Concours Centrale-Supélec, France

Session 2012, filière MP

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : suites récurrentes linéaires
- Partie II : matrices de Hankel associées à une suite récurrente linéaire
- Partie III : valeurs propres des matrices de Hankel réelles

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/mp/2012/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

MP

4 heures Calculatrices autorisées

2012

Ce sujet est divisé en trois parties. La partie III est indépendante des deux premières (même si les parties II et III ont en commun de s'intéresser à des matrices dites de Hankel).

Il est attendu des candidat(e)s qu'ils fassent preuve de qualités de rédaction, de clarté et de présentation.

Notations

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Pour tout espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, on note $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E.

On note σ l'élément de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^{\mathbb{N}})$ qui à tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ associe $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de terme général $y_n = x_{n+1}$.

On note $\mathbb{K}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, et $\mathbb{K}_m[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à m.

On rappelle qu'un polynôme non nul est dit unitaire si le coefficient de son monôme de plus haut degré vaut 1.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Si M est une matrice carrée, on note ${}^tM$ sa transposée et $\mathrm{tr}(M)$ sa trace.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre n à coefficients réels.

Rappels sur les polynômes d'endomorphisme

On effectue ici quelques rappels utiles sur les polynômes d'endomorphisme d'un espace vectoriel.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On note Id l'endomorphisme identité de E.

Pour tout f de $\mathcal{L}(E)$, et tout $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ de $\mathbb{K}[X]$, on note $A(f) = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k$ (avec la convention $f^0 = \mathrm{Id}$).

Pour tout f de $\mathcal{L}(E)$, l'application $A \mapsto A(f)$ est alors un *morphisme d'algèbres* de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$.

Rappelons que cela signifie que, pour tous A, B de $\mathbb{K}[X]$ et pour tous scalaires α, β de $\mathbb{K}$, on a :

- $(\alpha A + \beta B)(f) = \alpha A(f) + \beta B(f)$;
- si $A = 1$, alors $A(f) = \mathrm{Id}$;
- $(AB)(f) = A(f) \circ B(f) = B(f) \circ A(f)$.

Cas particulier (utile dans la suite du problème) :

- Si $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $f = \sigma$ et $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, alors $A(\sigma) = \sum_{k=0}^{p} a_k \sigma^k$.
- Pour tout x de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $y = A(\sigma)(x)$ est donc la suite de terme général $y_n = \sum_{k=0}^{p} a_k x_{n+k}$.

I Suites récurrentes linéaires

Soit p un entier naturel.

On dit qu'un élément x de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une *suite récurrente linéaire* (en abrégé une SRL) d'ordre $p \geqslant 0$ s'il existe un polynôme $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ dans $\mathbb{K}[X]$ de degré p, tel que $A(\sigma)(x)$ soit la suite nulle, c'est-à-dire si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{p} a_k x_{n+k} = a_p x_{n+p} + a_{p-1} x_{n+p-1} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0 \tag{I.1}$$

On dit que la **relation I.1** (dans laquelle, rappelons-le, a_p est non nul) est une relation de récurrence linéaire *d'ordre* p, dont A est un *polynôme caractéristique*.

L'ensemble des suites x de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui obéissent à **I.1** est noté $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$.

On note $\mathcal{R}(\mathbb{K})$ l'ensemble de toutes les suites récurrentes linéaires, quel que soit leur ordre (autrement dit, $\mathcal{R}(\mathbb{K})$ est la réunion des $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ pour tous les polynômes A non nuls dans $\mathbb{K}[X]$).

I.A – Ordre (et polynôme) minimal d'une suite récurrente linéaire

Soit x une suite récurrente linéaire.

BY-NC-SA

Montrer que l'ensemble J_x des polynômes A tels que $A(\sigma)(x) = 0$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, non réduit à $\{0\}$.

On rappelle qu'il en résulte deux choses :
- d'une part, il existe dans J_x un unique polynôme unitaire B de degré minimal ;
- d'autre part, les éléments de J_x sont les multiples de B.

Par définition, on dit que B est le *polynôme minimal* de la suite x, que le degré de B est l'*ordre minimal* de x, et que la relation $B(\sigma)(x) = 0$ est la *relation de récurrence minimale* de x.

I.B – Quelques exemples

I.B.1) Dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, quelles sont les suites récurrentes linéaires d'ordre 0 ? d'ordre 1 ?

Quelles sont les suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dont le polynôme minimal est $(X-1)^2$?

I.B.2) On considère la suite x définie par $x_0 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ et par la relation de récurrence linéaire d'ordre 3 : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+3} = -3x_{n+2} - 3x_{n+1} - x_n$.

Déterminer le polynôme minimal (et donc l'ordre minimal) de la suite x.

I.C – L'espace vectoriel $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ et deux cas particuliers

Soit $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$, de degré $p \geqslant 0$, que sans perdre de généralité on suppose unitaire.

I.C.1) Prouver que $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de dimension p de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et qu'il est stable par σ (on ne demande pas ici de déterminer une base de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$, car c'est l'objet des questions suivantes).

