Concours Centrale-Supélec, France

Session 2025, filière MPI

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie A : étude du spectre de la matrice d'interaction
- Partie B : étude de la convergence de la magnétisation

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/mpi/2025/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

MP, MPI

4 heures — Calculatrice autorisée

2025

Étude d'un modèle probabiliste de ferromagnétisme

Notations et rappels

– Si $n \in \mathbb{N}^*$, si $E_1,\dots,E_n$ désignent des ensembles finis, et si a est une fonction définie sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ et à valeurs réelles, alors on note

$$\sum_{(x_1,\dots,x_n)\in E_1\times\cdots\times E_n} a(x_1,\dots,x_n) = \sum_{x_1\in E_1}\sum_{x_2\in E_2}\cdots\sum_{x_n\in E_n} a(x_1,\dots,x_n).$$

– Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que, pour un n-uplet $(X_1,\dots,X_n)$ de variables aléatoires réelles finies sur un univers Ω, la **formule de transfert** s'écrit : pour toute fonction f définie sur $X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)$ et à valeurs réelles,

$$\mathbb{E}\big(f(X_1,\dots,X_n)\big) = \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in X_1(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathbb{P}\left(X_1=x_1,X_2=x_2,\dots,X_n=x_n\right).$$

– Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, on note Λ_n l'ensemble $\{-1,1\}^n$.

– Pour $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices de taille $n\times p$ à coefficients réels. Si $n=p$, on obtient l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées réelles de taille n, et on note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Problématique et objectifs

On étudie un modèle de ferromagnétisme : un matériau est constitué de particules qui peuvent, chacune, être orientées dans un sens ou un autre, Nord $(+1)$ ou Sud (-1). Elles sont soumises, d'une part à un champ magnétique extérieur, d'autre part à une température extérieure qui a tendance à les agiter dans tous les sens, et enfin à une interaction locale qui a tendance à les aligner dans le même sens.

Dans tout le sujet, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, et β est un réel strictement positif, qui représente l'inverse de la température.

On considère une matrice symétrique $J_n = (J_n(i,j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, appelée matrice d'interaction. Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $J_n(i,j)$ mesure l'interaction entre les particules numérotées i et j.

On définit une fonction H_n sur $\mathbb{R}_+\times\Lambda_n$ par

$$\forall x=(x_1,\dots,x_n)\in\Lambda_n,\quad \forall h\in\mathbb{R}_+,\qquad H_n(h,x) = -\frac{\beta}{2}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} J_n(i,j)\,x_i\,x_j - h\sum_{i=1}^n x_i.$$

Pour tous $x\in\Lambda_n$ et $h\in\mathbb{R}_+$, $H_n(h,x)$ mesure l'énergie de la configuration x couplée avec un champ magnétique extérieur d'intensité h. Le premier terme dans son expression est l'interaction locale des particules.

On définit alors, h étant fixé, un n-uplet de variables aléatoires $\left(X_{n,1},X_{n,2},\dots,X_{n,n}\right)$ tel que, pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in\Lambda_n$, la probabilité que $\left(X_{n,1},X_{n,2},\dots,X_{n,n}\right)$ prenne la valeur x est proportionnelle à $\mathrm{e}^{-H_n(h,x)}$, c'est-à-dire que, pour tout $x\in\Lambda_n$,

$$\mathbb{P}\Big(X_{n,1}=x_1,X_{n,2}=x_2,\dots,X_{n,n}=x_n\Big) = \frac{1}{Z_n(h)}\,\mathrm{e}^{-H_n(h,x)},$$

où

$$Z_n(h) = \sum_{y=(y_1,\dots,y_n)\in\Lambda_n} \mathrm{e}^{-H_n(h,y)}.$$

On introduit la variable aléatoire $M_{n,h} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{n,i}$, puis les fonctions

$$m_n : h \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{E}(M_{n,h}) \qquad \text{et} \qquad \psi_n : h \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \frac{1}{n}\ln\big(Z_n(h)\big).$$

On note enfin, sous réserve d'existence, m et ψ les limites simples des suites de fonctions $(m_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\psi_n)_{n\geqslant 1}$. La fonction m est appelée magnétisation et la fonction ψ, pression.

Ce problème est constitué de deux parties indépendantes A et B.

