Concours Centrale-Supélec, France

Session 2006, filière MP

Mathématiques 1

Ce que traite le sujet

- Partie I : préliminaires
- Partie II : comportement asymptotique de la suite alpha_n
- Partie III : approximation de L(a, b)
- Partie IV : étude de S_r et de B_r

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/mp/2006/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

MATHÉMATIQUES I

Notations et objectifs du problème

- On rappelle qu'une ellipse d'un plan affine euclidien, de demi-axes a et b $(a > b > 0)$, notée $(E_{a,b})$ admet, dans un certain repère orthonormé, une représentation paramétrique de la forme :

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad (1)$$

(t décrit un segment de longueur 2π).

- $\mathscr{C}_{2\pi}$ désigne le $\boldsymbol{C}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques, à valeurs complexes. On munit cet espace du produit scalaire défini par :

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(t)}g(t)dt\,.$$

- Pour $k\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$ et $f\in\mathscr{C}_{2\pi}$ on rappelle les expressions des coefficients de Fourier exponentiels et trigonométriques de f, utiles dans le problème :

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-kit}dt\,,\ a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)dt\,.$$

- **Dans tout le problème** r désignera un nombre réel **appartenant à l'intervalle ouvert** $]0,1[$ et f_r l'élément de $\mathscr{C}_{2\pi}$ défini par : $t\mapsto\left|1-re^{it}\right|$

On désignera aussi par $\mathscr{S}_r$ l'ensemble des suites réelles $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifiant, pour tout entier naturel non nul n, la relation :

$$r(2n+3)a_{n+1} - (1+r^2)2na_n + r(2n-3)a_{n-1} = 0$$

et $\mathscr{B}_r$ le sous-ensemble de $\mathscr{S}_r$ constitué des suites (a_n) telles que le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n z^n$ soit au moins égal à 1.

- Dans tout le problème $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ sera la suite réelle définie par :

$$\alpha_n = \frac{-\binom{2n}{n}}{4^n(2n-1)} \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}\,.$$

(Les candidats qui le préfèrent pourront aussi noter C_{2n}^n le coefficient binomial).

- La partie entière du réel x est notée $[x]$.

Filière MP

- L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation $\sqrt{z}$ ne sera prise en considération que lorsque z est un nombre réel positif.
- L'objectif du problème est l'étude de quelques problèmes asymptotiques relatifs à la longueur, notée $L(a,b)$, de l'ellipse $(E_{a,b})$.

Partie I - Préliminaires

I.A - Préciser sur un dessin la signification géométrique du paramètre t intervenant dans le paramétrage (1).

I.B - Prouver rapidement que $\mathscr{S}_r$ et $\mathscr{B}_r$ sont des $\boldsymbol{R}$- espaces vectoriels et préciser la dimension de $\mathscr{S}_r$.

I.C - Donner **sans démonstration** l'énoncé précis du théorème de Parseval relatif à un élément $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ (les coefficients de Fourier intervenant dans la formule seront les coefficients exponentiels).

Si f et g sont deux éléments de $\mathscr{C}_{2\pi}$, prouver, en justifiant d'abord la convergence absolue de la série, la formule :

$$(f|g) = \overline{c_0(f)}c_0(g) + \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{c_n(f)}c_n(g) + \overline{c_{-n}(f)}c_{-n}(g)).$$

I.D - Soit n un entier naturel. Exprimer $a_n(f_r)$ à l'aide de $c_n(f_r)$.

I.E - Soient a et b deux réels vérifiant $a > b > 0$. On pose $r = \dfrac{a-b}{a+b}$.

Exprimer, en fonction de a, b et de constantes, le réel $\dfrac{L(a,b)}{a_0(f_r)}$.

Partie II - .Comportement asymptotique de la suite $(a_n(f_r))$

II.A - Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $\alpha_n z^n$. On notera $f(z)$ sa somme dans le disque ouvert complexe de centre 0 et de rayon R.

II.B - Soit x un réel appartenant à l'intervalle ouvert $]-R,R[$. Donner une relation entre $(1-x)f'(x)$ et $f(x)$. En déduire une expression simple de la restriction de f à l'intervalle ouvert $]-R,R[$.

II.C - On choisit maintenant un complexe z tel que $|z| < R$. Déterminer une expression très simple de $f(z)^2$.

II.D - Prouver, pour $r \in]0, 1[$ et $t \in \mathbb{R}$, la relation : $\left|f(re^{it})\right|^2 = f_r(t)$.

