Concours Centrale-Supélec, France

Session 2015, filière MP

Mathématiques 1

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : préliminaires géométriques
- Partie II : fonctions radiales
- Partie III : transformée de Radon d'une fonction de E_1
- Partie IV : formule d'inversion
- Partie V : interprétation et application à la radiographie

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/mp/2015/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

MP

4 heures Calculatrices autorisées

2015

Autour de la transformation de Radon

L'objectif de ce problème est l'étude d'un certain opérateur intégral agissant sur les fonctions du plan, appelé *transformation de Radon*. On se propose d'établir une formule d'inversion et d'interpréter la transformation en termes de fonctions invariantes sur un groupe de matrices. Enfin on étudiera une application du procédé dans le domaine de l'imagerie médicale.

Notations

On note $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées de taille 3×3 à coefficients dans $\mathbb{R}$. Le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est noté $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et son élément neutre, I_3.

Les éléments du plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ seront notés en colonne, pour tout réel θ on notera $\vec{u}_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$.

Le plan est muni de sa structure euclidienne canonique, donnée par le produit scalaire

$$\left\langle \begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}\right\rangle = x_1x_2 + y_1y_2$$

L'ensemble des matrices des rotations vectorielles planes est appelé *groupe spécial orthogonal* et noté $\mathrm{SO}(2)$, son élément neutre, I_2. On écrira $R_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.

I Préliminaires géométriques

Soit G le sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices de la forme $M(A,\vec{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} & & b_1\\ A & & b_2\\ \hline 0 & 0 & 1\end{array}\right)$ où A est un élément du groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(2)$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$ est un vecteur quelconque du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

I.A – Isométries affines directes du plan euclidien

I.A.1) Déterminer un couple $(A,\vec{b})$ dans $\mathrm{SO}(2)\times\mathbb{R}^2$ tel que l'on ait $M(A,\vec{b}) = I_3$.

I.A.2) Soient $(A,\vec{b})$ et $(A',\vec{b}')$ dans $\mathrm{SO}(2)\times\mathbb{R}^2$. Montrer que $M(A,\vec{b})M(A',\vec{b}') = M(AA', A\vec{b}'+\vec{b})$.

I.A.3) Montrer que les éléments de G sont inversibles et expliciter l'inverse de $M(A,\vec{b})$.

I.A.4) Démontrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

I.A.5) L'application $\Phi : \begin{cases} G & \to & \mathbb{R}^2\\ M(A,\vec{b}) & \mapsto & \vec{b}\end{cases}$ est-elle surjective ? Est-elle injective ?

I.B – Droites affines du plan

Pour $q\in\mathbb{R}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}$ vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$, on note $\Delta(q,\vec{u})$ la droite affine du plan passant par le point (qu_1, qu_2) et orthogonale à $\vec{u}$.

I.B.1) Représenter graphiquement $\Delta(0,\vec{e}_1)$ et $\Delta\left(2, \dfrac{\vec{e}_1+\vec{e}_2}{\sqrt{2}}\right)$.

I.B.2) Déterminer une équation cartésienne de $\Delta(q,\vec{u}_\theta)$.

I.B.3) Montrer qu'une paramétrisation de $\Delta(q,\vec{u}_\theta)$ est donnée par $\begin{cases} x(t) = q\cos\theta - t\sin\theta\\ y(t) = q\sin\theta + t\cos\theta\end{cases}$ lorsque t parcourt $\mathbb{R}$.

I.B.4) À quelle condition les droites $\Delta(q,\vec{u})$ et $\Delta(r,\vec{v})$ sont-elles confondues ?

I.C – Action de G sur les droites

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites affines du plan et on considère l'application $\Psi : \begin{cases} G & \to & \mathcal{D}\\ M(A,\vec{b}) & \mapsto & \Delta(\langle A\vec{e}_1,\vec{b}\rangle, A\vec{e}_1)\end{cases}$.

