuyère ; l'action globale est un glisseur de support passant par le point O et de résultante $\vec{F}_f = -F_f\vec{y}$ avec $F_f = 25 \cdot 10^5$ N.
- à l'action du vérin ; elle est assimilée à un glisseur de support passant par le point C et de résultante $\vec{F}_C = F_C\vec{n}$ avec $F_C = 1 \cdot 10^5$ N.
- à l'action de la pesanteur qui est inclinée par rapport à la direction $\vec{x}$ d'un angle β (en phase de décollage vertical $\beta = 0°$). L'accélération de la pesanteur g est considérée comme constante et vaut $g = 9,81$ m·s^{-2}.

Pour l'étude proposée, on prendra $\beta = \beta_{Maxi} = 10°$, $\alpha = 80°$ ce qui correspond à la valeur à la fin de la montée avant séparation des deux étages du corps central.

3.1 - Justifier, en précisant les hypothèses formulées et en fonction des modèles couramment retenus pour les ressorts et les amortisseurs, les torseurs d'inter-efforts ci-après :

$$\{T(\text{bâti } 0 \to TC)\}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\text{bâti} \to TC) = -K_L y \vec{y}_0 - \lambda_L \dot{y} \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_0 ,$$

$$\{T(\text{bâti } 0 \to TC)\}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\text{bâti} \to TC) = -K_A x \vec{x}_0 - \lambda_A \dot{x} \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_0$$

$$\{T(\text{timonerie} \to TC)\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\text{timonerie} \to TC) = -K_B(y - L_3 \sin\theta)\vec{y}_0 - \lambda_B(\dot{y} - L_3 \dot{\theta}\cos\theta)\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

3.2 - Faire le bilan des actions extérieures qui s'appliquent sur la tuyère centrale **TC**, en écrivant pour chaque action mécanique le torseur associé.

3.3 - Déterminer les trois équations différentielles, **sous forme littérale**, faisant intervenir les paramètres x, y et θ, obtenues par projection dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z})$ du Principe Fondamental de la Dynamique appliqué en O au modèle de la tuyère centrale **TC** proposé sur la figure 3.1..

3.4 - Sachant que les paramètres x, y et θ restent voisins de zéro, nous avons

$$\cos\theta \approx 1 \ , \ \sin\theta \approx \theta \ , \ \cos(\beta - \theta) = \cos\beta + \theta \sin\beta \ , \ \sin(\beta - \theta) = \sin\beta - \theta\cos\beta \ ,$$
$$\cos(\alpha + \theta) = \cos\alpha - \theta\sin\alpha \ , \ \sin(\alpha + \theta) = \sin\alpha + \cos\alpha \ .$$

En considérant que les variations des paramètres x, y et θ restent très petites en amplitude et en vitesse, et en négligeant les infiniment petits du second et du troisième ordre, linéariser alors ces trois équations différentielles. Écrire ces trois équations linéarisées sous la forme :

$$[M](\ddot{q}) + [C](\dot{q}) + [K](q) = [A], \text{ où } (\ddot{q}) = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix}, (\dot{q}) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}, (q) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix},$$

$[M]$ matrice de masse, $[C]$ matrice d'amortissement et $[K]$ matrice de raideur. L'application numérique, non demandée, donne :

$$\begin{bmatrix} 64\cdot10^2 & 0 & 0 \\ 0 & 64\cdot10^2 & 48\cdot10^2 \\ 0 & 48\cdot10^2 & 11\cdot10^3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 5\cdot10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 48\cdot10^4 & -2\cdot10^5 \\ 0 & -2\cdot10^5 & 22\cdot10^4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 58\cdot10^6 & 0 & -249\cdot10^4 \\ 0 & 55\cdot10^6 & -227\cdot10^3 \\ 0 & 26\cdot10^4 & 29\cdot10^4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -366\cdot10^2 \\ -249\cdot10^4 \\ 153\cdot10^3 \end{pmatrix}.$$

3.5 - La matrice inverse de la matrice M s'écrit :

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} 1,5625\cdot10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 2,32265\cdot10^{-4} & -1,0135\cdot10^{-4} \\ 0 & -1,0135\cdot10^{-4} & 1,3513\cdot10^{-4} \end{bmatrix}.$$

Proposer un algorithme, utilisant la méthode du pivot de GAUSS, pour inverser une matrice.

3.6 - Sachant que les racines carrées des valeurs propres de la matrice $[K'] = [M]^{-1}[K]$ correspondent aux pulsations propres non amorties, calculer ces pulsations propres non amorties (les résultats numériques obtenus directement à la calculatrice sont autorisés).

