Concours Centrale-Supélec, France

Session 2018, filière MP

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : fonctions harmoniques, quelques propriétés
- Partie II : exemples de fonctions harmoniques
- Partie III : principe du maximum faible
- Partie IV : fonctions harmoniques et fonctions développables en série entière
- Partie V : résolution du problème de Dirichlet dans le disque unité

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/mp/2018/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

MP

4 heures Calculatrices autorisées

2018

Fonctions harmoniques et problème de Dirichlet

Ce problème étudie quelques propriétés des fonctions harmoniques ainsi que quelques exemples de telles fonctions (parties I et II). Dans la partie III, largement indépendante du reste du problème, on montre le principe du maximum faible pour le laplacien. Dans la partie IV, on établit un lien entre les fonctions harmoniques de deux variables et les fonctions développables en série entière, et on propose la résolution du problème de Dirichlet dans le disque unité de $\mathbb{R}^2$ dans la partie V.

Notations

— Dans ce préambule et dans les parties I et III, n désigne un entier strictement positif.

— On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.

— Si U est une partie de $\mathbb{R}^n$, alors $\overline{U}$ désigne son adhérence et ∂U sa frontière.

— Pour $a \in \mathbb{R}^n$ et $R > 0$, on désigne par $D(a,R)$ la boule ouverte de centre a et de rayon R pour la distance euclidienne. Autrement dit

$$D(a,R) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x-a\| < R\}$$

La boule fermée de centre a et de rayon R est alors $\overline{D(a,R)}$.

— L'opérateur différentiel Δ (appelé laplacien) est défini pour toute fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ par

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in U, \quad \Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$

— Une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ à valeurs réelles sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est dite harmonique sur U si

$$\forall x \in U \quad \Delta f(x) = 0$$

L'ensemble des fonctions harmoniques sur U est noté $\mathcal{H}(U)$.

I Fonctions harmoniques : quelques propriétés

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}$.

Q 1. Montrer que $\mathcal{H}(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$.

Q 2. Soit $f \in \mathcal{H}(U)$. Montrer que si f est $\mathcal{C}^\infty$ sur U, alors toute dérivée partielle à tout ordre de f appartient à $\mathcal{H}(U)$.

Q 3. On suppose dans cette question que U est connexe par arcs. Déterminer l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{H}(U)$ telles que f^2 appartienne aussi à $\mathcal{H}(U)$.

Q 4. Donner une fonction non constante appartenant à $\mathcal{H}(U)$. Le produit de deux fonctions harmoniques est-il une fonction harmonique ?

II Exemples de fonctions harmoniques

II.A – On cherche dans cette question à déterminer les fonctions harmoniques non nulles sur $\mathbb{R}^2$ à variables séparables, c'est-à-dire les fonctions f s'écrivant sous la forme $f(x,y) = u(x)v(y)$.

On se donne donc deux fonctions u et v, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulles, et on pose

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = u(x)v(y)$$

On suppose que f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

Q 5. Montrer qu'il existe une constante λ réelle telle que u et v soient solutions respectives des équations

$$z'' + \lambda z = 0 \qquad \text{et} \qquad z'' - \lambda z = 0$$

Q 6. Donner en fonction du signe de λ la forme des fonctions harmoniques à variables séparables.

BY-NC-SA

II.B – Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On pose, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$,

$$g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

Q 7. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$.

Q 8. Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, exprimer $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$ en fonction de

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

Q 9. Exprimer également $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta)$ en fonction des dérivées partielles premières et secondes de f en $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$

Q 10. Montrer que f appartient à $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ si et seulement si, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$,

$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0$$

Q 11. Déterminer les fonctions harmoniques radiales de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, c'est-à-dire les fonctions f appartenant à $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ telles que $(r,\theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ soit indépendante de θ.

Q 12. Soient a, b, r_1 et r_2 quatre réels tels que $0 < r_1 < r_2$. Déterminer une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ telle que

$$\begin{cases} \Delta f = 0 \\ f(x,y) = a \quad \text{si } \|(x,y)\| = r_1 \\ f(x,y) = b \quad \text{si } \|(x,y)\| = r_2 \end{cases}$$

II.C – Dans cette sous-partie II.C, on considère deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, $u : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et on pose

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R} \qquad f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = u(r)v(\theta)$$

La fonction f est alors une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dite à variables polaires séparables.

