Concours Centrale-Supélec, France

Session 2025, filière MP

Option sciences industrielles de l'ingénieur

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Parties A et B : contexte, architecture du système de déplacement de la tête d'impression
- Partie C : établissement du modèle direct et détermination de l'erreur angulaire maximale de chaque articulation
- Partie D : modèle de comportement dynamique non linéaire couplé du bras articulé
- Partie E : modèle de comportement dynamique linéaire couplé du bras articulé
- Partie F : modèle de comportement dynamique linéaire découplé de chaque articulation
- Partie G : synthèse d'une commande monovariable de l'articulation B
- Partie H : validation du principe d'une commande monovariable du bras articulé
- Partie I : enrichissement de la synthèse d'une commande monovariable de l'articulation B
- Parties J et K : validation sur le modèle non linéaire couplé, analyse de la validation des différents modèles

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/mp/2025/si

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Option S2I

4 heures — Calculatrice autorisée

MP 2025

Construction laser additive directe

Partie A – Contexte

Ces dernières années, l'essor des procédés d'impression 3D métallique, qui font partie des procédés de fabrication additive, a permis de développer de nouvelles applications industrielles jusqu'alors non réalisables. Trois applications industrielles innovantes se démarquent : l'ajout de fonction technique sur une pièce existante, la création de géométrie complexe impossible à réaliser avec des procédés traditionnels et la réparation de pièces métalliques, voir la figure 1.



(a) Création de structure [1].

(b) Ajout de fonction technique sur une pièce existante [2].

(c) Réparation d'aubes de moteur [3].

Figure 1 – Exemples d'applications innovantes réalisées en impression 3D métallique.

Les différentes technologies de procédés d'impression métallique s'appuient toutes sur le même principe physique de soudage. La matière ajoutée est apportée par un outil, appelé tête d'impression, sous forme de fil ou de particules métalliques de très faible diamètre, de l'ordre de 15 à 45 µm.

Pour réaliser une pièce, la tête d'impression, déplacée à vitesse maitrisée, dépose la matière par couches successives de 0,2 à 0,5 mm de hauteur en fonction du niveau de précision désiré.

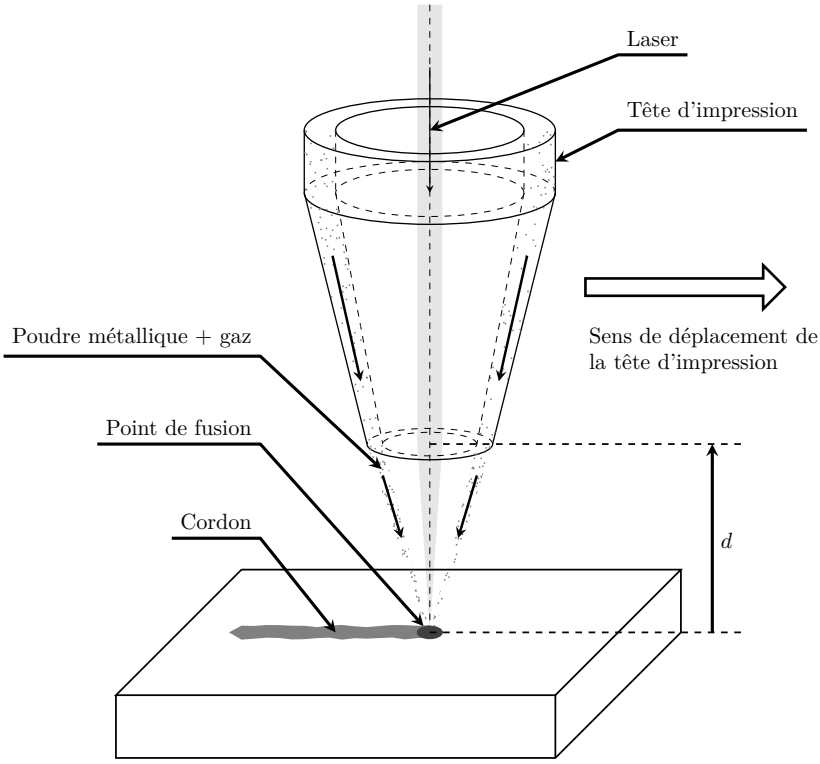
I – Procédé *Directed Energy Deposition*

Le procédé retenu pour cette étude est le procédé DED (*Directed Energy Deposition*).

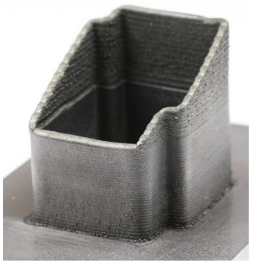
Ce type d'impression 3D métallique utilise la fusion de matière métallique sous forme de poudre. Cette poudre métallique est mélangée avec un gaz inerte tel que l'argon pour éviter la manifestation de phénomènes physiques néfastes à la fusion du métal comme son oxydation par exemple. Cela permet également de limiter les projections de particules métalliques en dehors de la zone en fusion. Le métal sous forme de poudre est ensuite fondu (création d'un bain de fusion) grâce à un laser « haute énergie » qui est conduit au plus près de la matière à l'aide d'une fibre optique (figure 2a).

Il est primordial de maitriser la distance d entre la sortie de la tête d'impression et le lieu de dépôt de matière pour créer un bain de fusion homogène afin d'obtenir une couche de matière solide la plus régulière possible après refroidissement. Cette distance caractérise la concentration de puissance du laser au niveau du bain de fusion. Si cette distance n'est pas parfaitement maitrisée, la poudre sera fusionnée trop tôt (risque de brûlure de la matière) ou trop tard (risque de mauvaise fusion de la matière) générant de fait des défauts géométriques sur la pièce (figures 2b et 2c).

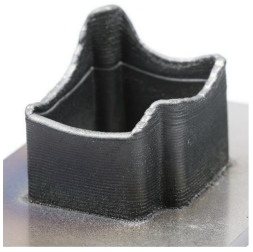
1. https ://3dprint.com/270637/3mf-3d-printing-format-now-a-linux-foundation-open-standars- project/
2. https ://www.trumpf.com/fr_INT/solutions/applications/fabrication-additive/rechargement-par-depot-laser/
3. J. Michael Wilson et al. « Remanufacturing of turbine blades by laser direct deposition with its energy and environmental impact analysis ». In : Journal of Cleaner Production 80 (2014), p. 170-178.



(a) Principe de fusion de la matière



(b) Bonne fusion de la matière



(c) Mauvaise fusion de la matière

Figure 2 – Principe de fusion du métal du procédé *Directed Energy Deposition*.

II – Bras robotisé de déplacement de la tête d'impression

Afin de déplacer la tête d'impression, celle-ci est fixée sur un bras robotisé. Contrairement aux structures classiques utilisées dans l'impression 3D, basées sur des déplacements linéaires, la structure utilisée sur le système de cette étude utilise un bras robotisé constitué de 6 axes rotatifs, désignés articulations par la suite (figure 3).

Le bras articulé robotisé, utilisé dans le laboratoire de mécanique des contacts et des structures (LaMCoS), permet des déplacements dans une sphère de rayon 1,6 m en portant une charge utile de 20 kg.

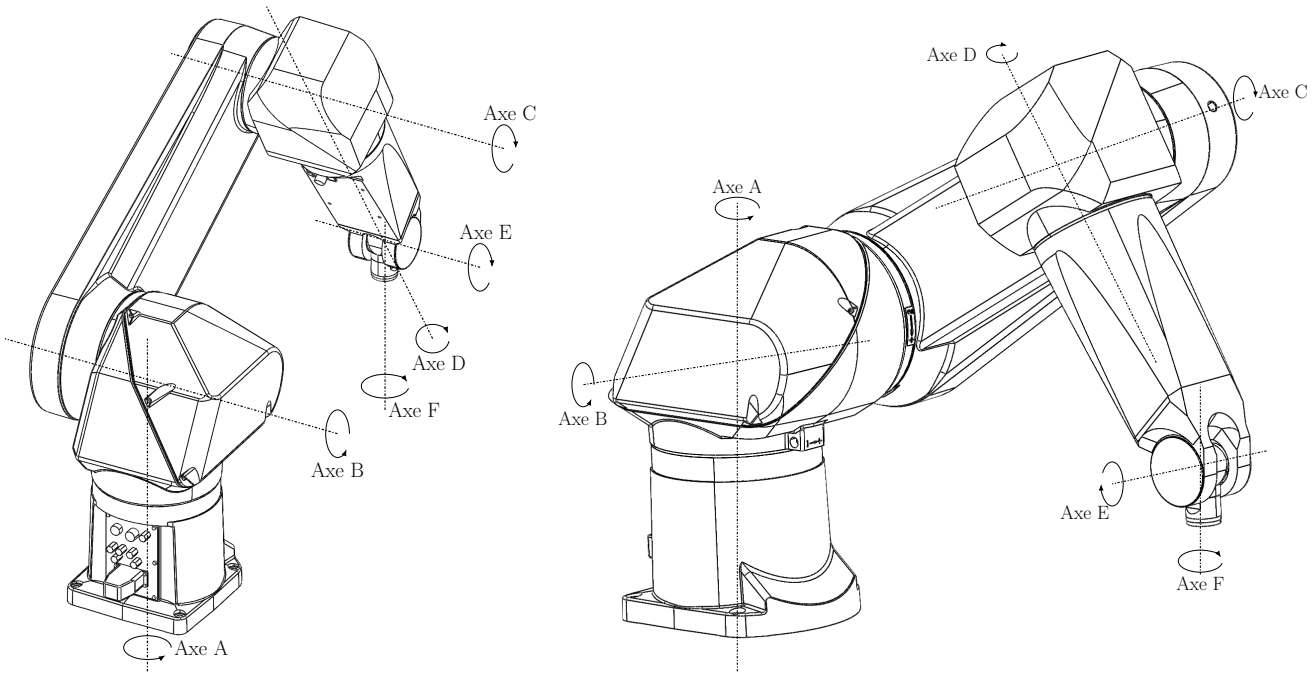


Figure 3 – Définition des axes rotatifs (articulations) du bras articulé robotisé.

III – Défauts de matière

Le LaMCOs se concentre sur l'étude des défauts géométriques générés par le procédé DED. Ces défauts peuvent avoir pour origine des problèmes de couplages thermomécaniques lors de la fusion de la poudre métallique, mais également une mauvaise stratégie de déplacement du bras robotisé. La figure 4 illustre les différences de qualité obtenues entre sept cordons identiques pour lesquels seule la stratégie de commande cinématique a été modifiée.

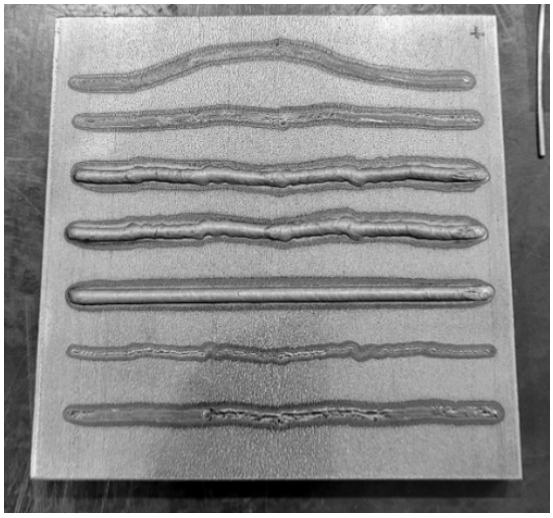


Figure 4 – Exemples de réalisation d'un même cordon de soudure avec des commandes cinématiques différentes.