3.7 - Si $[P]$ est la matrice des vecteurs propres de la matrice $[K'] = [M]^{-1}[K]$ exprimée dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z})$, alors les matrices $[M^*] = [P]^T[M][P]$, $[C^*] = [P]^T[C][P]$ et $[K^*] = [P]^T[K][P]$ s'écrivent respectivement :

- $[M^*] = [P]^T[M][P] = \begin{bmatrix} 6400 & 265,01 & 275,29 \\ 265,01 & 3\,614,35 & 9,04 \\ 275,29 & 9,04 & 11\,052,90 \end{bmatrix}$,
- $[C^*] = [P]^T[C][P] = \begin{bmatrix} 500\,000 & 20\,703,90 & 21\,507,24 \\ 20\,703,90 & 585\,076,31 & -266\,858,82 \\ 21\,507,24 & -266\,858,82 & 217\,962,46 \end{bmatrix}$
- $[K^*] = [P]^T[K][P] = \begin{bmatrix} 0,58\cdot10^8 & 340,19\cdot10^4 & 7\,195,70 \\ 240\,165,24\cdot10^4 & 463,97\cdot10^5 & 236,25 \\ 249\,483,97\cdot10^4 & 116,02\cdot10^3 & 288,90\cdot10^3 \end{bmatrix}$

Si les éléments des matrices $[M^*]$, $[C^*]$ et $[K^*]$ sont notés respectivement m^*_{ij}, c^*_{ij} et k^*_{ij} alors on supposera en première approximation que les coefficients d'amortissement s'écrivent :

$$\xi_{ii} = \frac{c_{ii}}{2\sqrt{k^*_{ii} m^*_{ii}}}.$$

Nous obtenons donc les valeurs de ces facteurs d'amortissement : $\xi_{11} = 0,41$, $\xi_{22} = 0,692$ et $\xi_{33} = 1,928$ sachant que ξ_{22} correspond à la plus grande des pulsations propres non amorties trouvées à la questions 3.6. et ξ_{33} à la plus petite.

Conclure quant au respect du critère relatif aux fréquences de résonance imposé par le cahier des charges : les fréquences de résonance de la tuyère centrale **TC** du moteur Vulcain restent inférieures à 20 Hz.

ANNEXE 2.1.

Diagramme de Bode en gain de la fonction de transfert en boucle fermée si $C(p) = 1$

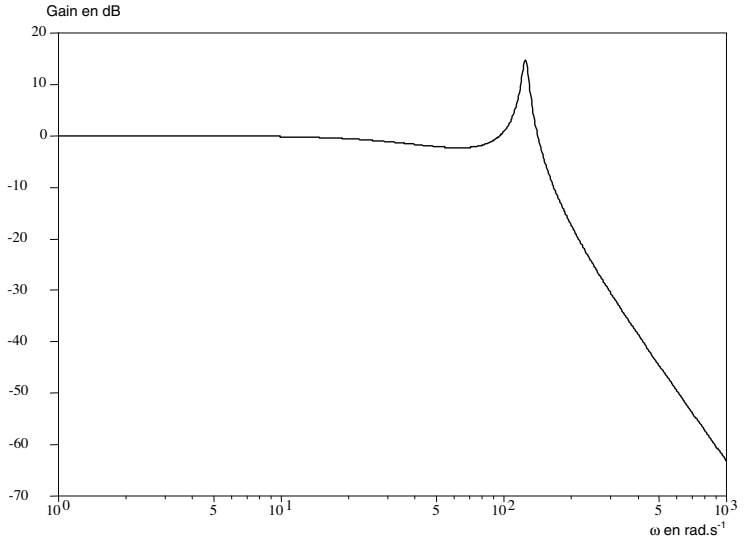
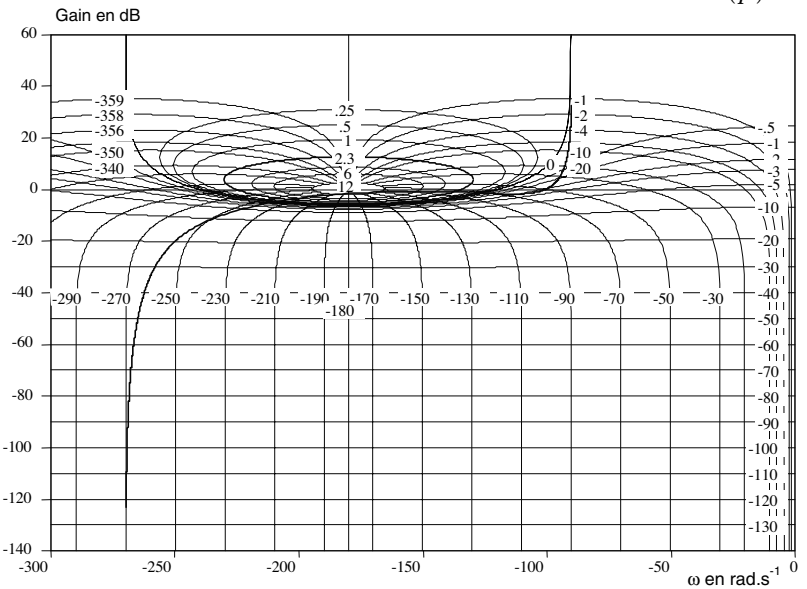
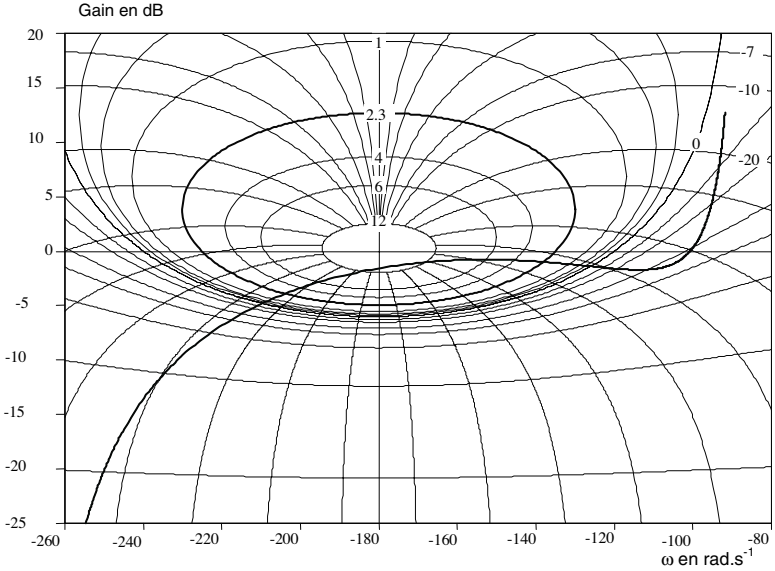


