Concours Centrale-Supélec, France

Session 2008, filière MP

Mathématiques 1

Ce que traite le sujet

- Partie I : quelques résultats généraux
- Partie II : problème approché de dimension finie
- Partie III : une suite de valeurs propres de Q
- Partie IV : valeurs propres de Q
- Partie V : comportement asymptotique

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/mp/2008/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Dans tout ce problème $\mathcal{C}_{2\pi}$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues, 2π-périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ muni du produit scalaire défini par :

$$(f\,|g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

dont la norme associée est notée $||\quad||_2$. Le choix du facteur $\frac{1}{\pi}$ dans la définition du produit scalaire (contrairement à $\frac{1}{2\pi}$ habituellement) s'impose par la nécessité de rendre les fonctions $c_k : x \mapsto \cos(kx)$ et $s_k : x \mapsto \sin(kx)$ unitaires pour $k \in \mathbf{N}^*$. Les coefficients de Fourier trigonométriques d'une fonction f de $\mathcal{C}_{2\pi}$ sont, comme d'habitude, $a_n(f) = (f\,|c_n)$ et $b_n(f) = (f\,|s_n)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $a_0(f) = (f\,|1)$ où 1 est la fonction constante $x \mapsto 1$.

La formule de Parseval pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ prend la forme :

$$||f||_2^2 = \frac{a_0(f)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)^2 + b_n(f)^2$$

E est le sous-espace de $\mathcal{C}_{2\pi}$ constitué des fonctions impaires et E_2 le sous-espace de E des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Une *valeur propre* d'une application linéaire T de E_2 dans E (attention T n'est pas un endomorphisme) est, par définition, un réel λ tel qu'existe un élément f de $E_2 - \{0\}$ vérifiant $T(f) = \lambda f$.

On définit de même la notion de vecteur propre et de sous-espace propre de T.

On fixe une fonction q de classe $\mathcal{C}^1$, paire, 2π-périodique et non constante de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On sait, dans ces conditions, que la fonction q est bornée et on pose :

$$a = \inf\{q(x)\ /\ x \in \mathbf{R}\},\ b = \sup\{q(x)\ /\ x \in \mathbf{R}\} \text{ et } ||q||_\infty = \sup\{|q(x)|\ /\ x \in \mathbf{R}\}.$$

On considère alors les applications linéaires de E_2 dans E définies par :

$$A : y \mapsto -y'' + ay \qquad B : y \mapsto -y'' + by \qquad Q : y \mapsto -y'' + qy$$

On pourra utiliser, sans démonstration, le résultat suivant :

« Soit, pour chaque entier naturel non nul n, $(x_{k,n})_{1\leqslant k\leqslant n}$ une suite de n nombres réels. On suppose :

1. pour tout entier $k \geqslant 1$, la suite $(x_{k,n})_{n\geqslant k}$ est convergente et on note :
$$\lim_{n\to\infty} x_{k,n} = x_k;$$
2. il existe une suite $(\xi_k)_{k\geqslant 1}$ de nombres réels positifs telle que la série de terme général ξ_k converge et :
$$\forall k \geqslant 1, \forall n \geqslant k, |x_{k,n}| \leqslant \xi_k.$$

Alors la série de terme général x_k converge absolument et : $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_{k,n} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ».

Enfin on dit qu'une famille orthonormale $(e_k)_{k\geqslant 1}$ de vecteurs de E est **totale dans** E si 0 est le seul vecteur de E orthogonal à tous les e_k.

L'objectif du problème est l'étude, par diverses méthodes, des valeurs propres de Q. On peut traiter une question du problème sans avoir résolu les précédentes à condition d'en admettre **clairement** les résultats.

Partie I - Quelques résultats généraux

I.A - Dans cette section I.A, λ désigne un nombre réel fixé et on considère l'équation différentielle d'inconnue y :

$$(E_\lambda) : \quad y'' + (\lambda - q)y = 0$$

I.A.1) Énoncer précisément le théorème de Cauchy-Lipschitz adapté à l'équation (E_λ) et exploiter l'unicité pour prouver qu'une solution y de (E_λ) est impaire si et seulement si $y(0) = 0$.

I.A.2) Prouver, par exemple à l'aide du wronskien, que (E_λ) ne peut admettre une base de solutions de même parité. En déduire la dimension d'un sous-espace propre de Q.

- version du 20 février 2008 16h14

I.B -

I.B.1) Déterminer les valeurs propres de A et B et, pour chacune d'entre elles, un vecteur propre unitaire associé.