- La partie A consiste en l'étude du spectre de la matrice d'interaction dans plusieurs cas particuliers. Elle est elle-même découpée en cinq sous-parties, lesquelles sont indépendantes, à l'exception de la sous-partie V, qui fait appel à des résultats de la sous-partie IV.
- La partie B utilise des notations introduites dans la première mais en est totalement indépendante. Elle consiste en l'étude de la convergence de la magnétisation. Elle est elle-même découpée en quatre sous-parties.
  - La sous-partie I comporte une seule question préliminaire.
  - La sous-partie II se concentre sur le modèle d'Ising. On y montre que les particules ne conservent pas d'aimantation lorsque l'on retire le champ magnétique extérieur.
  - Les sous-parties III et IV sont indépendantes de la sous-partie II. Elles explorent le cas particulier du modèle de Curie-Weiss. Dans la sous-partie III, on montre que la conservation de l'aimantation dépend de la valeur de β par rapport à 1. Dans la sous-partie IV, on étudie le comportement asymptotique du champ magnétique moyen au point critique $\beta = 1$ et sans champ magnétique extérieur.

Partie A – Étude du spectre de la matrice d'interaction

On fixe $h \in \mathbb{R}_+$.

I – Quelques inégalités générales

Q1. Expliquer pourquoi la matrice J_n est diagonalisable.

Q2. On note $\lambda_{\max}$ la plus grande des valeurs propres de J_n et $\lambda_{\min}$ la plus petite. Montrer que

$$\forall x \in \Lambda_n, \qquad n\,\lambda_{\min} \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} J_n(i,j)\,x_i\,x_j \leqslant n\,\lambda_{\max}.$$

Q3. En déduire que

$$\forall x \in \Lambda_n, \qquad n\left(-h - \beta\,\frac{\lambda_{\max}}{2}\right) \leqslant H_n(h,x) \leqslant n\left(h - \beta\,\frac{\lambda_{\min}}{2}\right).$$

Q4. Donner un encadrement de H_n dans le cas où J_n est de plus une matrice orthogonale distincte de $\pm I_n$.

Plus généralement, l'étude du spectre complet de J_n présente un intérêt physique pour l'étude du modèle. Dans cette partie, on s'intéresse à quelques cas particuliers.

II – Le modèle de Curie-Weiss

On note $J_n^{(\mathrm{C})}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent $\dfrac{1}{n}$, à l'exception de ses coefficients diagonaux, qui sont nuls. Chaque particule interagit donc de la même façon avec toutes les autres particules.

Q5. Déterminer le spectre de $U_n = n\,J_n^{(\mathrm{C})} + I_n$, puis celui de $J_n^{(\mathrm{C})}$.

III – Le modèle sinus

On note $J_n^{(\mathrm{S})}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad J_n^{(\mathrm{S})}(i,j) = \frac{2}{\sqrt{2\,n+1}}\sin\left(\frac{2\,\pi\,i\,j}{2\,n+1}\right).$$

Q6. Montrer que, pour tous $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=1}^{p} \cos(2\,k\,x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\big((2\,p+1)\,x\big)}{\sin(x)} - 1\right).$$

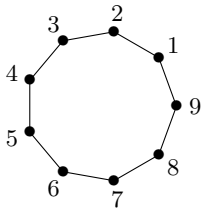
Q7. En déduire que $J_n^{(\mathrm{S})}$ est une matrice orthogonale symétrique.

IV – Le modèle d'Ising unidimensionnel

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note $C_{n,k}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad C_{n,k}(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (i \in [\![1,k]\!] \text{ et } j = i+n-k) \text{ ou } (i \in [\![k+1,n]\!] \text{ et } j = i-k) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque que $C_{n,n} = I_n$. On pose $J_n^{(1)} = C_{n,1} + C_{n,n-1}$.



Q8. Vérifier que, dans le cas où $n = 9$, $J_n^{(1)}$ est la matrice dont, pour tout $(i,j) \in [\![1,9]\!]^2$, le coefficient d'indice (i,j) vaut 1 si les sommets i et j du graphe ci-contre sont reliés par une arrête et vaut 0 sinon. Cela signifie que chaque particule n'est en interaction qu'avec ses deux voisins les plus proches.