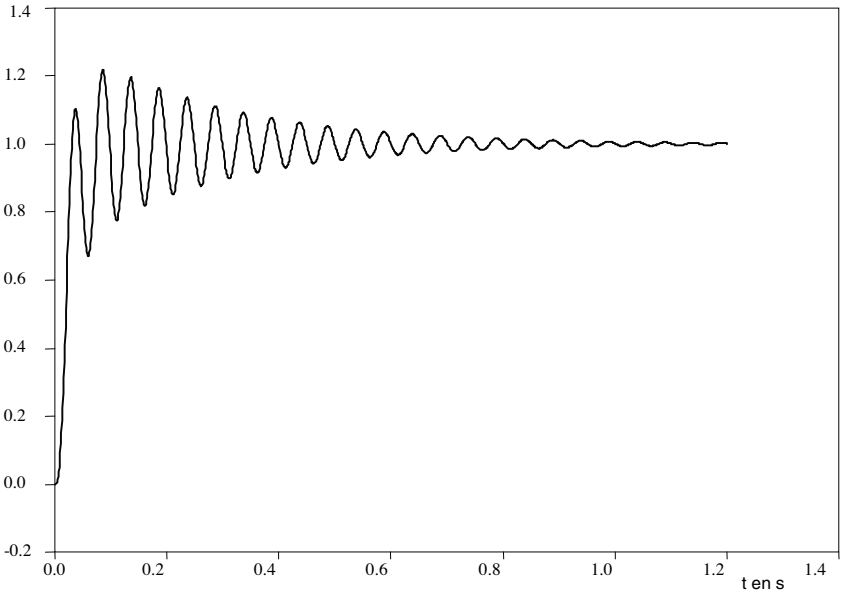
Diagramme de Black de la fonction de transfert en boucle ouverte si $C(p) = 1$



Zoom autour du point $(0\text{ dB}, -180°)$ du diagramme de Black de la fonction de transfert en boucle ouverte si $C(p) = 1$



Réponse indicielle (entrée unitaire) de la fonction de transfert en boucle fermée si $C(p) = 1$



ANNEXE 2.2.