I.B.2) Démontrer, pour tout $f \in E_2$, les inégalités suivantes :

$$(f\,|A(f)) \leqslant (f\,|Q(f)) \leqslant (f\,|B(f))\,.$$

Partie II - Problème approché de dimension finie

II.A - Dans toute la suite du problème on note V_n le sous-espace de E_2 engendré par la famille orthonormale $(s_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ (on posera $V_0 = \{0\}$) et $\Pi_n \in \mathcal{L}(E)$ la projection orthogonale de E sur V_n. Si T est une application linéaire de E_2 dans E et $n \in \mathbf{N}^*$, on conviendra de noter T_n l'endomorphisme de V_n défini par $f \mapsto \Pi_n \circ T(f)$.

II.A.1) **Questions de cours dont les preuves ne sont pas demandées** : justifier l'existence de Π_n. Que représente $\Pi_n(f)$ relativement à la série de Fourier de f ? Que valent $\lim\limits_{n\to\infty} ||\Pi_n(f)||_2$ et $\lim\limits_{n\to\infty} ||f - \Pi_n(f)||_2$?

II.A.2) Démontrer, pour tout couple $(f,g) \in E^2$, la relation $(f\,|\Pi_n(g)) = (\Pi_n(f)\,|g)$.

II.A.3) Établir, pour tout couple $(f,g) \in E_2^2$, que $(f\,|Q(g)) = (Q(f)\,|g)$. En déduire que Q_n est un endomorphisme symétrique de V_n.

II.B - Dans la suite on notera $\lambda_{1,n} \leqslant \lambda_{2,n} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n,n}$ le système des valeurs propres de Q_n rangées par ordre croissant (chaque valeur propre apparaît donc dans la liste autant de fois que sa multiplicité l'exige) et $(e) = (e_{1,n}, e_{2,n}, \ldots, e_{n,n})$ une base orthonormée de V_n telle que, pour chaque indice $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, $e_{k,n}$ est un vecteur propre de Q_n associé à la valeur propre $\lambda_{k,n}$.

II.B.1) À l'aide de la question I.B.2), démontrer, pour tout $f \in V_n$, les inégalités :

$$(f\,|A_n(f)) \leqslant (f\,|Q_n(f)) \leqslant (f\,|B_n(f))\,.$$

II.B.2)

a) Déduire de la question I.B.1 les valeurs propres des endomorphismes A_n et B_n classées par ordre croissant.

b) Soit $k \in \{1,2,\ldots,n\}$; montrer qu'il existe un vecteur unitaire f appartenant à $V_k \cap \mathrm{Vect}(e_{k,n}, e_{k+1,n}, \ldots, e_{n,n})$ puis que $\lambda_{k,n} \leqslant (f\,|Q(f)) \leqslant (f\,|B(f)) \leqslant k^2 + b$. Prouver de manière analogue l'inégalité $k^2 + a \leqslant \lambda_{k,n}$.

c) Dans cette question, on suppose $n \geqslant 2$. Démontrer que, pour tout élément f de V_{n-1}, $(f\,|Q_n(f)) = (f\,|Q_{n-1}(f))$. En déduire, en utilisant une méthode analogue à celle suggérée dans la question précédente, que si $1 \leqslant k \leqslant n-1$ alors $\lambda_{k,n-1} \geqslant \lambda_{k,n}$.

II.C - On pose, dans la suite du problème, $I_k = \left[k^2 + a, k^2 + b\right]$. Prouver que, si $k \in \mathbf{N}^*$, la suite $(\lambda_{k,n})_{n\geqslant k}$ converge vers une limite λ_k élément de l'intervalle I_k et que la suite $(\lambda_k)_{k\geqslant 1}$ est croissante.

Partie III - Une suite de valeurs propres de Q

Dans cette partie III seulement on suppose le réel λ strictement positif.
On considère les problèmes de Cauchy suivants :

- $(E_\lambda) : y'' + (\lambda - q)\,y = 0$
  d'inconnue y avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = \sqrt{\lambda}$.
- $(T_\lambda) : \theta' = \sqrt{\lambda} - \dfrac{q}{\sqrt{\lambda}}\sin^2\theta = \sqrt{\lambda} - \dfrac{q}{2\sqrt{\lambda}}\,(1 - \cos(2\theta))$
  d'inconnue θ avec la condition initiale $\theta(0) = 0$.

III.A -

III.A.1) Soit y_λ la solution maximale de (E_λ).
Prouver qu'existent deux fonctions r_λ et θ_λ, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ telles que :

$$r_\lambda > 0, \qquad \frac{y'_\lambda}{\sqrt{\lambda}} = r_\lambda \cos\theta_\lambda, \qquad y_\lambda = r_\lambda \sin\theta_\lambda, \qquad \theta_\lambda(0) = 0.$$

III.A.2) Prouver que θ_λ est l'unique solution maximale de (T_λ).
Dans la suite de cette partie on posera pour tout couple $(\lambda, x) \in]0,+\infty[\times \mathbf{R}$:

$$\theta(\lambda, x) = \theta_\lambda(x).$$

III.A.3) Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre, dont les coefficients dépendent de la fonction θ, satisfaite par r_λ.