Ainsi, afin de limiter les défauts géométriques et d'obtenir un cordon de matière le plus homogène possible, il est primordial d'avoir un débit de métal en fusion constant durant le procédé. Cela dépend :

- du débit de poudre projetée (supposé constant) ;
- de la puissance du laser (supposée constante) ;
- de la position du point de fusion par rapport au plan de dépose de la matière (étudiée dans le sujet) ;
- de la vitesse de déplacement de la tête d'impression (étudiée dans le sujet).

IV – Cadre de l'étude

On s'intéresse à la réalisation d'un cordon de référence rectiligne et horizontal, d'une longueur de 100 mm. Pour ce faire, l'extrémité du bras articulé robotisé portant la tête d'impression devra suivre un mouvement rectiligne horizontal (figure 5). Durant ce déplacement, seules les articulations B, C et E seront utilisées.

Le bras articulé robotisé est une chaine cinématique ouverte constituée d'un socle (1), de trois segments mobiles (2, 3, 6) et de trois articulations (B, C, E). Ses mouvements seront commandés suivant une loi de trapèze en vitesse afin de limiter les accélérations brusques qui pourraient le faire osciller.

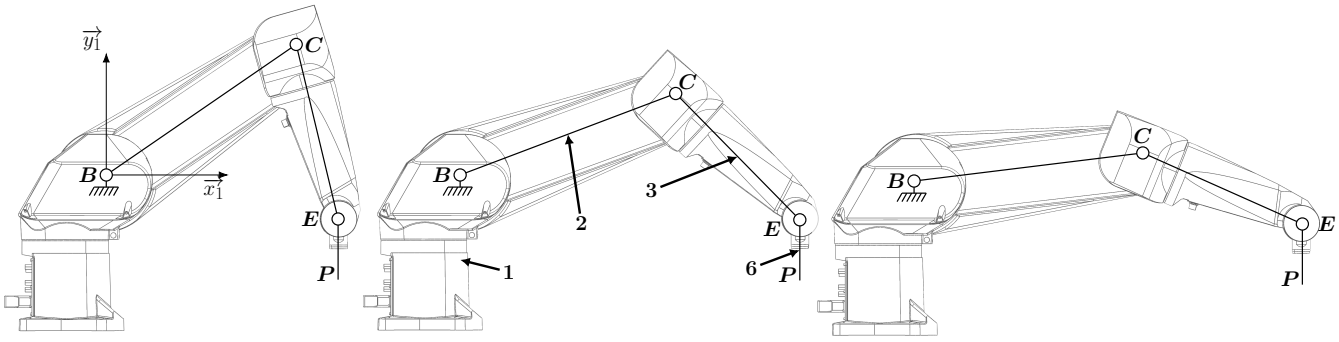


Figure 5 – Mouvement du bras articulé robotisé lors d'un déplacement horizontal en ligne droite.

Des études réalisées précédemment au LaMCoS ont permis de déterminer un ensemble d'exigences, liées au procédé de fabrication, à respecter pour obtenir un cordon de bonne qualité (figure 6).

Id	Exigence	Critère	Niveau
Id1	Maitriser la position du point de fusion par rapport au plan de dépose de la matière	Positionnement vertical du point de fusion P	$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{y_1} = -0{,}311$ m $\pm$ 150 µm
		Positionnement angulaire de la tête d'impression par rapport au plan de dépose de la matière	$(-)\frac{\pi}{2} \pm \frac{0{,}1}{180} \times \pi$ rad
Id2	Maitriser la position du cordon de matière sur le plan de dépose de cette matière	Positionnement longitudinal du point de fusion P	$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{x_1}$ de 1 m à 1,1 m $\pm$0,1 mm
Id3	Limiter les excédents et les manques de matière déposée pendant les phases d'accélération et de décélération	Accélération-décélération minimale	0,15 m $\cdot$ s^{-2}
		Premier dépassement relatif maximal de la vitesse de la tête d'impression en début et fin de mouvement à vitesse constante	$\pm$ 5% de la vitesse constante de consigne du déplacement de la tête d'impression
Id4	Limiter les irrégularités de matière déposée pendant les phases à vitesse constante	Vitesse de déplacement de la tête d'impression	0,05 m $\cdot$ s^{-1} $\pm$ 1×10^{-3} m $\cdot$ s^{-1}

Figure 6 – Extrait du cahier des charges de réalisation d'un cordon de référence.

La problématique de cette étude est de valider une commande du bras articulé robotisé permettant de déplacer la tête d'impression dans le cadre limitatif de la réalisation d'un cordon de référence conforme aux exigences décrites à la figure 6. Cette commande doit être simple et paramétrable dans le but de réaliser des expérimentations.

Pour répondre à cette problématique, l'étude s'appuie principalement sur la démarche suivante :

- définir une commande simple et paramétrable ;
- établir un modèle de simulation du système de déplacement de la tête d'impression intégrant cette commande ;
- valider la commande retenue au regard des exigences de réalisation du cordon de référence.

Partie B – Architecture du système de déplacement de la tête d'impression

- Objectif

Définir une commande de déplacement de la tête d'impression simple et paramétrable.

L'architecture cinématique dispose de trois degrés de liberté dans le plan du mouvement (voir figure 8). Les trois coordonnées cartésiennes de la tête d'impression sont définies par l'utilisateur. Trois actionneurs électriques rotatifs (motoréducteurs) génèrent les mouvements des trois articulations, la tête d'impression étant fixée sur le dernier segment. L'architecture fonctionnelle du système de déplacement de la tête d'impression est présentée sur la figure 7.

Notations :

– consignes articulaires : $q_c(t) = \begin{pmatrix} \theta_{Bc}(t) \\ \theta_{Cc}(t) \\ \theta_{Ec}(t) \end{pmatrix}$ et coordonnées articulaires des segments mobiles : $q(t) = \begin{pmatrix} \theta_B(t) \\ \theta_C(t) \\ \theta_E(t) \end{pmatrix}$;

– courants de consignes : $i_c(t) = \begin{pmatrix} i_{Bc}(t) \\ i_{Cc}(t) \\ i_{Ec}(t) \end{pmatrix}$ et couples de sorties des motoréducteurs : $\Gamma(t) = \begin{pmatrix} C_B(t) \\ C_C(t) \\ C_E(t) \end{pmatrix}$.

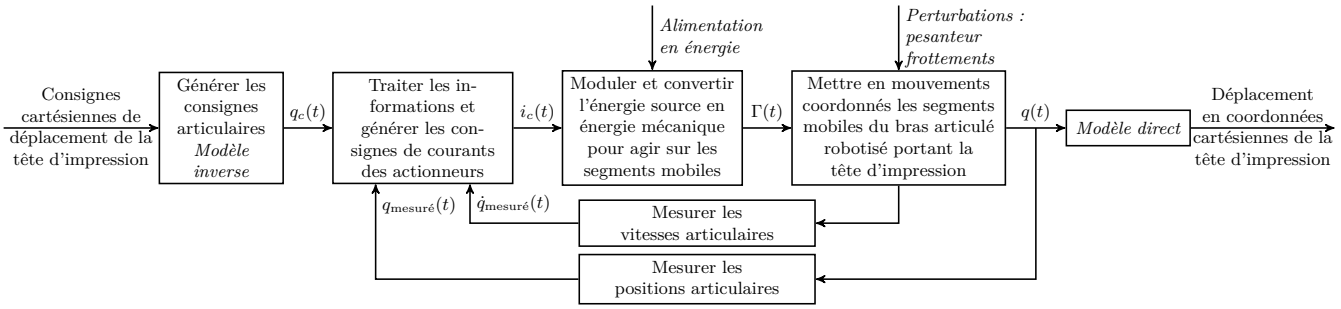


Figure 7 – Architecture du système de déplacement de la tête d'impression.

La commande, dont la fonction est de traiter les informations et de générer les consignes, doit être simple et paramétrable. À cet effet, il est envisagé une commande monovariable. Chaque motoréducteur est commandé en courant. La consigne de courant de chaque motoréducteur sera élaborée uniquement à partir des informations acquises sur le segment qu'il met en mouvement ; c'est-à-dire de la consigne, de la position et de la vitesse articulaire de ce segment.

Hypothèses : les chaines de mesures sont supposées parfaites. Ainsi, les grandeurs mesurées seront considérées comme égales aux grandeurs réelles.

Q1. Sur le diagramme ibd du document réponse, relier les ports et les blocs de manière à décrire la commande monovariable définie ci-dessus. Préciser les labels de flux ou de contrôle manquants.

Avant de mettre en œuvre des moyens matériels onéreux, une étape de validation du principe de la commande monovariable retenue va être conduite à l'aide d'outils de simulation. Pour cela, l'élaboration d'un modèle de simulation des différents blocs de la figure 7 est nécessaire.

Partie C – Établissement du modèle direct et détermination de l'erreur angulaire maximale de chaque articulation

- Objectif

Établir la relation entre les coordonnées cartésiennes de la tête d'impression et les coordonnées articulaires des segments puis déterminer l'erreur angulaire maximale des articulations.

L'étude porte sur la réalisation d'un cordon de référence rectiligne de direction $\overrightarrow{x_1}$, les trois segments, numérotés 2, 3 et 6, se déplaçant dans le plan $(B, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1})$.

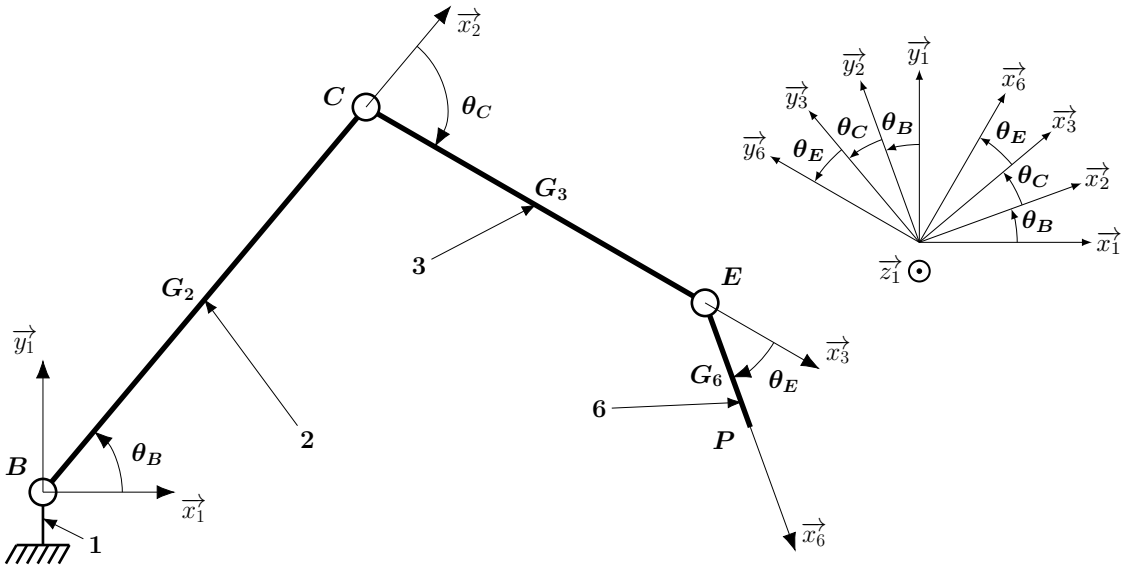


Figure 8 – Schéma cinématique du bras articulé et figure de changement de bases.