Diagramme de Bode en gain de la fonction de transfert en boucle fermée du système corrigé

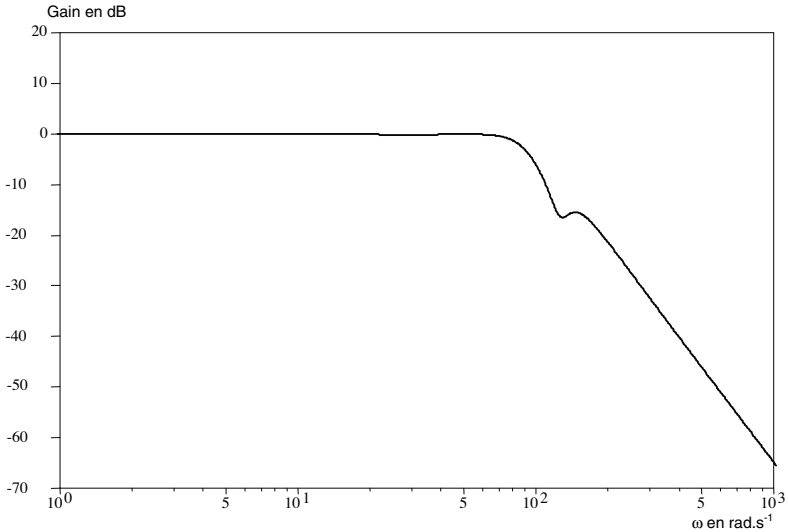
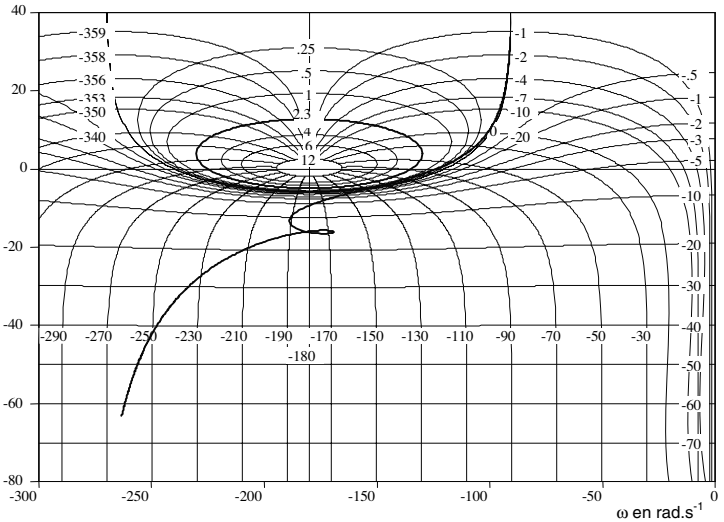
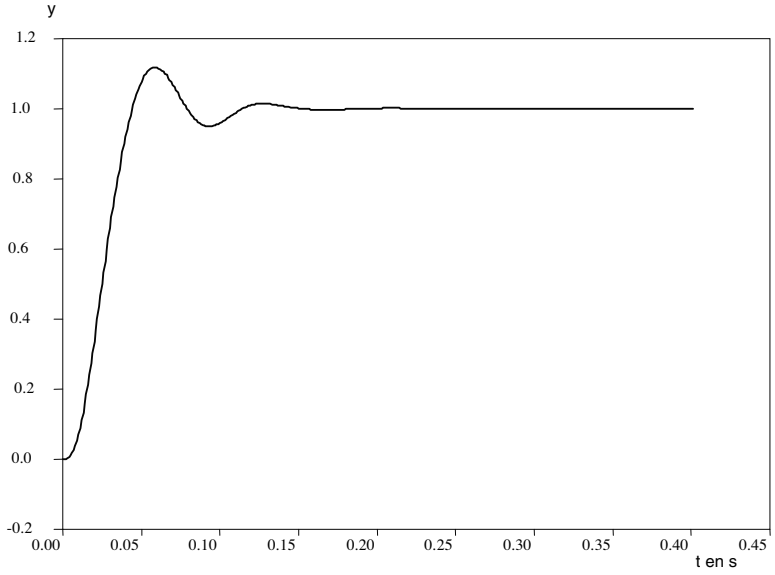


Diagramme de Black de la fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé



Réponse indicielle (entrée unitaire) de la fonction de transfert en boucle fermée du système corrigé



••• FIN •••

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Chaînes de solides : liaisons équivalentes, mobilité et hyperstatisme
- Modélisation des liaisons, graphe des liaisons et schéma cinématique
- Modélisation des systèmes asservis : structure, SLCI, transformée de Laplace, schéma-blocs
- Réponse fréquentielle et diagrammes de Bode
- Performances des systèmes asservis : stabilité, précision, rapidité
- Correction des systèmes asservis : correcteurs P, PI et à avance de phase
- Dynamique des systèmes de solides : principe fondamental, stratégie d'isolement, équilibrage
- Simplification d'un modèle : linéarisation, non-linéarités, pôles dominants, validité

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/mp