BY-NC-SA

I.C.1) Représenter $\Psi(M(A,\vec{b}))$ dans le cas $A = R_{\pi/6}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

I.C.2) Déterminer $\Psi\left(M(I_2,\vec{0})\right)$.

I.C.3) Vérifier que $\Psi\left(M(R_\theta, q\vec{u}_\theta)\right) = \Delta(q,\vec{u}_\theta)$; en déduire que Ψ est surjective.

I.C.4) Soit H l'ensemble des matrices $M(A,\vec{b})$ de G telles que $\Psi(M(A,\vec{b})) = \Delta(0,\vec{e}_1)$.

a) Décrire les éléments de H.

b) Montrer que H est un sous-groupe de G.

c) Montrer que pour tout g de G, et tout h de H, on a $\Psi(gh) = \Psi(g)$.

Pour tout entier n, on note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $(x,y) \mapsto (x^2+y^2)^n f(x,y)$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$.

Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ on appelle *transformée de Radon* de f la fonction $\hat{f}$ définie, là où c'est possible, par

$$\hat{f}(q,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(q\cos\theta - t\sin\theta, q\sin\theta + t\cos\theta)\,\mathrm{d}t$$

II Fonctions radiales

II.A – Étude d'un exemple

On considère, dans cette sous-partie seulement, la fonction f définie par : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$.

II.A.1) Établir que f est dans $\mathcal{B}_1$.

II.A.2) Montrer que $\hat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ avec $\hat{f}(q,\theta) = \dfrac{\pi}{\sqrt{1+q^2}}$.

II.A.3) On pose $R(q) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \hat{f}(q,\theta)\,\mathrm{d}\theta$. Démontrer que $q \mapsto \dfrac{R'(q)}{q}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que

$$f(0,0) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{R'(q)}{q}\,\mathrm{d}q$$

On pourra, pour calculer cette dernière intégrale, procéder au changement de variable $q = \mathrm{sh}(u)$.

II.A.4) La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est-elle dans $\mathcal{B}_2$?

II.B – Fonctions radiales : cas général

On suppose dans le reste de cette partie qu'il existe une fonction φ de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$, continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, telle que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2})$.

II.B.1) Pour $r\in\mathbb{R}^+$, calculer $\bar{f}(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\,\mathrm{d}t$.

II.B.2) Justifier la convergence, pour tout réel $q \geqslant 0$, de $\displaystyle\int_q^{+\infty} \frac{r\,\varphi(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,\mathrm{d}r$.

II.B.3) Démontrer que la transformée de Radon de f est définie sur $\mathbb{R}^2$ et que

$$\forall q\in\mathbb{R}^+,\quad \forall\theta\in\mathbb{R}\qquad \hat{f}(q,\theta) = 2\int_q^{+\infty} \frac{r\,\varphi(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,\mathrm{d}r$$

II.B.4) En déduire que $\forall q\in\mathbb{R}^+, \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\hat{f}(q,\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\int_q^{+\infty}\frac{r\bar{f}(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,\mathrm{d}r$.

III Transformée de Radon d'une fonction de $\mathcal{B}_1$

On considère dans cette partie une fonction f appartenant à $\mathcal{B}_1$ et on rappelle que

$$\hat{f}(q,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(q\cos\theta - t\sin\theta, q\sin\theta + t\cos\theta)\,\mathrm{d}t$$

III.A – Vérifier que $\hat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$.

BY-NC-SA

III.B – Justifier que pour tout q et tout θ on a $\hat{f}(-q, \theta+\pi) = \hat{f}(q,\theta)$.

III.C – On pose encore $\bar{f}(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\,\mathrm{d}t$.