Q 13. Montrer que, si f n'est pas identiquement nulle, alors v est 2π-périodique.

Q 14. Montrer que, si f est harmonique et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, alors il existe un réel λ tel que u soit solution de l'équation différentielle (II.1)

$$r^2 z''(r) + rz'(r) - \lambda z(r) = 0 \tag{II.1}$$

et v soit solution de l'équation différentielle (II.2)

$$z''(\theta) + \lambda z(\theta) = 0 \tag{II.2}$$

II.C.1) On suppose ici que $\lambda = 0$.

Q 15. Quelles sont les solutions 2π-périodiques de (II.2) ?

Q 16. Résoudre (II.1) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Q 17. En déduire, dans le cas $\lambda = 0$, les fonctions harmoniques à variables polaires séparables.

II.C.2) On suppose désormais $\lambda \neq 0$.

Q 18. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que (II.2) admette des solutions 2π-périodiques non nulles. Donner ces solutions.

Q 19. Résoudre (II.1) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On pourra considérer, en justifiant son existence, une fonction Z de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $r > 0$, $z(r) = Z(\ln(r))$.

Q 20. Quelles sont les solutions se prolongeant par continuité en 0 ?

BY-NC-SA

III Principe du maximum faible

Soit U un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$) et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

Le but de cette partie est de montrer le théorème suivant, connu sous le nom de principe du maximum faible.

Si f est une fonction continue sur $\overline{U}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique sur U, alors

$$\forall x \in U \qquad f(x) \leqslant \sup_{y \in \partial U} f(y)$$

où ∂U désigne la frontière de U.

III.A – Soit f une fonction continue sur $\overline{U}$.

Q 21. Montrer que f admet un maximum en un point $x_0 \in \overline{U}$.

On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et que, pour tout $x \in U$, $\Delta f(x) > 0$.

Q 22. Montrer que $x_0 \in \partial U$ et en déduire que $\forall x \in U$, $f(x) < \sup_{y \in \partial U} f(y)$.

On pourra supposer par l'absurde que $x_0 \in U$, justifier qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) > 0$, et considérer la fonction φ définie, pour t réel, par $\varphi(t) = f(x_0 + te_i)$, où e_i désigne le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

III.B – Soit f une fonction continue sur $\overline{U}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique sur U.

Pour tout $\varepsilon > 0$ on pose $g_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \|x\|^2$.

Q 23. Montrer que g_ε est une fonction continue sur $\overline{U}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, et telle que $\forall x \in U$, $\Delta g_\varepsilon(x) > 0$.

Q 24. En déduire que $\forall x \in U$, $f(x) \leqslant \sup_{y \in \partial U} f(y)$.

Q 25. Soit f_1 et f_2 deux fonctions continues sur $\overline{U}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et harmoniques sur U. Montrer que si les fonctions f_1 et f_2 sont égales sur ∂U, alors f_1 et f_2 sont égales sur U.

IV Fonctions harmoniques et fonctions développables en série entière

On dit qu'une fonction f, définie sur $D(0, R) \subset \mathbb{R}^2$ et à valeurs complexes, se développe en série entière sur $D(0, R)$ s'il existe une suite complexe (a_n) telle que

$$\forall (x, y) \in D(0, R), \quad f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x + \mathrm{i}y)^n$$

Dans toute cette partie, f désigne une fonction se développant en série entière sur $D(0, R)$.

IV.A –

Q 26. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D(0, R)$ et que ses dérivées partielles se développent en série entière sur $D(0, R)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

On note u et v les parties réelle et imaginaire de f, de sorte que, quel que soit $(x, y) \in D(0, R)$,

$$u(x, y) \in \mathbb{R}, \quad v(x, y) \in \mathbb{R}, \quad f(x, y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y).$$

Q 27. Montrer que u et v sont des fonctions harmoniques sur $D(0, R)$.