Paramétrage

– Coordonnées cartésiennes de la tête d'impression et du point de fusion P attaché au bras 6 :
- $\overrightarrow{BP} = x(t)\overrightarrow{x_1} + y(t)\overrightarrow{y_1}$;
- $(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_6}) = \theta_6(t)$, θ_6 attitude de la tête d'impression.

– Paramétrage des solides :
- $\overrightarrow{BC} = \ell_2\overrightarrow{x_2}$, avec $\ell_2 = 825$ mm ;
- $\overrightarrow{CE} = \ell_3\overrightarrow{x_3}$, avec $\ell_3 = 625$ mm ;
- $\overrightarrow{EP} = \ell_6\overrightarrow{x_6}$, avec $\ell_6 = 300$ mm ; P point de fusion.

– Paramétrage des liaisons, coordonnées articulaires :
- $(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2}) = \theta_B(t)$;
- $(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{x_3}) = \theta_C(t)$;
- $(\overrightarrow{x_3},\overrightarrow{x_6}) = \theta_E(t)$.

Q2. Établir le système d'équations exprimant les coordonnées cartésiennes $(x(t),y(t),\theta_6(t))$ en fonction des coordonnées articulaires $(\theta_B(t),\theta_C(t),\theta_E(t))$. Ce système d'équations est appelé modèle direct.

Il serait possible de déterminer le modèle inverse de manière analytique ou algorithmique. Au cours de la réalisation du cordon de référence, la position verticale du point de fusion doit être constante, $y_0 = -0{,}311$ m. Mais, des erreurs de position angulaire placent le bras articulé à la position articulaire $(\theta_{B0} + \Delta\theta_B, \theta_{C0} + \Delta\theta_C, \theta_{E0} + \Delta\theta_E)$ alors qu'il devrait être à la position articulaire $(\theta_{B0},\theta_{C0},\theta_{E0})$. L'erreur de position angulaire est supposée être petite et la même pour les trois articulations, $\Delta\theta_B = \Delta\theta_C = \Delta\theta_E$. Ainsi, à l'ordre 1, il est possible d'utiliser les approximations : $\cos(\Delta\theta_B) \approx 1$ et $\sin(\Delta\theta_B) \approx \Delta\theta_B$.

Q3. Déterminer l'erreur de position verticale linéarisée Δy en fonction de ℓ_2, ℓ_3, ℓ_6, θ_{B0}, θ_{C0}, θ_{E0} et $\Delta\theta_B$. Déterminer la valeur maximale de $\Delta\theta_B$ pour la position articulaire :

$$\left(\theta_{B0} = 50\frac{\pi}{180} \text{ rad}, \theta_{C0} = -100\frac{\pi}{180} \text{ rad}, \theta_{E0} = -40\frac{\pi}{180} \text{ rad}\right)$$

L'erreur angulaire maximale de chaque articulation, calculée précédemment, sera utilisée pour la validation de la commande monovariable des articulations.

Partie D – Modèle de comportement dynamique non linéaire couplé du bras articulé

- Objectif

Établir un modèle de comportement dynamique du bras articulé permettant de simuler le mouvement de la tête d'impression.

Notations et données

- Données cinétiques des solides :
  - G_i est le centre d'inertie du segment i ;
  - segment 2 : $\overrightarrow{BG_2} = \ell_{G_2}\overrightarrow{x_2}$, masse m_2, moment d'inertie selon l'axe $(G_2, \overrightarrow{z_1})$ noté I_2 ;
  - segment 3 : $\overrightarrow{CG_3} = \ell_{G_3}\overrightarrow{x_3}$, masse m_3, moment d'inertie selon l'axe $(G_3, \overrightarrow{z_1})$ noté I_3 ;
  - segment 6 : $\overrightarrow{EG_6} = \ell_{G_6}\overrightarrow{x_6}$, masse m_6, moment d'inertie selon l'axe $(G_6, \overrightarrow{z_1})$ noté I_6.
- Données sur les actions mécaniques :
  - couple motoréducteur de l'axe B : $\overrightarrow{C_{1\to 2}} = C_B(t)\overrightarrow{z_1}$;
  - couple motoréducteur de l'axe C : $\overrightarrow{C_{2\to 3}} = C_C(t)\overrightarrow{z_1}$;
  - couple motoréducteur de l'axe E : $\overrightarrow{C_{3\to 6}} = C_E(t)\overrightarrow{z_1}$;
  - accélération de la pesanteur : $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{y_1}$.

Hypothèses : les frottements secs et visqueux sont supposés négligeables. L'action due à l'impression laser est supposée négligeable. Le repère attaché au socle 1 est supposé galiléen.

I – Étude à l'équilibre

Considérons une position d'équilibre des bras articulés : $q_0 = \begin{pmatrix} \theta_{B0} \\ \theta_{C0} \\ \theta_{E0} \end{pmatrix}$. Soient $\Gamma_0 = \begin{pmatrix} C_{B0} \\ C_{C0} \\ C_{E0} \end{pmatrix}$ les trois couples des motoréducteurs réalisant cette position d'équilibre.

Q4. Déterminer C_{E0} en fonction des coordonnées articulaires constantes θ_{B0}, θ_{C0} et θ_{E0}. Pour cela, isoler le segment 6, effectuer l'inventaire des actions mécaniques extérieures au segment 6 et appliquer le théorème du moment statique selon l'axe $(E, \overrightarrow{z_1})$. Mettre le résultat sous la forme $C_{E0} = A\cos(\theta_{i0})$. Exprimer A et θ_{i0} en fonction de paramètres géométriques et cinétiques.

Il est possible de faire de même pour C_{C0} et C_{B0}.

II – Modèle de comportement dynamique de l'articulation E

Q5. Déterminer $C_E(t)$ en fonction des paramètres du mouvement $\theta_B(t)$, $\theta_C(t)$ et $\theta_E(t)$, de leurs dérivées successives, des paramètres géométriques constants et des grandeurs cinétiques. Préciser le segment isolé, l'inventaire des actions mécaniques extérieures à ce segment ainsi que le théorème utilisé en indiquant le point d'écriture et la direction de projection. S'aider du formulaire ci-dessous. Soit $q(t) = \begin{pmatrix} \theta_B(t) \\ \theta_C(t) \\ \theta_E(t) \end{pmatrix}$. Le résultat peut se mettre sous la forme :

$$C_E = M_{13}(q)\ddot{\theta}_B + M_{23}(q)\ddot{\theta}_C + M_{33}(q)\ddot{\theta}_E + C_{31}(q,\dot{q})\dot{\theta}_B + C_{32}(q,\dot{q})\dot{\theta}_C + Q_3(q).$$

Exprimer $M_{13}(q)$, $M_{23}(q)$, $M_{33}(q)$, $C_{31}(q,\dot{q})$, $C_{32}(q,\dot{q})$ et $Q_3(q)$.

Formulaire :

$$\overrightarrow{\delta_{(G_6,6/1)}} \cdot \overrightarrow{z_1} = I_6\left(\ddot{\theta}_B + \ddot{\theta}_C + \ddot{\theta}_E\right)$$

$$\overrightarrow{a_{(G_6,6/1)}} =$$

$$\begin{pmatrix} \ell_2\ddot{\theta}_B \sin(\theta_C+\theta_E) + \ell_3\left(\ddot{\theta}_B+\ddot{\theta}_C\right)\sin(\theta_E) - \ell_2\dot{\theta}_B^2\cos(\theta_C+\theta_E) - \ell_{G_6}\left(\dot{\theta}_B+\dot{\theta}_C+\dot{\theta}_E\right)^2 - \ell_3\left(\dot{\theta}_B+\dot{\theta}_C\right)^2\cos(\theta_E) \\ \ell_2\ddot{\theta}_B\cos(\theta_C+\theta_E) + \ell_3\left(\ddot{\theta}_B+\ddot{\theta}_C\right)\cos(\theta_E) + \ell_{G_6}\left(\ddot{\theta}_B+\ddot{\theta}_C+\ddot{\theta}_E\right) + \ell_2\dot{\theta}_B^2\sin(\theta_C+\theta_E) + \ell_3\left(\dot{\theta}_B+\dot{\theta}_C\right)^2\sin(\theta_E) \\ 0 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_6},\overrightarrow{y_6},\overrightarrow{z_1})}$$

III – Modèle de comportement dynamique des articulations C et B

Q6. Exposer la démarche qui permettrait de déterminer $C_C(t)$ en fonction des paramètres du mouvement θ_B, θ_C, θ_E, de leurs dérivées successives, des paramètres géométriques constants et des grandeurs cinétiques. Il n'est pas demandé de faire les calculs mais de préciser le système isolé, l'inventaire des actions mécaniques extérieures au système isolé, le théorème général de la dynamique à employer, et si nécessaire le point et la direction de projection.

Q7. Faire de même pour la détermination de $C_B(t)$.

IV – Modèle de simulation du comportement dynamique non linéaire couplé du bras articulé

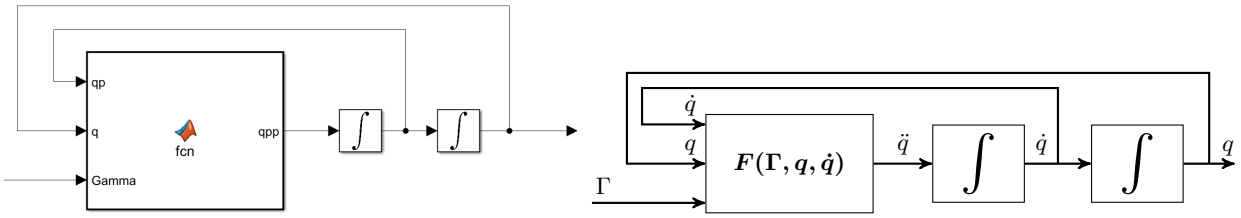
Les trois équations obtenues aux questions **Q5**, **Q6** et **Q7** peuvent se mettre sous la forme :

$$\Gamma = M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + Q(q).$$

Soit, pour le système à trois degrés de liberté étudié :

$$\begin{pmatrix} C_B \\ C_C \\ C_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_B \\ \ddot{\theta}_C \\ \ddot{\theta}_E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\theta}_B \\ \dot{\theta}_C \\ \dot{\theta}_E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}.$$

Il est alors possible de faire une simulation numérique sur le principe décrit par les schémas de la figure 9, à condition de disposer de la fonction $F(\Gamma,q,\dot{q})$.



(a) Schéma de simulation numérique

(b) Schéma fonctionnel équivalent

Figure 9 – Schéma de simulation numérique du comportement dynamique non linéaire couplé du bras articulé.

Q8. Exprimer la fonction $F(\Gamma,q,\dot{q})$.

Les modèles de simulation des principaux blocs de la figure 7 sont désormais établis. Toutefois, le système étudié se révèle complexe. Pour définir et déterminer les paramètres réglables de la commande monovariable retenue, il est nécessaire de disposer d'un modèle simplifié.

Partie E – Modèle de comportement dynamique linéaire couplé du bras articulé

- Objectif

Établir un modèle de comportement dynamique linéaire couplé du bras articulé permettant de synthétiser la commande des mouvements des trois articulations.