I.C.2) Déterminer $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ quand $A = X^p$ (avec $p \geqslant 1$) et en donner une base.

I.C.3) Dans cette question, on suppose $p \geqslant 1$ et $A = (X-\lambda)^p$, avec λ dans $\mathbb{K}^*$.

On note $E_A(\mathbb{K})$ l'ensemble des x de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de terme général $x_n = Q(n)\lambda^n$, où Q est dans $\mathbb{K}_{p-1}[X]$.

a) Montrer que $E_A(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dont on précisera la dimension.

b) Montrer l'égalité $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = E_A(\mathbb{K})$.

I.D – Étude de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ quand A est scindé sur $\mathbb{K}$

Dans cette question, on suppose que le polynôme A est scindé sur $\mathbb{K}$.

Plus précisément, on note $A = X^{m_0} \prod_{k=1}^{d} (X-\lambda_k)^{m_k}$, où :
- les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ sont les racines *non nulles distinctes éventuelles* de A dans $\mathbb{K}$, et $m_1, m_2, \ldots, m_d$ sont leurs multiplicités respectives (supérieures ou égales à 1). Si A n'a pas de racine non nulle, on convient que $d = 0$ et que $\prod_{k=1}^{d} (X-\lambda_k)^{m_k} = 1$;
- l'entier m_0 est la multiplicité de 0 comme racine *éventuelle* de A. Si 0 n'est *pas* racine de A, on adopte la convention $m_0 = 0$.

Avec ces notations, on a $\sum_{k=0}^{d} m_k = \deg A = p$.

En utilisant le théorème de décomposition des noyaux, montrer que $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \geqslant m_0,\ x_n = \sum_{k=1}^{d} Q_k(n)\,\lambda_k^n$$

où, pour tout k de $\{1, \ldots, d\}$, Q_k est dans $\mathbb{K}[X]$ avec $\deg Q_k < m_k$.

Remarque : si $d = 0$, la somme $\sum_{k=1}^{d} Q_k(n)\,\lambda_k^n$ est par convention égale à 0.

II Matrices de Hankel associées à une suite récurrente linéaire

Soit x dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on note $H_n(x)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2,\ [H_n(x)]_{i,j} = x_{i+j-2}$$

On a par exemple $H_2(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$, $H_3(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ et $H_4(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$.

On identifie toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui lui est associé dans la base canonique. On identifie de même tout élément de $\mathbb{K}^n$ avec la matrice-colonne qui lui correspond.

BY-NC-SA

II.A – Calcul du rang de $H_n(x)$ quand x est une suite récurrente linéaire

Dans cette section, x est une suite récurrente linéaire d'ordre *minimal* $p \geqslant 1$ et de polynôme minimal B.

II.A.1) Montrer que la famille $(\sigma^k(x))_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ est une base de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$.

En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le rang de la famille $(\sigma^k(x))_{0\leqslant k\leqslant n-1}$.

II.A.2) Montrer que si $n \geqslant p$, l'application $\varphi_n : \begin{cases} \mathcal{R}_B(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^n \\ v \mapsto (v_0, \ldots, v_{n-1}) \end{cases}$ est injective.

En déduire que si $n \geqslant p$, alors $\operatorname{rang}(H_n(x)) = p$.

Remarque : il est clair que ce résultat reste vrai si $p = 0$ (car la suite x et les matrices $H_n(x)$ sont nulles).

II.B – Détermination de la récurrence minimale d'une suite récurrente linéaire

Soit x une suite récurrente linéaire non nulle, d'ordre $m \geqslant 1$. Soit $p = \operatorname{rang}(H_m(x))$.

II.B.1) Montrer que x est d'ordre minimal p et que le noyau de $H_{p+1}(x)$ est une droite vectorielle dont un vecteur directeur peut s'écrire $(b_0, \ldots, b_{p-1}, 1)$, où $b_0, \ldots, b_{p-1}$ sont dans $\mathbb{K}$.

II.B.2) Avec ces notations, montrer que le polynôme minimal de x est $B = X^p + b_{p-1}X^{p-1} + \cdots + b_1X + b_0$.

II.C – Étude d'un exemple

Dans cette question, on considère la suite $x = (x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0, \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{n+4} = x_{n+3} - 2\,x_{n+1}$$

II.C.1) Dans le langage informatique de votre choix (que vous préciserez), écrire une procédure (ou fonction) de paramètre un entier naturel n et renvoyant la liste (ou la séquence, ou le vecteur) des x_k pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

II.C.2) Préciser le rang de $H_n(x)$ pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ et indiquer l'ordre minimal de la suite x.

II.C.3) Déterminer la relation de récurrence minimale de la suite x.

II.C.4) Donner une formule permettant pour tout $n \geqslant 1$ de calculer directement x_n.

II.C.5) On décide de modifier *uniquement* la valeur de x_0, en posant cette fois $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

Avec cette modification, reprendre rapidement l'étude des questions **II.C.2** et **II.C.3**.

III Valeurs propres des matrices de Hankel réelles

Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 3.