Q9. Écrire, en langage *Python*, une fonction `mat_adj(graphe)` qui prend en argument un graphe de $m \in \mathbb{N}^*$ sommets, orienté ou non, représenté par un dictionnaire ayant pour clefs les entiers de 0 à $m-1$, et pour valeur associée à une telle clef la liste d'adjacence du sommet correspondant, et qui renvoie, en respectant l'énumération des sommets, la matrice d'adjacence de ce graphe.
Ainsi `mat_adj({0: [1, 2], 1: [0], 2: [0, 1, 2]})` doit renvoyer

```
[[0, 1, 1], [1, 0, 0], [1, 1, 1]].
```

Q10. Montrer que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $C_{n,1}^k = C_{n,k}$.

Q11. En déduire un polynôme annulateur de $C_{n,1}$, puis son spectre.

Q12. En déduire que $J_n^{(1)}$ admet les valeurs propres suivantes, énumérées avec leur multiplicité :

$$\lambda_k = 2\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,k}{n}\right), \qquad k \in [\![0,n-1]\!].$$

V – Le modèle d'Ising bidimensionnel

Soit $(u,v,r,s) \in (\mathbb{N}^*)^4$. Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant u \\ 1\leqslant j\leqslant v}} \in \mathcal{M}_{u,v}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$. On définit le produit de Kronecker de A par B, et on note $A \otimes B$, la matrice de $\mathcal{M}_{ur,vs}(\mathbb{R})$ qui est définie par $u\,v$ blocs de taille $r \times s$ de telle manière que, pour tout $(i,j) \in [\![1,u]\!] \times [\![1,v]\!]$, le bloc d'indice (i,j) soit $a_{i,j}\,B$. Autrement dit,

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}\,B & a_{12}\,B & \cdots & a_{1v}\,B \\ a_{21}\,B & a_{22}\,B & \cdots & a_{2v}\,B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{u1}\,B & a_{u2}\,B & \cdots & a_{uv}\,B \end{pmatrix}.$$

Outre u, v, r et s, on se donne encore deux entiers naturels non nuls, w et t.

Q13. Montrer que $\otimes$ est une application bilinéaire de $\mathcal{M}_{u,v}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{ur,vs}(\mathbb{R})$.

Q14. Montrer que, pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{u,v}(\mathbb{R})$, $A' \in \mathcal{M}_{v,w}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ et $B' \in \mathcal{M}_{s,t}(\mathbb{R})$, $(A \otimes B)\,(A' \otimes B') = (A\,A') \otimes (B\,B')$.

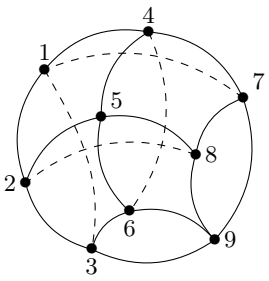
Q15. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_u(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ sont diagonalisables, alors $A \otimes B$ est diagonalisable et

$$\mathrm{Sp}(A \otimes B) = \{\lambda\mu \,|\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \mu \in \mathrm{Sp}(B)\}.$$

On pourra commencer par déterminer l'inverse du produit de Kronecker de deux matrices inversibles.

On pose $N = n^2$ et

$$J_N^{(2)} = I_n \otimes J_n^{(1)} + J_n^{(1)} \otimes I_n \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}).$$



Q16. Vérifier que, dans le cas où $n = 3$, $J_N^{(2)}$ est la matrice telle que, pour tout $(i,j) \in [\![1,9]\!]^2$, le coefficient d'indice (i,j) vaut 1 si les sommets i et j du graphe ci-contre sont reliés par une arête (les arêtes comptent qu'elles soient en pointillés ou en plein), et vaut 0 sinon.

Q17. On revient au cas général. Montrer que les valeurs propres de $J_N^{(2)}$ sont les $\lambda_j + \lambda_k$, pour $(j,k) \in [\![1,n]\!]^2$.

Partie B – Étude de la convergence de la magnétisation

Cette partie reprend les notations de la précédente mais les résultats sont totalement indépendants.

On se donne $h \in \mathbb{R}_+$.

I – Magnétisation spontanée

Q18. Justifier que la fonction ψ_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\psi_n' = m_n$.

On admet que, lorsque ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, alors $(\lim \psi_n)' = \lim \psi_n'$, c'est-à-dire $\psi' = m$, sur $\mathbb{R}_+^*$.