Pour linéariser le modèle de comportement dynamique, il faut étudier les variations des couples $\delta\Gamma(t)$ et des paramètres articulaires $\delta q(t)$, autour d'une position d'équilibre ($q_0 =$ constante, $\dot{q}_0 = 0$, $\ddot{q}_0 = 0$), avec :

$$\Gamma(t) = \Gamma_0 + \delta\Gamma(t) \text{ et } q(t) = q_0 + \delta q(t).$$

Développements limités à l'ordre 1 :

$$M(q_0 + \delta q(t)) \approx M(q_0) + \frac{\partial M}{\partial q}(q_0)\delta q(t) \ ;$$

$$Q(q_0 + \delta q(t)) \approx Q(q_0) + \frac{\partial Q}{\partial q}(q_0)\delta q(t) \ ;$$

$$C\left(q_0 + \delta q(t), \dot{q}_0 + \dot{\delta q}(t)\right) \approx C(q_0,\dot{q}_0) + \frac{\partial C}{\partial q}(q_0,\dot{q}_0)\delta q(t) + \frac{\partial C}{\partial \dot{q}}(q_0,\dot{q}_0)\dot{\delta q}(t).$$

Dans cette étude, $C(q_0,\dot{q}_0) = 0$.

Q9. Linéariser l'équation $\Gamma(t) = M\left(q(t)\right)\ddot{q}(t) + C\left(q(t),\dot{q}(t)\right)\dot{q}(t) + Q\left(q(t)\right)$ pour obtenir un système d'équations différentielles linéaires du second degré : $\delta\Gamma(t) = A(q_0)\ddot{\delta q}(t) + B(q_0)\delta q(t)$. Exprimer $A(q_0)$ et $B(q_0)$.

Notations :

$$\delta\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \delta C_B(t) \\ \delta C_C(t) \\ \delta C_E(t) \end{pmatrix}, \qquad \delta q(t) = \begin{pmatrix} \delta\theta_B(t) \\ \delta\theta_C(t) \\ \delta\theta_E(t) \end{pmatrix}.$$

Adopter les notations ci-dessous pour la suite :

$$A(q_0) = A_0 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \ ;$$

$$B(q_0) = B_0 = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}.$$

Q10. Exprimer $\delta C_B(t)$ en fonction de A_{ij}, de B_{ij}, des $\delta\theta_k(t)$ et $\ddot{\delta\theta}_k(t)$, $k \in \{B, C, E\}$.

Il est possible de faire de même pour les 2 autres variations de couple $\delta C_C(t)$ et $\delta C_E(t)$.

Le système d'équations $\delta\Gamma(t) = A(q_0)\ddot{\delta q}(t) + B(q_0)\delta q(t)$ peut être transformé dans le domaine du calcul symbolique de Laplace. Ainsi, le schéma-bloc de la figure 10 montre le couplage des 3 articulations.

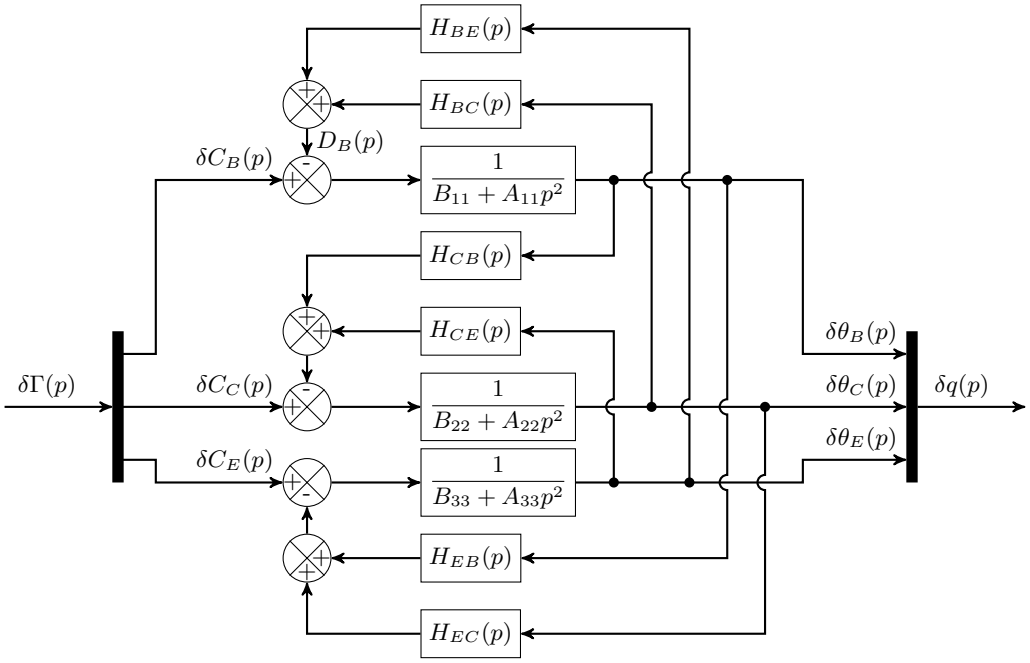


Figure 10 – Modèle transfert de comportement dynamique linéaire couplé du bras articulé.

Partie F – Modèle de comportement dynamique linéaire découplé de chaque articulation

I – Modèle de comportement dynamique linéaire découplé de l'articulation B

- Objectif

Établir un modèle de comportement dynamique linéaire découplé des articulations afin de pouvoir synthétiser une commande monovariable.

Pour réaliser la commande monovariable de chaque articulation, il est plus simple de disposer d'un modèle découplé.

Q11. À partir de la réponse apportée à la question 10 et de la figure 10, déterminer $D_B(p)$ en fonction de A_{ij}, de B_{ij}, de $\delta\theta_C(p)$ et de $\delta\theta_E(p)$.

$D_B(p)$ est assimilé à un signal perturbateur externe, voir la figure 11.

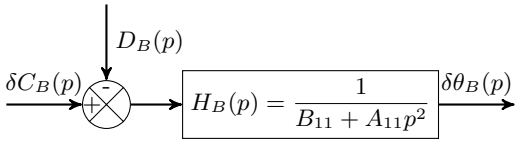


Figure 11 – Modèle transfert de comportement dynamique linéaire découplé de l'articulation B.

La position d'équilibre retenue pour cette étude est $q_0 = \begin{pmatrix} 50\frac{\pi}{180} \\ -100\frac{\pi}{180} \\ -40\frac{\pi}{180} \end{pmatrix}$, ce qui correspond à une position médiane atteinte lors du déplacement horizontal présenté en figure 5.

Pour cette position, la fonction de transfert du modèle linéaire découplé $H_B(p)$ s'écrit :

$$H_B(p) = \frac{-K_B}{1-\frac{p^2}{\omega_B^2}} \quad \text{avec } K_B = 0{,}007\,16 \text{ rad} \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \text{ et } \omega_B = 1{,}78 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Il sera possible de synthétiser les articulations C et E par une méthode équivalente une fois l'articulation B stabilisée.

II – Validation du modèle de comportement dynamique linéaire découplé de l'articulation B

- Objectif

Valider le modèle de comportement dynamique linéaire découplé au regard du modèle linéaire couplé de l'articulation B.

Dans le domaine du calcul symbolique de Laplace et à partir du modèle de comportement dynamique linéaire couplé, $\delta\Gamma(t) = A(q_0)\delta\ddot{q}(t) + B(q_0)\delta q(t)$, il est possible d'écrire le système d'équations suivant :

$$\delta\Gamma(p) = \overline{\overline{H}}(p)\delta q(p) \text{ avec } \delta\Gamma(p) = \begin{pmatrix} \delta C_B(p) \\ \delta C_C(p) \\ \delta C_E(p) \end{pmatrix} \text{ et } \delta q(p) = \begin{pmatrix} \delta\theta_B(p) \\ \delta\theta_C(p) \\ \delta\theta_E(p) \end{pmatrix},$$

où $\overline{\overline{H}}(p)$ est une matrice de polynômes en p.

Q12. En précisant l'hypothèse nécessaire et en considérant $\delta C_C(p) = 0$ et $\delta C_E(p) = 0$, montrer qu'il est possible d'écrire $\delta\theta_B(p) = H_{B\text{lin.couplé}}(p)\delta C_B(p)$. Ne pas calculer $H_{B\text{lin.couplé}}(p)$.

Le diagramme de Bode de $H_{B\text{lin.couplé}}(i\omega)$ est donné sur le document réponse.

Pour un prédimensionnement en robotique industrielle, le temps de réponse τ_r et le facteur d'amortissement ζ sont respectivement choisis égaux à 0,1 s et 0,7. Pour légitimer la synthèse de la commande avec le modèle de comportement dynamique linéaire découplé, les réponses fréquentielles $H_{B\text{lin.couplé}}(i\omega)$ et $H_B(i\omega)$ doivent être voisines dans la bande de pulsations encadrant la pulsation propre qui vérifie $\tau_r\omega_0 = 3$. Ainsi, la bande de pulsations à considérer est la bande $\left[10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}; 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}\right]$.

Q13. Représenter le diagramme asymptotique, en gain et en phase, de Bode de $H_B(i\omega)$ sur le document réponse et conclure au regard de l'objectif de cette partie.

Un modèle de comportement dynamique linéaire découplé du bras articulé portant la tête d'impression est maintenant établi. Ce modèle va être utilisé pour définir et déterminer les paramètres de la commande monovariable.

Partie G – Synthèse d'une commande monovariable de l'articulation B

- Objectif

Régler les paramètres de la correction de l'asservissement angulaire de l'articulation B.

La structure du correcteur de la boucle d'asservissement de l'angle, présentée en figure 12, est retenue pour sa capacité à rejeter les perturbations. Une boucle de retour interne tachymétrique est utilisée pour séparer les deux pôles de la fonction de transfert de la boucle interne.

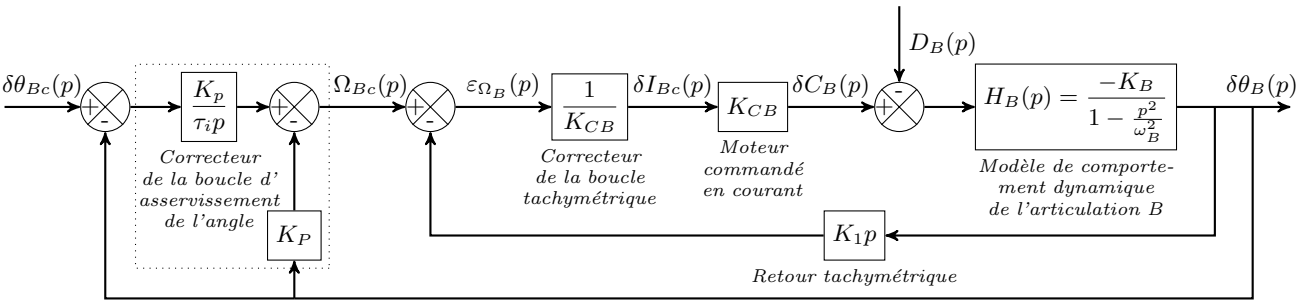


Figure 12 – Schéma bloc de la commande angulaire de l'articulation B.