III.C.1) Démontrer que $\bar{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

III.C.2) Démontrer que la fonction $r \mapsto r^2\bar{f}(r)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

III.C.3) Montrer que si on suppose de plus que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont dans $\mathcal{B}_2$, alors $r \mapsto r^4\bar{f}\,'(r)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Sous ces hypothèses, on peut démontrer en manipulant des intégrales doubles que la formule du II.B.4 reste vraie. Nous admettrons donc dans la suite que

$$\forall q \in \mathbb{R}^+ \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{f}(q,\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\int_q^{+\infty} \frac{r\bar{f}(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,\mathrm{d}r$$

IV Formule d'inversion

On souhaite retrouver la fonction f à partir de sa transformée $\hat{f}$. À cet effet on pose pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$R_{x,y}(q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{f}(x\cos\theta + y\sin\theta + q, \theta)\,\mathrm{d}\theta$$

L'objectif est de démontrer la formule d'inversion de Radon : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y) = \dfrac{-1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{R'_{x,y}(q)}{q}\,\mathrm{d}q$.

IV.A – Résultats préliminaires

IV.A.1) Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}$ et montrer que sa valeur est $\dfrac{\pi}{2}$.

IV.A.2) Soient ε et r fixés tels que $0<\varepsilon<r$. Avec le changement de variables $q = r\cos\theta$, établir que

$$\int_\varepsilon^r \frac{\mathrm{d}q}{q^2\sqrt{r^2-q^2}} = \frac{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}{r^2\varepsilon}$$

IV.B – Étude d'une fonction définie par une intégrale

Soit h une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$. On suppose que $r \mapsto r^2h(r)$ est bornée et on pose $H(q) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\,h(qt)}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$.

IV.B.1) Montrer que H est continue sur $]0,+\infty[$.

IV.B.2) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$ on a $H(q) = O\left(\dfrac{1}{q^2}\right)$.

IV.B.3) Démontrer que si on suppose de plus que $r \mapsto r^4h'(r)$ est bornée, alors la fonction H est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

IV.C – Vers la formule d'inversion

On considère une fonction f de $\mathcal{B}_1$ dont les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont dans $\mathcal{B}_2$.

On pose, avec les notations de la partie III : $\forall q\in\mathbb{R}^+, F(q) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\hat{f}(q,\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\int_q^{+\infty}\frac{r\bar{f}(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,\mathrm{d}r$.

IV.C.1) Justifier que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et qu'au voisinage de $+\infty$ on a $F(q) = O\left(\dfrac{1}{q}\right)$.

IV.C.2) Démontrer : $\forall\varepsilon>0, \displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{F'(q)}{q}\,\mathrm{d}q = -\frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon} + 2\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{1}{q^2}\left(\int_q^{+\infty}\frac{r\bar{f}(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}q$.

IV.C.3) On admet que l'on peut intervertir les deux intégrales ci dessus et donc que

$$\forall\varepsilon>0 \qquad \int_\varepsilon^{+\infty}\left(\frac{1}{q^2}\int_q^{+\infty}\frac{r\bar{f}(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}q = \int_\varepsilon^{+\infty}\left(\int_\varepsilon^r\frac{r\bar{f}(r)}{q^2\sqrt{r^2-q^2}}\,\mathrm{d}q\right)\mathrm{d}r$$

En déduire que $\forall\varepsilon>0, \displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{F'(q)}{q}\,\mathrm{d}q = -2\varepsilon\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\bar{f}(r)}{r\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}\,\mathrm{d}r$.

BY-NC-SA

IV.D – La formule d'inversion

On considère une fonction f dans $\mathcal{B}_1$ telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont dans $\mathcal{B}_2$.

IV.D.1) Établir la formule d'inversion de Radon pour cette fonction f au point $(x, y) = (0, 0)$.

IV.D.2) Les hypothèses faites sur f sont-elles nécessaires pour que la formule d'inversion de Radon soit vérifiée au point $(x, y) = (0, 0)$?

IV.D.3) Proposer une démarche pour obtenir la formule d'inversion de Radon en tout couple (x, y) à partir de la formule en $(0, 0)$.

V Interprétation et application à la radiographie

La transformation de Radon peut être introduite dans le cadre plus général de l'analyse sur les groupes. Le but de cette partie est d'interpréter l'opérateur étudié plus haut en termes de fonctions invariantes sur G.