III.B - On admet que la fonction $\lambda \mapsto \theta(\lambda, 2\pi)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

III.B.1) Prouver, pour tout $t \geqslant 0$, les inégalités :

$$\left|\theta(\lambda,t) - \sqrt{\lambda}t\right| \leqslant \frac{||q||_\infty t}{\sqrt{\lambda}} \quad \text{puis} \quad \left|\cos\left(2\theta(\lambda,t)\right) - \cos\left(2\sqrt{\lambda}t\right)\right| \leqslant \frac{2||q||_\infty t}{\sqrt{\lambda}}$$

III.B.2) Prouver l'existence d'une constante K telle que :

$$\left|\theta(\lambda,2\pi) - 2\pi\sqrt{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_0^{2\pi} q(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_0^{2\pi} q(t)\cos\left(2\sqrt{\lambda}t\right)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{K}{\lambda}$$

III.B.3) Montrer que, quand λ est au voisinage de $+\infty$:

$$\theta(\lambda,2\pi) = 2\pi\sqrt{\lambda}\left[1 - \frac{1}{4\pi\lambda}\int_0^{2\pi} q(t)\,\mathrm{d}t + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

III.B.4)

a) Prouver l'existence d'un entier naturel $k_0 > 0$ et d'une suite $(\mu_k)_{k\geqslant k_0}$, strictement croissante de réels strictement positifs telle que, pour tout entier naturel $k \geqslant k_0$, on ait $\theta(\mu_k, 2\pi) = 2k\pi$.

b) Montrer que $\lim_{k\to\infty} \left(\mu_k - k^2\right) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} q(t)\,\mathrm{d}t$.

III.C - Dans cette section III.C on suppose que le réel $\lambda > 0$ vérifie la relation $\theta(\lambda, 2\pi) = 2k\pi$ où $k \in \mathbf{N}^*$ et on se propose de prouver que λ est valeur propre de Q.

III.C.1) Démontrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\theta(\lambda, -x) = -\theta(\lambda, x) \quad \text{et} \quad \theta(\lambda, 2\pi + x) - 2k\pi = \theta(\lambda, x).$$

III.C.2) Prouver que si u est une fonction continue, impaire et 2π-périodique alors la fonction $x \mapsto \exp\left[\displaystyle\int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t\right]$ est 2π-périodique. En déduire que r_λ est 2π-périodique.

III.C.3) Prouver que y_λ est 2π-périodique et impaire et conclure.

III.C.4) Que représentent les réels μ_k définis dans la question III.B.4) pour l'application linéraire Q ?

Partie IV - Valeurs propres de Q

On se propose, dans cette partie, d'établir que les λ_k définis dans la partie II sont les valeurs propres de Q associées à un système orthonormal total de vecteurs propres.

IV.A - Dans cette section IV.A on considère une suite réelle $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ telle que, pour tout $n \geqslant 1$, α_n soit une valeur propre de Q_n. On suppose que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et on note α sa limite. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $y_n \in V_n$ un vecteur propre de Q_n associé à la valeur propre α_n On veut prouver que α est une valeur propre de Q.

IV.A.1)

a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on peut prendre y_n unitaire et tel que $y_n'(0) \geqslant 0$. Cette condition sera supposée remplie dans la suite de cette partie.

b) Démontrer que $Q_n(y_n) = -y_n'' + \Pi_n(qy_n)$. En déduire que :

$$||Q(y_n) - \alpha_n y_n||_2 = ||qy_n - \Pi_n(qy_n)||_2$$ dont on se propose de prouver la convergence vers 0 quand $n \to \infty$.

c) Établir la relation :

$$qy_n - \Pi_n(qy_n) = \sum_{m=1}^{n} b_m(y_n)\left[qs_m - \Pi_n\left(qs_m\right)\right].$$

d) Pour $1 \leqslant m \leqslant n$, on pose $r_{m,n} = ||qs_m - \Pi_n\left(qs_m\right)||_2$. Établir les inégalités :

$$||Q(y_n) - \alpha_n y_n||_2 \leqslant \sum_{m=1}^{n} |b_m(y_n)|\, r_{m,n} \quad \text{et} \quad r_{m,n} \leqslant ||qs_m||_2 \leqslant ||q||_2.$$

e) Prouver, pour $1 \leqslant m \leqslant n$, la relation :

$$m^2 b_m(y_n) + b_m(qy_n) - \alpha_n b_m(y_n) = 0. \tag{1}$$

f) Prouver, pour $1 \leqslant m \leqslant n$, les inégalités :

$$|b_m(y_n)| \leqslant 1 \text{ et } m^2|b_m(y_n)| \leqslant [||q||_2 + \sup\{|\alpha_n| \,/\, n \in \mathbf{N}^*\}] \text{ qui sera noté } C.$$

g) Déduire du résultat admis dans le préliminaire que $\lim_{n\to\infty} ||Q(y_n) - \alpha_n y_n||_2 = 0$.