I – Synthèse de la boucle interne tachymétrique

La fonction de transfert de la boucle interne tachymétrique $H_{TB}(p) = \dfrac{\delta\theta_B(p)}{\Omega_{Bc}(p)}$ a deux pôles réels dont un instable. Le pôle instable sera conservé pour synthétiser le correcteur de la boucle d'asservissement de l'angle. Le pôle stable sera rejeté en haute fréquence par rapport à la fréquence propre souhaitée ce qui permettra de le négliger pour synthétiser la commande. En conséquence, en supposant $D_B(p) = 0$, cela revient à considérer :

$$\frac{\delta\theta_B(p)}{\Omega_{Bc}(p)} = H_{TB}(p) = \frac{-K_B}{\left(1 + \frac{p}{\omega_{B_{HF}}}\right)\left(1 - \frac{p}{\omega_{B_{BF}}}\right)}. \qquad \text{(équation 1)}$$

Le temps de réponse attendu étant de $\tau_r = 0{,}1$ s, la pulsation propre souhaitée ω_0 est prise égale à 30 rad $\cdot$ s^{-1}. Ainsi, le pôle stable $\omega_{B_{HF}}$ que l'on souhaite négliger sera pris égal à 10 ω_0.

Q14. À partir de la figure 12, déterminer la fonction de transfert $\frac{\delta\theta_B(p)}{\Omega_{Bc}(p)} = H_{TB}(p)$ en fonction de K_B, ω_B et du gain de la correction tachymétrique K_1. En identifiant à l'expression (équation 1) de $H_{TB}(p)$, déterminer le pôle réel instable $\omega_{B_{BF}}$ ainsi que le gain de la correction tachymétrique K_1. Effectuer les applications numériques.

II – Synthèse de la correction de la boucle de position angulaire en l'absence de la perturbation $D_B(p)$

Pour synthétiser le correcteur de la boucle d'asservissement de l'angle, on approxime la fonction de transfert de la boucle interne en conservant le pôle dominant qui est instable :

$$\frac{\delta\theta_B(p)}{\Omega_{Bc}(p)} = H_{TB}(p) = \frac{-K_B}{\left(1 - \frac{p}{\omega_{B_{BF}}}\right)}.$$

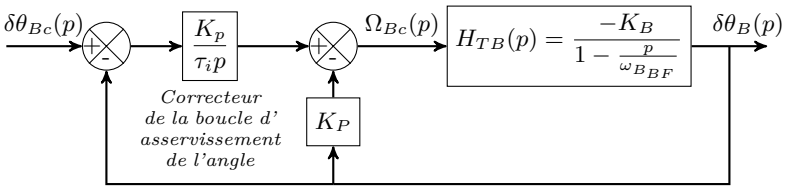


Figure 13 – Schéma bloc de la commande angulaire de l'articulation B en l'absence de $D_B(p)$.

Pour limiter les irrégularités de matière il est nécessaire de limiter le dépassement de $\theta_B(t)$. Le critère retenu est un facteur d'amortissement pour la commande angulaire $\zeta = 0{,}7$. On rappelle : $\omega_0 = 30$ rad $\cdot$ s^{-1}.

L'expression canonique de la fonction de transfert d'un système du second ordre est notée :

$$\frac{\delta\theta_B(p)}{\delta\theta_{Bc}(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}.$$

Q15. Déterminer la fonction de transfert de la commande angulaire $\frac{\delta\theta_B(p)}{\delta\theta_{Bc}(p)}$. Exprimer K_P et τ_i en fonction de ζ, ω_0, K_B et $\omega_{B_{BF}}$. Effectuer les applications numériques.

On procède de la même manière pour chaque articulation. Mais, avant de poursuivre, il est nécessaire de valider la possibilité d'adopter une commande monovariable pour piloter le bras articulé.

Partie H – Validation du principe d'une commande monovariable du bras articulé

- Objectif

Vérifier qu'il est possible d'envisager une commande monovariable du bras articulé.

La figure 14 est un extrait des critères concepteur. Si la simulation numérique montre qu'un seul des critères de cet extrait n'est pas respecté alors la commande envisagée pour piloter le bras articulé n'est pas viable.

Performance attendue pour chaque articulation	**Critère concepteur**	**Niveau**	**Flexibilité**
Stabilité de chaque articulation	Valeur angulaire de l'articulation	Constante au bout d'un temps fini, suite à une consigne en échelon	Aucune
Précision angulaire de chaque articulation	Erreur angulaire suite à une consigne en échelon	Nulle en régime permanent	Aucune
	Erreur angulaire suite à une perturbation en échelon	Nulle en régime permanent	Aucune

Figure 14 – Extrait des critères concepteur pour la commande angulaire du bras articulé.

Il est procédé à trois simulations numériques avec la commande monovariable, synthétisée en Partie G, appliquée au modèle de simulation du comportement dynamique non linéaire couplé du bras articulé présenté à la figure 9 (voir figure 15).

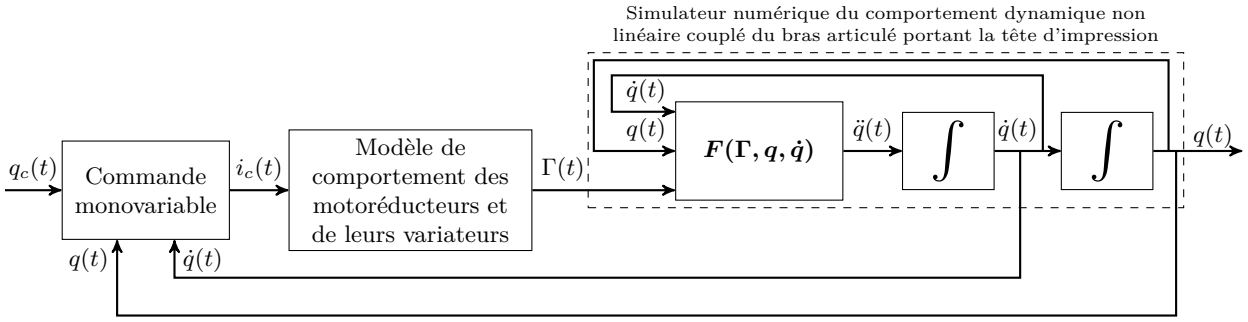


Figure 15 – Commande monovariable appliquée au modèle de comportement dynamique non linéaire couplé.

Soit la consigne angulaire $q_{c0} = \begin{pmatrix} \theta_{Bc0} \\ \theta_{Cc0} \\ \theta_{Ec0} \end{pmatrix}$ et la position angulaire d'équilibre du bras articulé $q_0 = \begin{pmatrix} \theta_{B0} \\ \theta_{C0} \\ \theta_{E0} \end{pmatrix}$.

À partir de cette position d'équilibre est appliquée successivement l'une des trois consignes angulaires q_{ci} suivantes :

$$q_{c1} = \begin{pmatrix} \theta_{Bc0} + \theta_0 \cdot u(t) \\ \theta_{Cc0} \\ \theta_{Ec0} \end{pmatrix}, \qquad q_{c2} = \begin{pmatrix} \theta_{Bc0} \\ \theta_{Cc0} + \theta_0 \cdot u(t) \\ \theta_{Ec0} \end{pmatrix}, \qquad q_{c3} = \begin{pmatrix} \theta_{Bc0} \\ \theta_{Cc0} \\ \theta_{Ec0} + \theta_0 \cdot u(t) \end{pmatrix},$$

avec $\theta_0 = 0{,}1$ rad et $u(t)$ l'échelon unitaire de Heaviside.

La figure 16 montre les variations des évolutions temporelles des angles $\delta q = \begin{pmatrix} \delta\theta_B \\ \delta\theta_C \\ \delta\theta_E \end{pmatrix}$ en réponse à ces trois entrées successives.

Q16. À l'aide des courbes de la figure 16, conclure sur la viabilité d'une commande monovariable pour piloter le bras articulé.

Le principe d'une commande monovariable n'étant pas remis en cause, il est possible de poursuivre l'étude engagée.

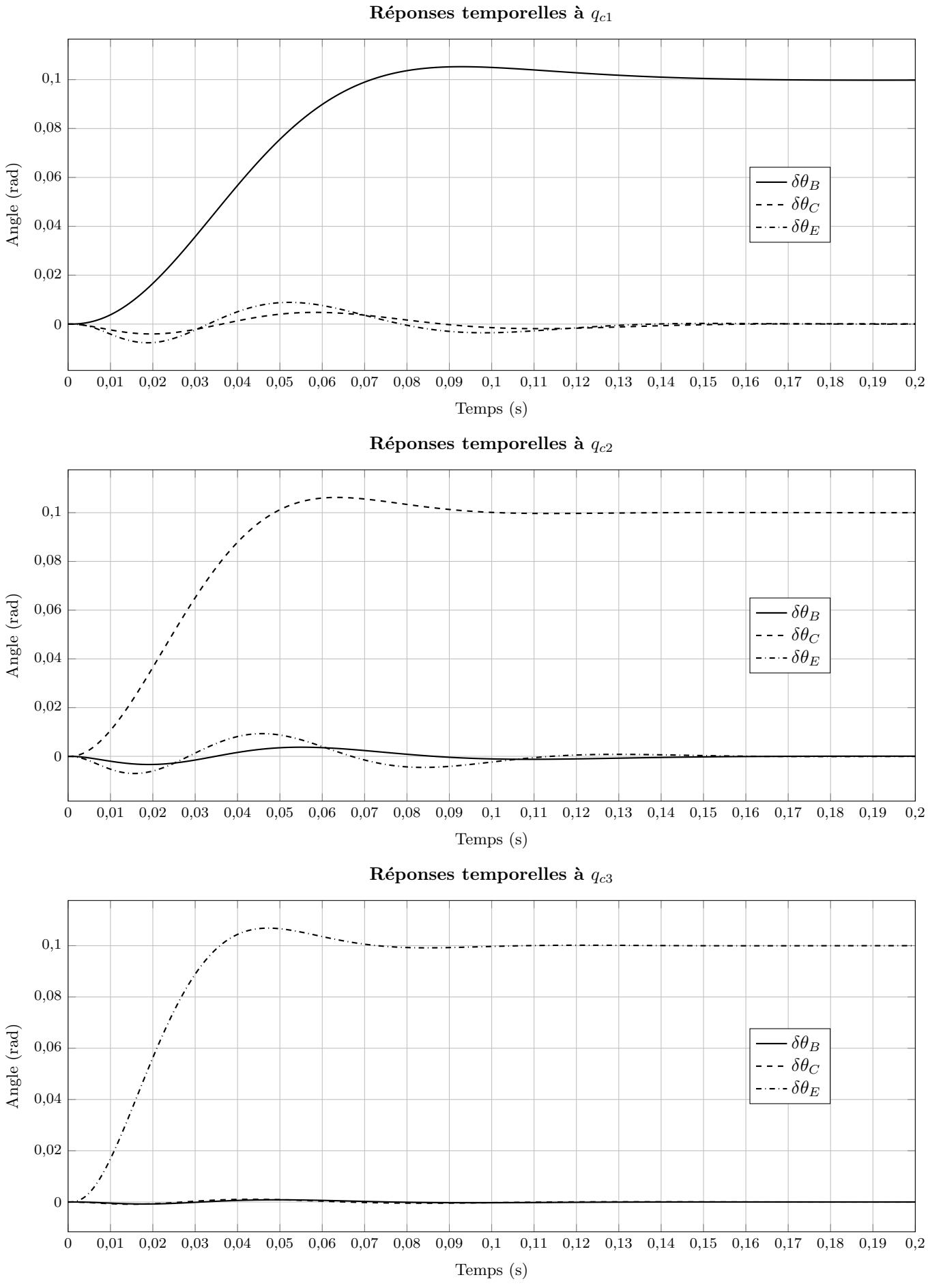


Figure 16 – Réponses angulaires pour trois consignes angulaires différentes.