V.A – Fonctions invariantes sur G

Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, on note f^* la fonction $f \circ \Phi$, définie sur G par $f^*(g) = f(\Phi(g))$ où $\Phi : G \to \mathbb{R}^2$ est la fonction introduite dans la question I.A.5.

V.A.1) Démontrer que pour tout g dans G et r tel que $\Phi(r) = \vec{0}$ on a $f^*(gr) = f^*(g)$.

On dit alors que f^* est *invariante* par les rotations du plan, vues comme des éléments de G.

V.A.2) On suppose à présent que f vérifie les hypothèses permettant de définir sa transformée de Radon et on va démontrer que $\hat{f}$ peut également être vue comme une fonction sur G, sujette à un autre type d'invariance. Démontrer que si deux droites $\Delta(q_1, \vec{u}_{\theta_1})$ et $\Delta(q_2, \vec{u}_{\theta_2})$ coïncident, alors $\hat{f}(q_1, \theta_1) = \hat{f}(q_2, \theta_2)$.

Ce résultat permet de faire l'abus de notation $\hat{f}(\Delta(q, \vec{u}_\theta)) = \hat{f}(q, \theta))$ sans qu'il en résulte d'ambiguïté.

V.A.3) On définit à présent $\hat{f}^\star$ sur G en composant $\hat{f}$ par Ψ : on pose, pour tout $g \in G$, $\hat{f}^\star(g) = \hat{f}(\Psi(g))$.

Démontrer que $\hat{f}^\star$ est H-invariante, c'est-à-dire que pour tous $g \in G$ et $h \in H$, $\hat{f}^\star(gh) = \hat{f}^\star(g)$.

V.B – Reconstruction en radiographie

Une technique courante en imagerie médicale consiste à mesurer l'intensité d'un faisceau de rayons X avant et après la traversée d'une certaine zone, l'objectif étant de déterminer la densité des tissus dans la zone. L'objectif des dernières questions du problème est d'illustrer, dans un modèle de dimension deux, comment la formule d'inversion de Radon peut être utilisée dans ce cadre.

On modélise la densité des tissus, exprimée dans des unités convenables, par une fonction inconnue f nulle en dehors de la zone à étudier et dont on suppose qu'elle vérifie des hypothèses assurant l'existence de $\hat{f}$.

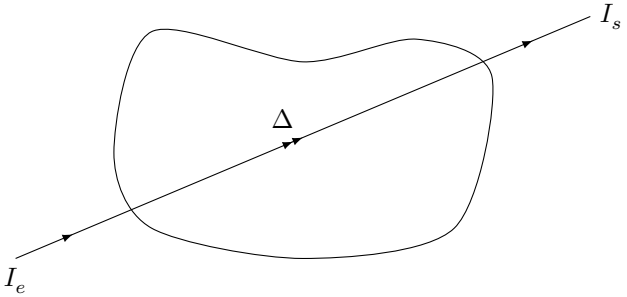


Figure 1

En supposant que chaque faisceau de rayons X incident est porté par une droite affine Δ, et en notant I son intensité mesurée de part et d'autre de la zone visée, un raisonnement heuristique donne

$$\ln\left(\frac{I_e}{I_s}\right) = \int_\Delta f \tag{V.1}$$

où le membre de droite désigne l'intégrale de f sur la droite Δ dans un sens à préciser.

V.B.1) Proposer une définition rigoureuse du membre de droite de (V.1) dans le cas où $\Delta = \Delta(q, \vec{u}_\theta)$.

V.B.2) Expliquer comment la formule d'inversion de Radon permet en principe de connaître la densité des tissus dans la zone radiographiée.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Structures algébriques usuelles (sup)
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Structures algébriques usuelles (spé)
- Intégration sur un intervalle quelconque
- Intégrales dépendant d'un paramètre
- Techniques fondamentales de calcul en analyse

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/mp