Concours Centrale-Supélec, France

Session 2019, filière MP

Mathématiques 1

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : matrices compagnons et endomorphismes cycliques
- Partie II : étude des endomorphismes cycliques
- Partie III : endomorphismes commutants, décomposition de Frobenius
- Partie IV : endomorphismes orthocycliques

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/mp/2019/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

MP

4 heures

Calculatrice autorisée

2019

Notations et définitions

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et n est un entier naturel.

On note $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et, pour $n \geqslant 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$. La matrice unité est notée I_n et on désigne par $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $A^\top$ la transposée de la matrice A, $\mathrm{rg}(A)$ son rang, $\mathrm{tr}(A)$ sa trace, $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique, π_A son polynôme minimal et $\mathrm{sp}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres dans $\mathbb{K}$.

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ de dimension finie n supérieure ou égale à 2, et $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E. On note f un endomorphisme de E.

On note $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{k+1} = f^k \circ f$.

Si $Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_mX^m$, $Q(f)$ désigne l'endomorphisme $a_0\mathrm{Id}_E + a_1f + \cdots + a_mf^m$. On note $\mathbb{K}[f]$ la sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$ constituée des endomorphismes $Q(f)$ quand Q décrit $\mathbb{K}[X]$.

De même, on utilise les notations suivantes, similaires à celles des matrices, pour un endomorphisme f de E : $\mathrm{rg}(f)$, $\mathrm{tr}(f)$, χ_f, π_f et $\mathrm{sp}(f)$.

Enfin, on dit que f est *cyclique* si et seulement s'il existe un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

I Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

I.A – Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q 1. Montrer que M et $M^\top$ ont même spectre.

Q 2. Montrer que $M^\top$ est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable.

I.B – ***Matrices compagnons***

Q 3. Soit $(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $Q(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. On considère la matrice

$$C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Déterminer en fonction de Q le polynôme caractéristique de C_Q.

Q 4. Soit λ une valeur propre de $C_Q^\top$. Déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.

I.C – ***Endomorphismes cycliques***

Q 5. Montrer que f est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q, où Q est un polynôme unitaire de degré n.

BY-NC-SA

Q 6. Soit f un endomorphisme cyclique. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.

Q 7. Montrer que si f est cyclique, alors $(\mathrm{Id}, f, f^2, ..., f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$ et le polynôme minimal de f est de degré n.

I.D – Application à une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

Q 8. Soit x un vecteur non nul de E. Montrer qu'il existe un entier p strictement positif tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), ..., f^{p-1}(x))$ soit libre et qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0.$$

Q 9. Justifier que $\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), ..., f^{p-1}(x))$ est stable par f.

Q 10. Montrer que : $X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \cdots + \alpha_0$ divise le polynôme χ_f.

Q 11. Démontrer que $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul.

II Étude des endomorphismes cycliques

II.A – Endomorphismes cycliques nilpotents

Dans cette sous-partie, on suppose que f est un endomorphisme nilpotent de E. On note r le plus petit entier naturel tel que $f^r = 0$.

Q 12. Montrer que f est cyclique si et seulement si $r = n$. Préciser alors la matrice compagnon.

II.B – Dans cette sous-partie II.B, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

On suppose que $(\mathrm{Id}, f, f^2, ..., f^{n-1})$ est libre et on se propose de montrer que f est cyclique.

On factorise le polynôme caractéristique de f sous la forme

$$\chi_f(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

où les λ_k sont les p valeurs propres deux à deux distinctes de f et les m_k de $\mathbb{N}^*$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on pose $F_k = \ker((f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{m_k})$.

Q 13. Montrer que les sous-espaces vectoriels F_k sont stables par f et que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on note φ_k l'endomorphisme induit par $f - \lambda_k \mathrm{Id}$ sur le sous-espace vectoriel F_k,

$$\varphi_k : \left| \begin{array}{l} F_k \to F_k, \\ x \mapsto f(x) - \lambda_k x. \end{array} \right.$$

Q 14. Justifier que φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k.

On note ν_k le plus petit entier naturel tel que $\varphi_k^{\nu_k} = 0$.

Q 15. Pourquoi a-t-on $\nu_k \leqslant \dim(F_k)$?

Q 16. Montrer, avec l'hypothèse proposée, que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a $\nu_k = m_k$.

BY-NC-SA

Q 17. Expliciter la dimension de F_k pour $k \in [\![1, p]\!]$, puis en déduire l'existence d'une base $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ de E dans laquelle f a une matrice diagonale par blocs, ces blocs appartenant à $\mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$ et étant de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda_k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

On pose $x_0 = u_1 + u_{m_1+1} + \cdots + u_{m_1+\cdots+m_{p-1}+1}$.

Q 18. Déterminer les polynômes $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $Q(f)(x_0) = 0$.

Q 19. Justifier que f est cyclique.

III Endomorphismes commutants, décomposition de Frobenius

On appelle commutant de f l'ensemble $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$.