Enfin on note (toujours sous réserve d'existence) $m^+ = \lim\limits_{h \to 0^+} m(h)$ la magnétisation spontanée : il s'agit du champ magnétique moyen lorsque l'on fait tendre le champ magnétique extérieur vers 0. S'il reste strictement positif, les particules conservent une aimantation. Ce n'est pas le cas s'il est nul.

II – Le modèle d'Ising

Dans cette sous-partie, on suppose que $J_n = J_n^{(1)}$, matrice introduite dans la sous-partie A-IV.

On adoptera la convention suivante : pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Lambda_n$, on note $x_{n+1} = x_1$ et $x_0 = x_n$.

Q19. Vérifier que

$$Z_n(h) = \sum_{x \in \Lambda_n} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\beta x_i x_{i+1} + h x_i}.$$

Q20. Montrer que, pour tous entiers naturels p et q supérieurs ou égaux à 2, pour toute matrice $M = (M(i,j))_{1 \leqslant i,j \leqslant q} \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et pour tout $(i,j) \in [\![1,q]\!]^2$, le coefficient d'indice (i,j) de la matrice M^p est

$$\sum_{(k_2,\ldots,k_p) \in [\![1,q]\!]^{p-1}} M(i,k_2) \Big(\prod_{r=2}^{p-1} M(k_r,k_{r+1}) \Big) M(k_p,j),$$

le produit valant 1 dans le cas où $p = 2$.

On pose $A = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\beta - h} & \mathrm{e}^{-\beta - h} \\ \mathrm{e}^{-\beta + h} & \mathrm{e}^{\beta + h} \end{pmatrix}$.

Q21. Montrer que $Z_n(h) = \mathrm{tr}\,(A^n)$, où tr désigne la trace d'une matrice carrée.

Q22. Déterminer les valeurs propres de la matrice A.

Q23. Montrer alors que

$$\psi_n(h) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln\Big(\mathrm{e}^{\beta}\ \mathrm{ch}(h) + \sqrt{\mathrm{e}^{2\beta}\ \mathrm{ch}^2(h) - 2\,\mathrm{sh}(2\beta)} \Big).$$

Q24. En déduire une expression de la fonction m et conclure que $m^+ = 0$.

On rappelle que $m = \psi'$ lorsque ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

III – Le modèle de Curie-Weiss

Dans cette sous-partie, on suppose que $J_n = J_n^{(\mathrm{C})}$, matrice introduite dans la sous-partie A-II.

Q25. Pour tout $x \in \Lambda_n$, on pose $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_i$. Vérifier que

$$Z_n(h) = \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}} \sum_{x\in\Lambda_n} \exp\Big(\frac{\beta}{2\,n}\,(s_n(x))^2 + h\,s_n(x)\Big).$$

Q26. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ converge. On admet que sa valeur est $\sqrt{2\,\pi}$.

Q27. Montrer que

$$\forall u \in \mathbb{R},\quad \forall a \in \mathbb{R}_+^*,\qquad \mathrm{e}^{\frac{a\,u^2}{2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{u\,t - \frac{t^2}{2a}}\,\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\,\pi\,a}}.$$

Q28. En déduire que

$$Z_n(h) = \sqrt{\frac{n}{2\,\mathrm{e}^{\beta}\,\pi\,\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\sum_{x\in\Lambda_n} \mathrm{e}^{(t+h)s_n(x)}\Big)\,\mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{2\beta}}\,\mathrm{d}t.$$

Q29. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{x\in\Lambda_n} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{(t+h)\,x_i} = (2\ \mathrm{ch}(t+h))^n\,.$$

On pose $G_h : x \longmapsto \dfrac{(x-h)^2}{2\,\beta} - \ln(2\,\mathrm{ch}(x))$.

Q30. Montrer que

$$Z_n(h) = \sqrt{\frac{n}{2\,\mathrm{e}^{\beta}\,\pi\,\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\,G_h(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Q31. En distinguant les cas selon que $\beta \leqslant 1$ ou $\beta > 1$, montrer que G_h admet un *minimum* sur $\mathbb{R}_+$ atteint en un unique point u_h. Montrer de plus que

(a) si $\beta \leqslant 1$ et $h = 0$, alors $u_h = 0$;

(b) si $\beta > 1$, alors $u_h > 0$;

(c) quel que soit $\beta \in \mathbb{R}_+^*$,

(i) $G_h'(u_h) = 0$;

(ii) $h = \beta\,G_0'(u_h)$;

(iii) $G_h''(u_h) > 0$ lorsque $h > 0$.