Partie I – Enrichissement de la synthèse d'une commande monovariable de l'articulation B

I – Validation du choix du modèle de comportement dynamique utilisé pour synthétiser la commande monovariable de l'articulation B

- Objectif

Valider le choix du modèle de comportement dynamique linéaire simplifié découplé pour synthétiser la commande monovariable de l'articulation B.

On rappelle que la commande monovariable synthétisée pour l'articulation B est élaborée avec une boucle interne tachymétrique et un correcteur de la boucle d'asservissement de l'angle. Cette commande a été dimensionnée à partir d'un modèle linéaire simplifié découplé. Avant de poursuivre il est nécessaire de la valider par comparaison avec la même commande monovariable appliquée au modèle linéaire couplé, $H_{B\text{lin.couplé}}(p)$.

Dans le cas général, $\delta C_C(p)$ et $\delta C_E(p)$ ne sont pas nuls. En supposant la matrice $\overline{\overline{H}}^{-1}(p)$ calculable, on pose :

$$\overline{\overline{H}}^{-1}(p) = \begin{pmatrix} H_{B\text{lin.couplé}}(p) & H_{BC\text{lin.couplé}}(p) & H_{BE\text{lin.couplé}}(p) \\ H_{CB\text{lin.couplé}}(p) & H_{C\text{lin.couplé}}(p) & H_{CE\text{lin.couplé}}(p) \\ H_{EB\text{lin.couplé}}(p) & H_{EC\text{lin.couplé}}(p) & H_{E\text{lin.couplé}}(p) \end{pmatrix}.$$

Q17. Compléter, sur le document réponse, le schéma-blocs de la commande monovariable de l'articulation B appliquée au modèle linéaire couplé.

La stabilité des deux modèles étant vérifiée, la validation est effectuée par comparaison des réponses à une rampe de la commande monovariable, synthétisée en Partie G, appliquée d'une part au modèle linéaire simplifié découplé, présenté sur la figure 13, et appliquée d'autre part au modèle linéaire couplé, étudiée à la question **Q17** et en considérant $\delta C_C(p) = 0$ et $\delta C_E(p) = 0$. Les deux réponses sont tracées sur la figure 17. La pente a_r de la rampe correspond à la phase de vitesse constante du trapèze de vitesse préconisé pour réaliser le dépôt de matière.

Q18. Conclure sur l'écart entre les deux modèles. Relever l'erreur de trainage constante $\Delta\theta_B$, de l'articulation B, et conclure au regard de la valeur maximale de $\Delta\theta_B$ déterminée à la question **Q3**.

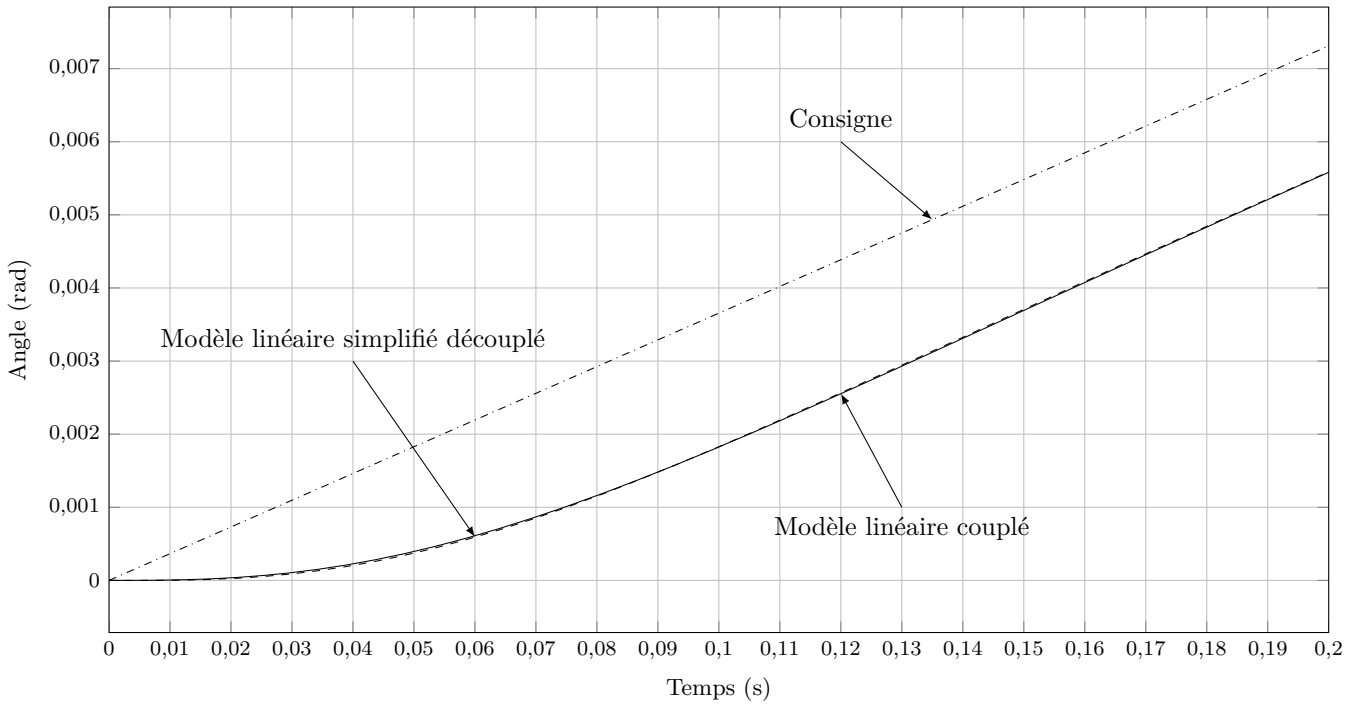


Figure 17 – Réponses de l'articulation B à une rampe de position angulaire.

II – Commande par anticipation de l'articulation B

- Objectif

Pallier l'erreur en suivi angulaire de l'articulation B.

La commande angulaire est complétée par une correction par anticipation.

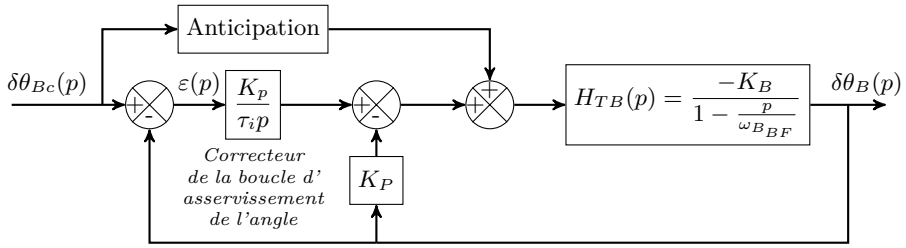


Figure 18 – Commande par anticipation.

Idéalement, $\delta\theta_B(t) = \delta\theta_{Bc}(t)\ \forall t$, ainsi $\varepsilon(p) = 0$. Notons $\delta\theta_B^*(p) = \delta\theta_{Bc}(p)$ la réponse idéale à la consigne angulaire $\delta\theta_{Bc}(p)$ et $Ca_B^*(p)$ la fonction de transfert d'anticipation idéale (voir la figure 19).

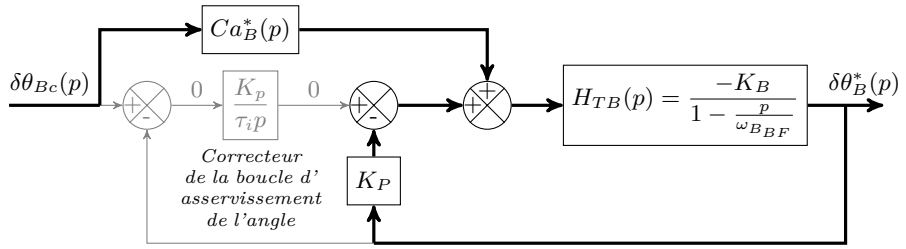


Figure 19 – Commande par anticipation dans le cas idéal.

Q19. Déterminer la fonction de transfert d'anticipation idéale $Ca_B^*(p)$ en fonction de K_P et $H_{TB}(p)$ puis en fonction de K_P, K_B et $\omega_{B_{BF}}$. Justifier que la fonction de transfert $Ca_B^*(p)$ n'est pas physiquement réalisable.

La fonction de transfert d'anticipation idéale $Ca_B^*(p)$ n'étant pas réalisable, elle est complétée par un filtre haute fréquence :

$$Ca_B(p) = Ca_B^*(p)\frac{1}{K_B\left(1+\frac{p}{10\omega_0}\right)}.$$

L'erreur $\varepsilon(p)$ s'écrit alors :

$$\varepsilon(p) = \left(\frac{(4{,}2+p)}{(90{,}2+4{,}2p+p^2)\,(300+p)}\right)p^2\delta\theta_{Bc}(p).$$

Q20. En supposant que le système modélisé sur la figure 18 est stable, montrer que la correction par anticipation permet de respecter, en régime permanent, pour une entrée en rampe de pente a_r, la valeur maximale de $\Delta\theta_B$ déterminée à la question **Q3**.

Partie J – Validation de la commande monovariable appliquée au modèle de comportement dynamique non linéaire couplé

- Objectif

Valider le principe d'une commande monovariable par analyse des résultats d'une simulation.

La commande ainsi optimisée est synthétisée de manière équivalente pour les trois articulations et implantée sur le modèle non linéaire couplé.

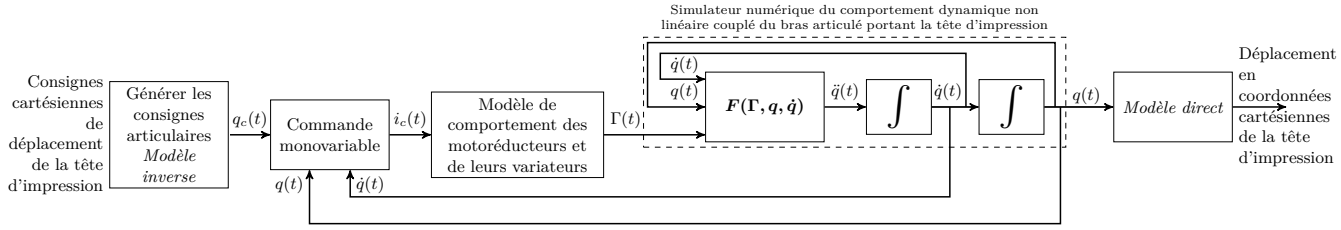


Figure 20 – Modèle non linéaire couplé avec la commande monovariable.

Q21. Analyser les courbes fournies figures 21, 22, 23, 24, 25 et 26 puis conclure au regard des exigences de réalisation du cordon de référence.