Q 20. Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

III.A – Commutant d'un endomorphisme cyclique

On suppose que f est cyclique et on choisit un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

Soit $g \in \mathcal{C}(f)$, un endomorphisme qui commute avec f.

Q 21. Justifier l'existence de λ_0, λ_1, ..., λ_{n-1} de $\mathbb{K}$ tels que

$$g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0).$$

Q 22. Montrer alors que $g \in \mathbb{K}[f]$.

Q 23. Établir que $g \in \mathcal{C}(f)$ si et seulement s'il existe un polynôme $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$.

III.B – Décomposition de Frobenius

On se propose de démontrer le théorème de décomposition de Frobenius : toute matrice est semblable à une matrice diagonale par blocs, ces blocs étant des matrices compagnons.

Q 24. Montrer que si la réunion d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels $F_1, ..., F_r$ de E est un sous-espace vectoriel, alors l'un des sous-espaces vectoriels F_i contient tous les autres.

On note d le degré de π_f.

Q 25. Justifier l'existence d'un vecteur x_1 de E tel que $(x_1, f(x_1), ..., f^{d-1}(x_1))$ est libre.

> Pour tout x non nul de E, on pourra remarquer que $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f)(x) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par un polynôme unitaire $\pi_{f,x}$ diviseur de π_f et considérer les sous-espaces vectoriels $\ker(\pi_{f,x}(f))$.

On pose $e_1 = x_1$, $e_2 = f(x_1)$, ..., $e_d = f^{d-1}(x_1)$ et $E_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, ..., e_d)$.

Q 26. Montrer que E_1 est stable par f et que $E_1 = \{P(f)(x_1) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$.

On note ψ_1 l'endomorphisme induit par f sur le sous-espace vectoriel E_1,

$$\psi_1 : \left| \begin{array}{l} E_1 \to E_1, \\ x \mapsto f(x). \end{array} \right.$$

BY-NC-SA

Q 27. Justifier que ψ_1 est cyclique.

On complète, si nécessaire, $(e_1, e_2, ..., e_d)$ en une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E. Soit Φ la d-ième forme coordonnée qui à tout vecteur x de E associe sa coordonnée suivant e_d. On note $F = \{x \in E \mid \forall i \in \mathbb{N},\ \Phi(f^i(x)) = 0\}$.

Q 28. Montrer que F est stable par f et que E_1 et F sont en somme directe.

Soit Ψ l'application linéaire de E dans $\mathbb{K}^d$ définie, pour tout $x \in E$, par

$$\Psi(x) = \left(\Phi(f^i(x))\right)_{0 \leqslant i \leqslant d-1} = (\Phi(x), \Phi(f(x))..., \Phi(f^{d-1}(x))).$$

Q 29. Montrer que Ψ induit un isomorphisme entre E_1 et $\mathbb{K}^d$.

Q 30. Montrer que $E = E_1 \oplus F$.

Q 31. En déduire qu'il existe r sous-espaces vectoriels de E, notés $E_1, ..., E_r$, tous stables par f tels que :

— $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$;

— pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, l'endomorphisme ψ_i induit par f sur le sous-espace vectoriel E_i est cyclique ;

— si on note P_i le polynôme minimal de ψ_i, alors P_{i+1} divise P_i pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant r-1$.

III.C – Commutant d'un endomorphisme quelconque

Q 32. Montrer que la dimension de $\mathcal{C}(f)$ est supérieure ou égale à n.

Q 33. On suppose que f est un endomorphisme tel que l'algèbre $\mathcal{C}(f)$ est égale à $\mathbb{K}[f]$. Montrer que f est cyclique.

IV Endomorphismes orthocycliques

Dans cette partie, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que E est un espace euclidien. Le produit scalaire de deux vecteurs x, y de E est noté $(x \mid y)$ et on désigne par $\mathrm{O}(E)$ le groupe des isométries vectorielles de E.

On dit qu'un endomorphisme f de E est *orthocyclique* s'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q (matrice compagnon).

IV.A – Isométries vectorielles orthocycliques

Soit $f \in \mathrm{O}(E)$.

Q 34. Soit $f' \in \mathrm{O}(E)$ ayant même polynôme caractéristique que f. Montrer qu'il existe des bases orthonormales $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E pour lesquelles la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est égale à la matrice de f' dans $\mathcal{B}'$.

Q 35. En déduire que f est orthocyclique si et seulement si $\chi_f = X^n - 1$ ou $\chi_f = X^n + 1$.

IV.B – Endomorphismes nilpotents orthocycliques

Soit f un endomorphisme nilpotent de E.

Q 36. Montrer qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire inférieure.

Q 37. En déduire que f est orthocyclique si et seulement si

$$f \text{ est de rang } n-1 \qquad \text{et} \qquad \forall x, y \in (\ker f)^\perp, \quad (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y).$$

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires
- Structures algébriques usuelles
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/mp