IV.B – On admet le résultat suivant : une fonction h de $D(0, R)$ dans $\mathbb{C}$ se développe en série entière sur $D(0, R)$ si et seulement si h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D(0, R)$ et pour tout $(x, y) \in D(0, R)$, $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \mathrm{i}\dfrac{\partial h}{\partial x}(x, y)$.

Q 28. Montrer que si f ne s'annule pas sur $D(0, R)$ alors $1/f$ se développe en série entière sur $D(0, R)$.

Q 29. Montrer que la fonction uv est harmonique sur $D(0, R)$.

IV.C – Soit g une fonction de $D(0, R) \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que g est harmonique.

Q 30. Montrer que la fonction h définie sur $D(0, R)$ par

$$h \,:\, (x, y) \longmapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \mathrm{i}\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$$

se développe en série entière sur $D(0, R)$.

BY-NC-SA

Q 31. Montrer que si g appartient à $\mathcal{H}(D(0,R))$ alors il existe une fonction H se développant en série entière sur $D(0,R)$ telle que g est la partie réelle de H.

On pourra considérer une série entière primitive de la série entière associée à la fonction h de la question précédente.

IV.D –

Q 32. Montrer que pour tout $r \in [0,R[$, on a $f(0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos(t), r\sin(t))\,\mathrm{d}t$.

Q 33. Montrer un résultat analogue pour les fonctions harmoniques.

Q 34. Montrer que $\forall r \in [0,R[,\ |f(0)| \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(r\cos(t), r\sin(t))|$.

Q 35. Montrer un résultat analogue pour les fonctions harmoniques.

Q 36. Montrer que si $|f|$ admet un maximum en 0, alors f est constante sur $D(0,R)$.

Q 37. Montrer le théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme complexe non constant admet au moins une racine.

On pourra procéder par l'absurde, supposer qu'il existe un polynôme ne s'annulant pas et considérer son inverse.

V Résolution du problème de Dirichlet dans le disque unité de $\mathbb{R}^2$

Soit h une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. On cherche à résoudre le problème de Dirichlet sur le disque unité ; autrement dit, il s'agit de déterminer, s'il y en a, la ou les fonctions f définies et continues sur $\overline{D(0,1)}$ (disque fermé), de classe $\mathcal{C}^2$ sur $D(0,1)$, et telles que

$$\begin{cases} \Delta f = 0 \text{ sur } D(0,1) \\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(\cos(t), \sin(t)) = h(t) \end{cases}$$

Pour cela, on pose, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$,

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t \qquad \text{où} \qquad \mathcal{P}(t,z) = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z}\right) \quad \text{(Re désigne la partie réelle)}$$

Q 38. Montrer que la fonction $z \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z}$ est développable en série entière pour $|z| < 1$ et calculer son développement en série entière. En déduire que la fonction $(x,y) \mapsto g(x+\mathrm{i}y)$ est une fonction harmonique sur $D(0,1)$.

Q 39. Montrer que, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t = 1$.

Q 40. Soit $\varphi \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$, $g(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} h(t)\mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t$.

Q 41. Montrer que, pour tout $r \in [0,1[$ et tous réels t et θ,

$$\mathcal{P}(t, r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}$$

Q 42. Montrer que, pour tout $\delta \in]0,\pi[$ et tout réel φ, $\displaystyle\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[z\,\to\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}]{} 0$.

Q 43. En utilisant le théorème de Heine, montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout nombre réel φ et tout nombre complexe z vérifiant $|z| < 1$,

$$|g(z) - h(\varphi)| \leqslant \frac{\sup_{t\in\mathbb{R}} |h(t)|}{\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t,z)\,\mathrm{d}t + \varepsilon$$

Q 44. Montrer l'existence et l'unicité de la solution au problème de Dirichlet étudié dans cette partie.

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Topologie des espaces vectoriels normés
- Équations différentielles linéaires
- Techniques fondamentales de calcul en analyse
- Dérivabilité et convexité
- Séries entières
- Intégrales dépendant d'un paramètre
- Nombres complexes et trigonométrie
- Suites et séries de fonctions

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/mp