On note $p = [(n+1)/2]$ la partie entière de $(n+1)/2$.

On a donc $n = 2p$ si n est pair, et $n = 2p-1$ si n est impair.

$\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée est notée $\| \cdot \|$.

Un élément de $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est dit *ordonné* s'il vérifie si $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$.

On dit qu'une matrice $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une *matrice de Hankel* s'il existe $a = (a_0, \ldots, a_{2n-2}) \in \mathbb{R}^{2n-1}$ tel que pour tous i et j de $\{1, \ldots, n\}$, $m_{i,j} = a_{i+j-2}$. Une telle matrice est notée $M = H(a)$.

III.A – Préliminaires

III.A.1) Montrer que si M est une matrice de Hankel de taille n alors elle admet n valeurs propres réelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (chacune étant répétée autant de fois que sa multiplicité) que l'on peut classer dans l'ordre décroissant $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$.

On note alors $\operatorname{Spo}(M) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ le *spectre ordonné* de la matrice M, c'est-à-dire le n-uplet ordonné des valeurs propres de M.

On s'intéresse au problème suivant : à quelles conditions un n-uplet ordonné de réels peut-il être le n-uplet ordonné des valeurs propres d'une matrice de Hankel de taille n ?

III.A.2) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors le n-uplet $(\lambda, \ldots, \lambda)$ n'est pas le n-uplet ordonné des valeurs propres d'une matrice de Hankel de taille n.

III.B – Une première condition nécessaire

Soit $a = (a_0, \ldots, a_{2n-2})$ un élément de $\mathbb{R}^{2n-1}$ et $M = H(a)$. On note $\operatorname{Spo}(M) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

On définit deux vecteurs $v = (v_1, \ldots, v_n)$ et $w = (w_1, \ldots, w_n)$ de $\mathbb{R}^n$ par

$$\begin{cases} v_i = \sqrt{2i-1}\; a_{2(i-1)} \text{ et } w_i = \dfrac{1}{\sqrt{2i-1}} & \text{si } i \in \{1, \ldots, p\} \\ v_i = \sqrt{2n-2i+1}\; a_{2(i-1)} \text{ et } w_i = \dfrac{1}{\sqrt{2n-2i+1}} & \text{si } i \in \{p+1, \ldots, n\} \end{cases}$$

On pose enfin $K_n = n - \|w\|^2$.

BY-NC-SA

III.B.1) Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{k=0}^{n-1}a_{2k}\qquad\text{et}\qquad\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,a_k^2+\sum_{k=n}^{2n-2}(2n-k-1)\,a_k^2$$

III.B.2) Montrer que $\langle v,w\rangle=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ et $\|v\|^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$.

III.B.3) Montrer que $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)^2=n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2-\langle v,w\rangle^2$ et en déduire l'inégalité :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)^2\geqslant K_n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 \tag{III.1}$$

III.B.4) Vérifier que si $n=3$, la **condition III.1** équivaut à : $2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)\geqslant 3(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)$.

III.C – D'autres conditions nécessaires

Dans cette partie, on *admet* le résultat suivant : si A et B sont deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres respectives (avec répétitions éventuelles) sont $\alpha_1\geqslant\ldots\geqslant\alpha_n$ et $\beta_1\geqslant\ldots\geqslant\beta_n$ alors

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_{n+1-i}\leqslant\operatorname{tr}(AB)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i \tag{III.2}$$

Soit $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$b_{1,2p-1}=1\qquad b_{2p-1,1}=1\qquad b_{p,p}=-2$$

tous les autres coefficients de B étant nuls (on rappelle que p désigne la partie entière de $(n+1)/2$).

III.C.1) Déterminer le spectre ordonné de la matrice B.

III.C.2) Soit $a=(a_0,\ldots,a_{2n-2})$ un élément de $\mathbb{R}^{2n-1}$ et $M=H(a)$.
On note $\operatorname{Spo}(M)=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$.
Établir que

$$\lambda_1-\lambda_{n-1}-2\lambda_n\geqslant 0\qquad\text{et}\qquad 2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_n\geqslant 0 \tag{III.3}$$

III.D – Cas $n=3$

Soient λ_1, λ_2, λ_3 trois réels vérifiant

$$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\lambda_3\qquad\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3\geqslant 0\qquad 2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3\geqslant 0$$

On définit la matrice de Hankel $M=H(a,b,c,b,a)=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&c&b\\c&b&a\end{pmatrix}$, où a, b, c sont réels.

III.D.1) Calculer les valeurs propres de M (sans chercher à les ordonner).

III.D.2) Expliciter a, b, c (avec $b\geqslant 0$) en fonction de $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, de telle sorte que $\operatorname{Spo}(M)=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$.

III.D.3) Que peut-on déduire du résultat précédent, quant à la **condition III.3** dans le cas $n=3$?
En utilisant un triplet ordonné $(\lambda,1,1)$, montrer que pour $n=3$, la **condition III.1** n'est pas suffisante.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Suites récurrentes
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Structures algébriques usuelles
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/mp