IV.A.2) On note (u, v) la base de solutions de l'équation $y'' + (\alpha - q)y = 0$ telle que :

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 1$$

et on pose $z_n = Q(y_n) - \alpha\, y_n \in E$.

a) Prouver que $\lim_{n\to\infty} ||z_n||_2 = 0$.

b) Prouver que le wronskien de (u, v) vaut constamment 1.

c) En résolvant une équation différentielle, déterminer en fonction de u et v une fonction $K : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, continue et telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$y_n(x) = y_n'(0)\, v(x) + \int_0^x K(x,t)\, z_n(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Pour tout entier naturel n, on note f_n la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \int_0^x K(x,t)\, z_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Prouver que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$tend uniformément vers 0 sur tout segment de $\mathbf{R}$.

e) Prouver que $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\displaystyle\int_0^{2\pi} (y_n(x) - y_n'(0)v(x))^2 dx} = 0$. En déduire la limite de la suite $(y_n'(0))_{n\geqslant 1}$.

f) Établir la convergence uniforme sur tout segment de $\mathbf{R}$ de la suite de fonctions $(y_n)_{n\geqslant 1}$ vers une fonction de norme 1 que l'on déterminera en fonction de v. En déduire que $v \in E$ et que α est une valeur propre de Q.

IV.B - On reprend maintenant les fonctions $(e_{k,n})_{1\leqslant k\leqslant n}$ définies à la section II.B en imposant de surcroît $e_{k,n}'(0) \geqslant 0$. La section IV.A a établi, pour tout $k \geqslant 1$, la convergence uniforme sur tout segment de $\mathbf{R}$ de la suite $(e_{k,n})_{n\geqslant k}$ vers un élément de E unitaire noté e_k qui est un vecteur propre de Q pour la valeur propre λ_k.

IV.B.1) Prouver que la famille $(e_k)_{k\geqslant 1}$ est orthonormale ; en déduire que la suite $(\lambda_k)_{k\geqslant 1}$ est strictement croissante.

IV.B.2) Soit $m \in \mathbf{N}^*$ et $n \geqslant m$

a) Prouver, à l'aide de la relation (1) convenablement adaptée que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $k \leqslant n$ et $k^2 + a > m^2$ on a :

$$|(e_{k,n}\,|s_m)\,| \leqslant \frac{||q||_2}{k^2 + a - m^2}.$$

b) Prouver, grâce au préliminaire, que :

$$1 = ||s_m||_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (e_k\,|s_m)^{\,2} \text{ puis } \lim_{n\to\infty} \|s_m - \sum_{k=1}^{n} (e_k|s_m)e_k\|_2 = 0$$

IV.B.3) Montrer que la famille $(e_k)_{k\geqslant 1}$ est totale dans E.
(*On pourra calculer* $(f|s_m)$ *pour un vecteur* f *orthogonal à tout vecteur* e_k).

IV.B.4) Montrer que les valeurs propres de Q sont exactement les éléments de la suite $(\lambda_k)_{k\geqslant 1}$.
(*On pourra supposer l'existence d'une valeur propre* λ *différente des* λ_k *et calculer* $(e|e_k)$ *pour un vecteur propre* e *associé à la valeur propre* λ).

Partie V - Comportement asymptotique

V.A - On rappelle que q est non constante.

V.A.1) Prouver que $a < \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} q(t)\,\mathrm{d}t < b$.

V.A.2) On adopte ici les notations de la question III.B.4) dont on utilisera les résultats.

a) Démontrer l'existence d'un entier $k_1 \geqslant k_0$ tel que, pour $k \geqslant k_1$ on ait $I_k \cap I_{k+1} = \emptyset$.

b) Prouver que $\lambda_k = \mu_k$ à partir d'un certain rang. En déduire que

$$\lambda_k = k^2 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{o}(1)$$

lorsque $k \to \infty$.

• • • FIN • • •

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Équations différentielles linéaires
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Suites et séries de fonctions
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Intégrales dépendant d'un paramètre
- Limites et continuité
- Nombres réels et suites numériques

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/mp