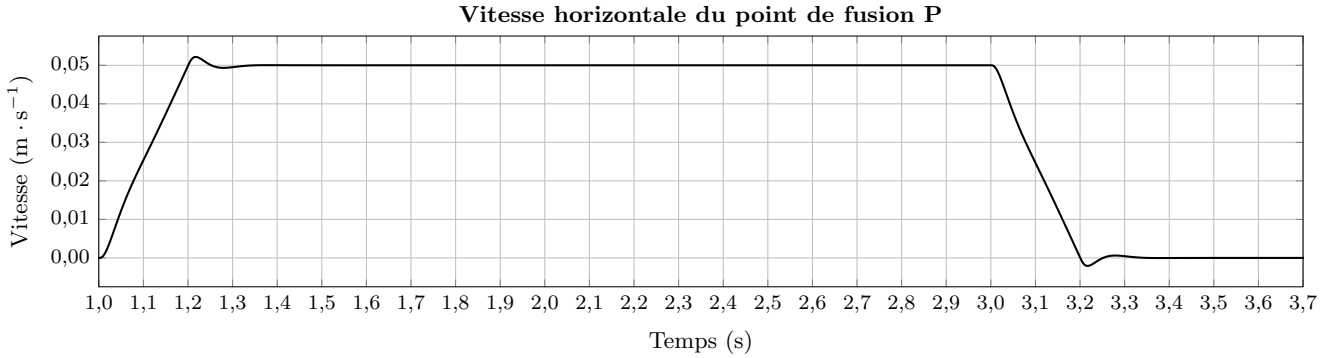


Figure 21 – Vitesse horizontale du point de fusion P.

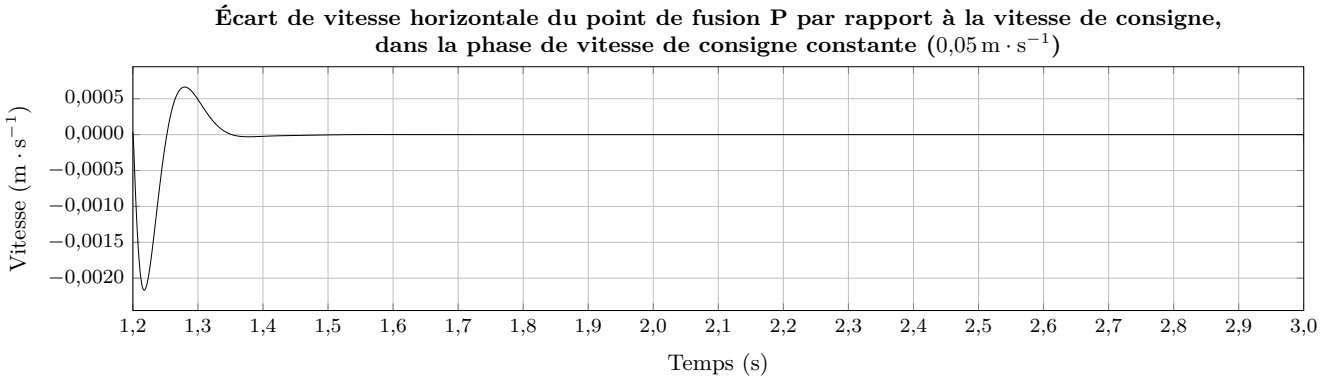


Figure 22 – Écart de vitesse horizontale du point de fusion P par rapport à la vitesse de consigne, dans la phase de vitesse de consigne constante (0,05 m · s^{-1}).

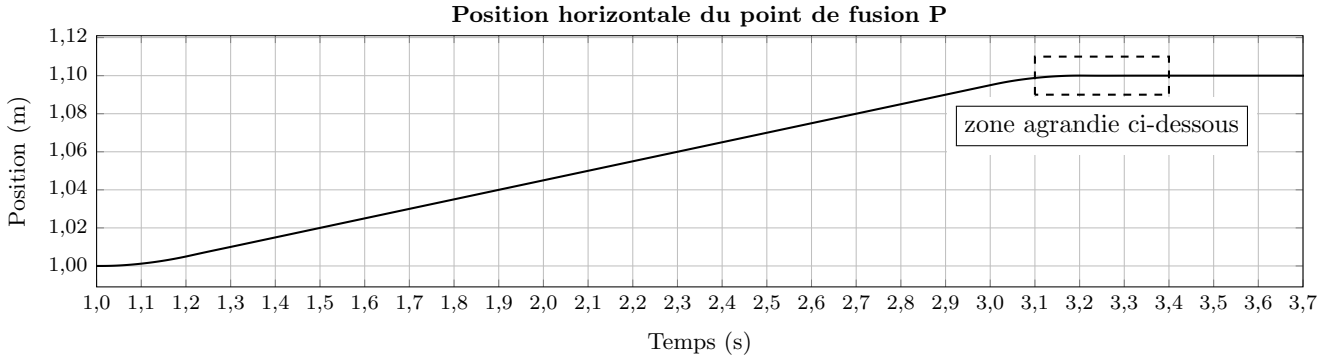


Figure 23 – Position horizontale du point de fusion P.

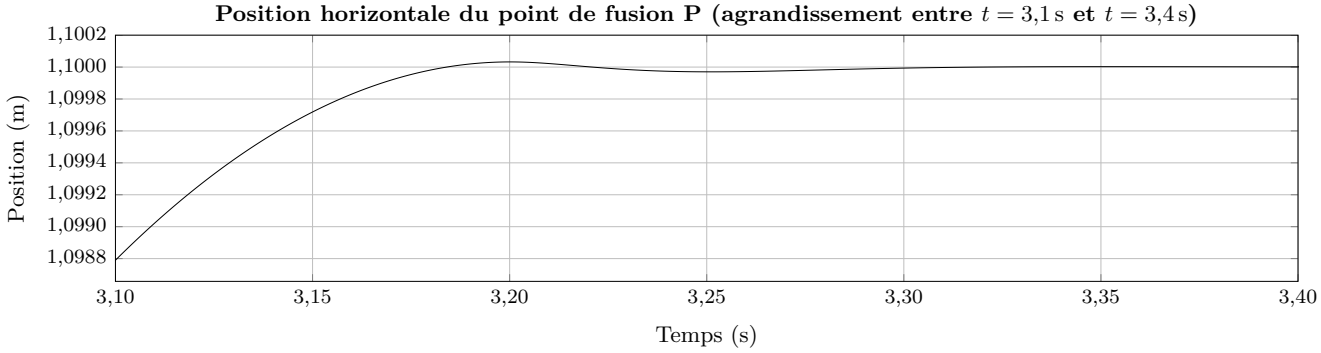


Figure 24 – Position horizontale du point de fusion P (agrandissement entre $t = 3{,}1$ s et $t = 3{,}4$ s).

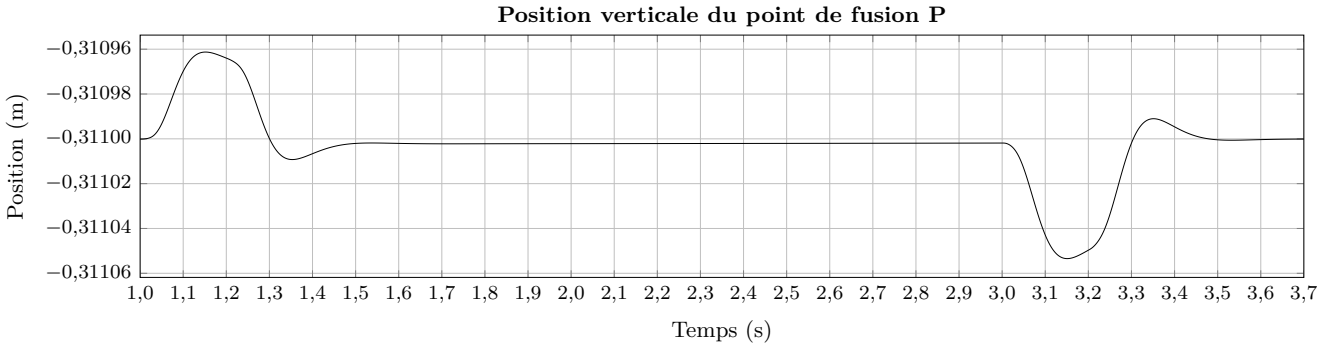


Figure 25 – Déplacement vertical du point de fusion P.

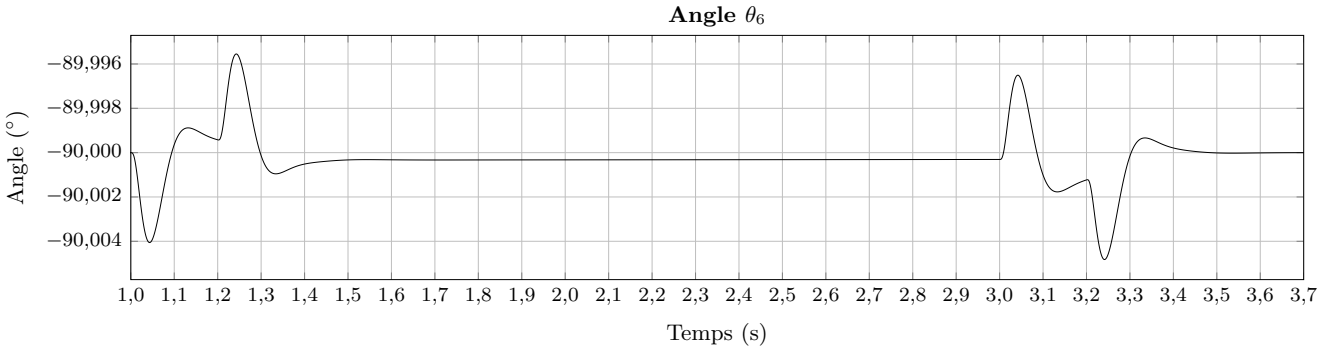


Figure 26 – Position angulaire de la tête d'impression.

Partie K – Analyse de la validation des différents modèles

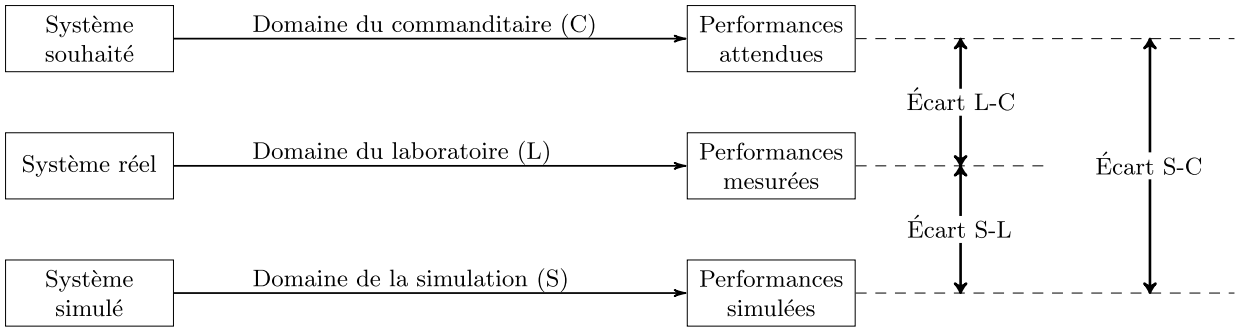


Figure 27 – Synoptique de la démarche de l'ingénieur, telle que présentée dans le programme.

La démarche de l'ingénieur abordée dans le programme de sciences industrielles de l'ingénieur de la filière MP s'appuie sur les écarts entre trois performances (figure 27). Dans l'étude conduite, les performances attendues sont définies figures 6 et 14, le résultat de la question **Q3** en faisant partie.