On suppose désormais que $h > 0$.

Q32. Justifier que G_h atteint son *minimum* sur $\mathbb{R}$ en un unique point qui est u_h.

Q33. On note $\widehat{G}_h : x \longmapsto G_h(x+u_h) - \min G_h$. Montrer que

$$\psi_n(h) = -G_h(u_h) - \frac{1}{2\,n}\,\ln\big(2\,\mathrm{e}^{\beta}\,\pi\,\beta\big) + \frac{1}{n}\ln\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\widehat{G}_h(\frac{t}{\sqrt{n}})}\,\mathrm{d}t\right).$$

Q34. On pose $\gamma_h = G_h''(u_h)$ et on note $f_h : x \longmapsto \dfrac{\widehat{G}_h(x)}{x^2}$. Montrer que f_h est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tout entier en posant $f_h(0) = \dfrac{\gamma_h}{2}$.

Q35. Justifier que f_h est minorée par un réel strictement positif c_h (que l'on ne cherchera pas à déterminer).

Q36. Montrer alors que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\widehat{G}_h(\frac{t}{\sqrt{n}})}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\frac{2\,\pi}{\gamma_h}}$$

puis conclure que $\psi(h) = -G_h(u_h)$.

Q37. Montrer que G_0' réalise une bijection continue de $[u_0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$. En déduire que la fonction $u : h \longmapsto u_h$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q38. En déduire que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $m(h) = \dfrac{u(h) - h}{\beta}$ pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$.

Q39. Montrer alors que $m^+ = 0$ si $\beta \leqslant 1$, et $m^+ > 0$ si $\beta > 1$.

IV – Convergence en loi pour la loi de Curie-Weiss au point critique

Dans cette sous-partie, on suppose toujours que $J_n = J_n^{(\mathrm{C})}$. De plus, on suppose que $\beta = 1$ et $h = 0$.

On note $Z_\infty = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^4}{12}\right) \mathrm{d}x$ et on considère la fonction

$$\varphi_\infty : x \longmapsto \frac{1}{Z_\infty} \exp\left(-\frac{x^4}{12}\right).$$

Q40. Justifier que, pour toute fonction f continue et bornée sur $\mathbb{R}$, la quantité

$$E_{n,f} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\left(f\left(\frac{t}{n^{1/4}} + n^{1/4}\, M_n\right)\right) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\,\pi}}$$

est bien définie.

Une démonstration analogue à celle de la sous-partie précédente permet alors de montrer que, pour toute fonction f continue et bornée sur $\mathbb{R}$,

$$E_{n,f} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, \varphi_\infty(u)\, \mathrm{d}u.$$

Q41. Soit $K \in \mathbb{R}_+^*$, et soit f une fonction K-lipschitzienne et bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\left|E_{n,f} - \mathbb{E}\left(f\left(n^{1/4}\, M_n\right)\right)\right| \leqslant \frac{2\,K}{n^{1/4}\,\sqrt{2\,\pi}}$$

et en déduire que

$$\mathbb{E}\left(f\left(n^{1/4}\, M_n\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, \varphi_\infty(u)\, \mathrm{d}u.$$

On se donne $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Soit k un entier naturel non nul tel que $k \geqslant \dfrac{2}{\varepsilon\, Z_\infty}$. On définit la fonction

$$f_k : u \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad u \leqslant x \\ 1 - k(u - x) & \text{si} \quad x < u \leqslant x + \frac{1}{k} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q42. Montrer que f_k est k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Q43. En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\mathbb{P}\left(n^{1/4}\, M_n \leqslant x\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_{-\infty}^{x+\frac{1}{k}} \varphi_\infty(u)\, \mathrm{d}u.$$

Q44. Montrer finalement que

$$\mathbb{P}\left(n^{1/4}\, M_n \leqslant x\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{x} \varphi_\infty(u)\, \mathrm{d}u.$$

◇ Fin ◇

M065 - 2 mai 2025 - 16:05:43

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MPI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Bases de Python : expressions, types, instructions, fonctions
- Nombres complexes et trigonométrie
- Intégration sur un intervalle quelconque
- Dérivabilité et convexité
- Techniques fondamentales de calcul en analyse

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/mpi