II.E - Soit n un entier naturel. En utilisant la question I.C et la précédente, prouver l'égalité :

$$\frac{c_n(f_r)}{\alpha_n r^n} = \int_0^{+\infty} \alpha_{[x]} \frac{\alpha_{n+[x]}}{\alpha_n} r^{2[x]} dx .$$

En déduire la limite de cette suite quand l'entier n tend vers l'infini.

II.F - Prouver que, quand $n \to \infty$:

$$a_n(f_r) \sim \frac{\sqrt{1-r^2}\, r^n}{\sqrt{\pi} n^{3/2}} .$$

En quoi ce résultat corrobore-t-il votre cours sur les séries de Fourier ?

Partie III - Approximation de $L(a, b)$

III.A - Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre satisfaite par f_r. En déduire que la suite $(a_n(f_r))$ appartient à $\mathscr{B}_r$.

III.B - Pour tout réel $r \in]0,1[$, on définit deux suites $(A_n(r))_{n \geq 0}$ et $(B_n(r))_{n \geq 0}$ par :

$$A_0(r) = 1 , B_0(r) = 0 , A_1(r) = -\frac{2}{r}(1+r^2) , B_1(r) = 1$$

et les relations de récurrence, valables pour $n \geq 2$:

$$A_n(r) = \frac{2n(1+r^2)}{r(2n-3)} A_{n-1}(r) - \left(\frac{2n+1}{2n-5}\right) A_{n-2}(r)$$

$$B_n(r) = \frac{2n(1+r^2)}{r(2n-3)} B_{n-1}(r) - \left(\frac{2n+1}{2n-5}\right) B_{n-2}(r)$$

on définit également, pour $n \geq 1$, la matrice $M_n(r)$ par :

$$M_n(r) = \begin{pmatrix} A_n(r) & -\dfrac{2n+3}{2n-3} A_{n-1}(r) \\ B_n(r) & -\dfrac{2n+3}{2n-3} B_{n-1}(r) \end{pmatrix} .$$

Pour alléger la rédaction, les candidats pourront remplacer, chaque fois que cela leur paraîtra utile, les expressions $A_n(r)$, $B_n(r)$, $M_n(r)$, par A_n, B_n, M_n .

Pour $n \geq 1$, déterminer une matrice T_n, dont les coefficients dépendent de n et r, telle que pour toute suite $(a_n)_{n \geq 0}$ appartenant à $\mathscr{S}_r$ on ait :

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = T_n \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Écrire, dans le langage de calcul formel de votre choix, des fonctions prenant en argument l'entier n et retournant a_n, A_n, B_n ; a_0, a_1 et r seront considérés comme des variables globales. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $M_n = M_{n-1} T_n$.

En déduire le produit matriciel $M_n \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ indépendamment de n

III.C - Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle qu'existent une suite (ε_n) tendant vers 0, un réel l, un réel $k \in]0, 1[$ et un entier N vérifiant :

$$\forall n > N, |u_n - l| \leq k|u_{n-1} - l| + \varepsilon_n$$

Montrer que $\lim_{n \to \infty} u_n = l$.

III.D - Prouver que :

$$\lim_{n \to \infty} A_n a_n(f_r) = \frac{a_0(f_r)}{1 - r^2}$$

Que dire de la suite de terme général $B_n a_n(f_r)$ lorsque n tend vers l'infini ?

III.E - Soient a et b deux réels tels que $a > b > 0$. On pose $r = \dfrac{a-b}{a+b}$.
À l'aide des questions II.E et III.D, démontrer que la suite (l_n) définie par :

$$\begin{cases} l_0 = (a+b)\pi(1-r^2)^{3/2} \\ l_1 = l_0(1+r^2) \\ l_n = (1+r^2)l_{n-1} - \dfrac{r^2(2n+1)(2n-3)}{4n(n-1)} l_{n-2} \end{cases}$$

converge vers $L(a, b)$.

Partie IV - Étude de $\mathscr{S}_r$ et de $\mathscr{B}_r$

IV.A - Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ un élément de $\mathscr{S}_r$. Prouver l'égalité :

$$a_1 A_n - a_0 B_n = a_{n+1} \det M_n$$

IV.B - Calculer $\det T_n$ puis $\det M_n$. Donner un équivalent de $\det M_n$.

IV.C - Préciser la dimension et une base de $\mathscr{B}_r$. Soit (a_n) un élément de $\mathscr{S}_r$ qui n'appartient pas à $\mathscr{B}_r$. Déterminer un équivalent simple de a_n lorsque $n \to \infty$.

••• FIN •••

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Suites et séries de fonctions
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Fonctions vectorielles et arcs paramétrés
- Séries entières
- Séries numériques et vectorielles
- Suites récurrentes
- Équations différentielles linéaires
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/mp