Q22. Dans l'étude conduite, quel écart L-C, S-L ou S-C a permis de valider la commande simple et paramétrable en cours d'élaboration puis finalement élaborée ? Dans quelles parties D.I, D.II, D.III, D.IV, E, F.I, F.II, G.I, G.II, H, I.I, I.II ou J cet écart a-t-il été étudié ?

L'étude conduite s'appuie sur une démarche progressive d'élaboration de différents modèles de comportement dynamique allant du plus proche du réel au plus simplifié. Cette étude a pour objectif de synthétiser une commande simple et paramétrable. Cette commande est synthétisée en deux étapes principales, commande sans anticipation puis avec anticipation. Pour s'assurer que l'étude ne s'écarte pas de son objectif, il est nécessaire d'effectuer des simulations et de comparer les performances simulées entre elles. Les simulations effectuées dans l'étude sont résumées dans le tableau de la figure 28.

Du plus proche du réel → au plus simplifié

Modèle de comportement dynamique ↓ / **Commande** →	**Pas de commande appliquée au modèle de comportement dynamique**	**Commande monovariable sans anticipation**	**Commande monovariable avec anticipation**
Non linéaire couplé du bras articulé		Simulation 3	Simulation 6
Linéaire couplé du bras articulé	"Simulation" 1	Simulation 4	
Linéaire découplé de chaque articulation	"Simulation" 2		
Linéaire simplifié découplé de chaque articulation		Simulation 5	

Remarque : les simulations 1 et 2 ne correspondent pas exactement à une simulation mais à une représentation obtenue à partir d'un modèle de connaissance.

Figure 28 – Résumé de la démarche.

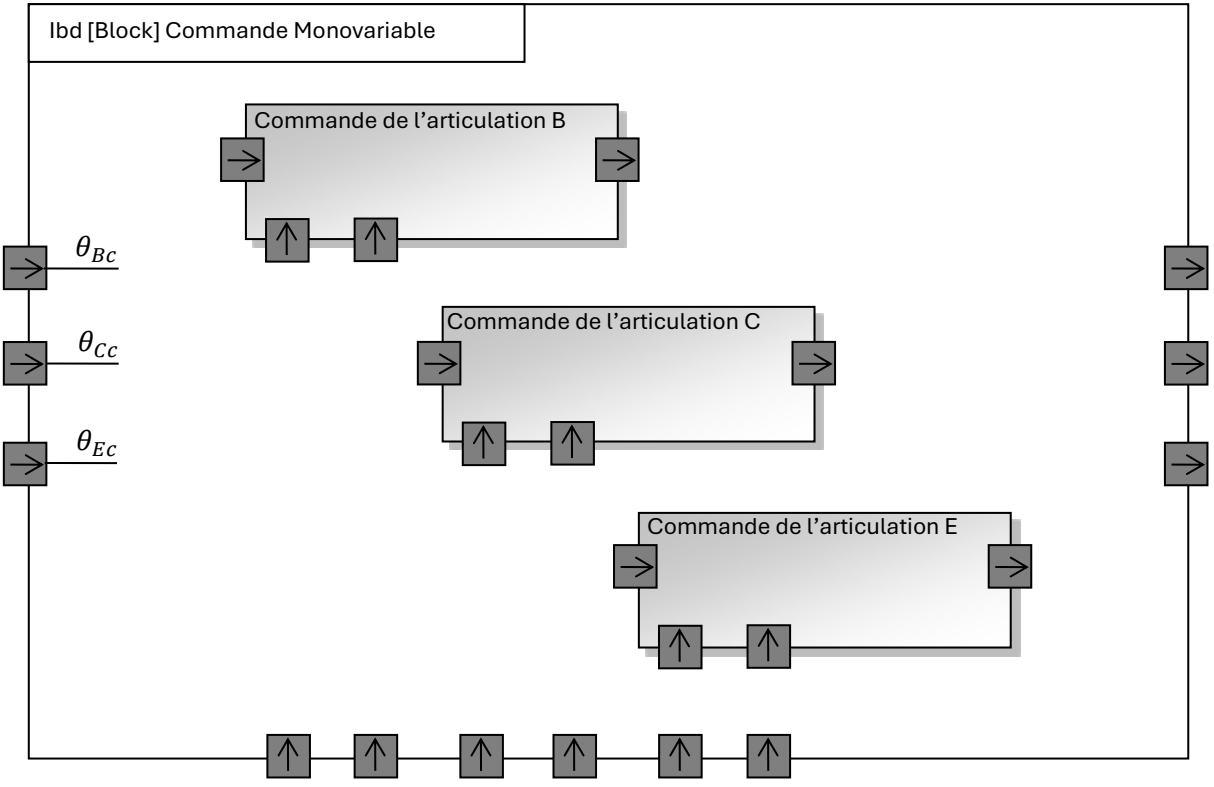
Les cases barrées correspondent à des cas qui n'ont pas été simulés.

Q23. Quelles simulations ont été comparées dans cette étude ? Préciser la figure ou les figures correspondantes. Pour chaque comparaison citée, préciser si elle permettait de valider la démarche ou si elle la remettait en cause.

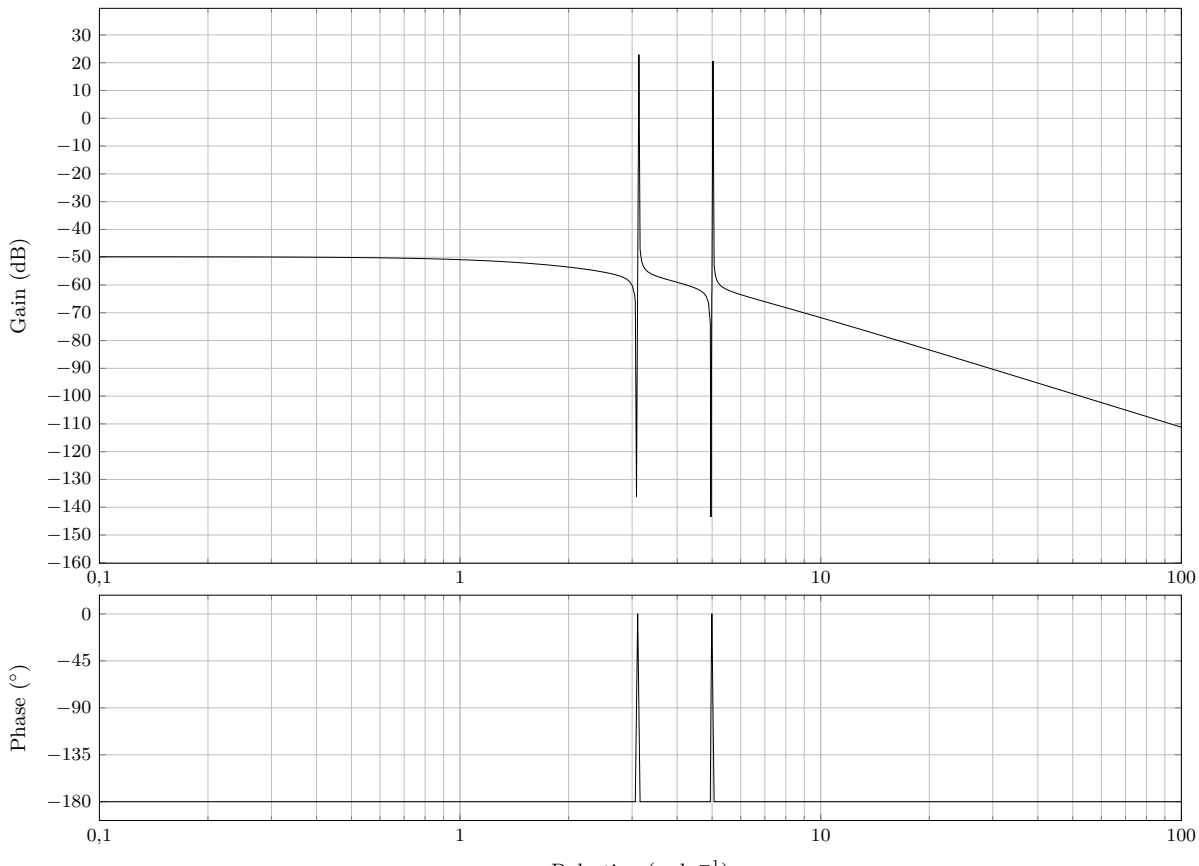
◇ Fin ◇

S023 - 29 avril 2025 - 18:04:28

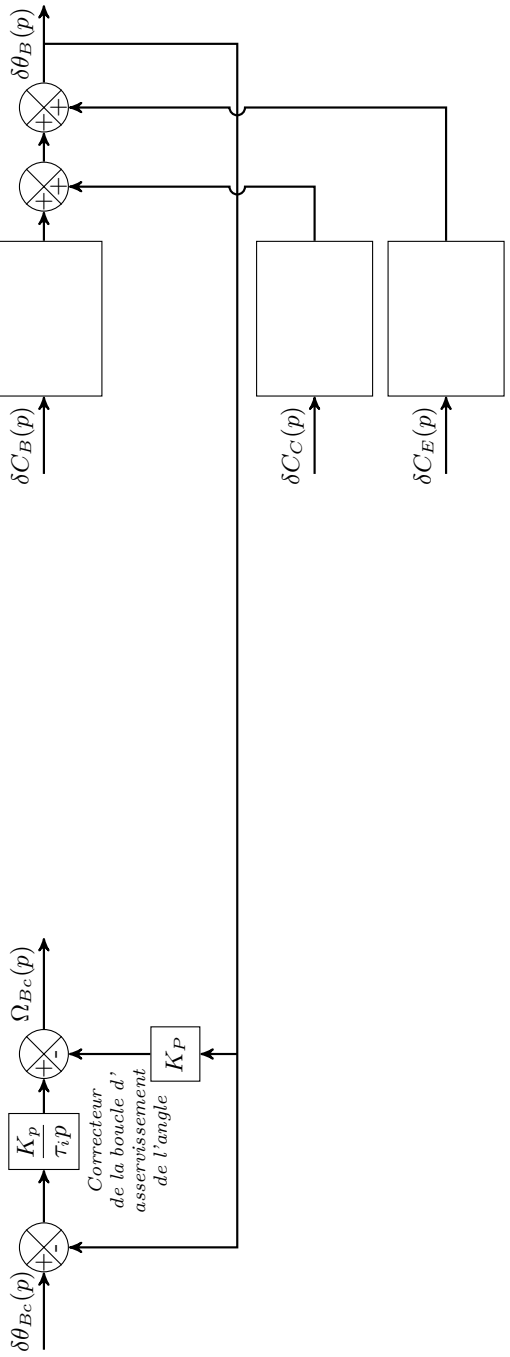
Question Q1


Ibd [Block] Commande Monovariable
Commande de l'articulation B
Commande de l'articulation C
Commande de l'articulation E
θ_{Bc}
θ_{Cc}
θ_{Ec}

Question Q13



Question Q17



Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MP chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Dynamique des systèmes de solides : principe fondamental, stratégie d'isolement, équilibrage
- Cinétique : torseurs cinétique et dynamique, énergie cinétique, inertie équivalente
- Filtrage linéaire
- Cinématique des mécanismes : composition des mouvements, contact ponctuel, lois entrée-sortie et fermetures
- Calcul infinitésimal du physicien : dérivées et différentielles
- Ingénierie système : besoin, exigences et diagrammes SysML
- Régimes transitoires
- Cinématique du solide : paramétrage, vitesse, taux de rotation et torseur cinématique

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/mp