Concours Centrale-Supélec, France

Session 2026, filière MPI

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie A : questions préliminaires
- Partie B : étude analytique
- Partie C : étude algébrique et géométrique
- Partie D : synthèse

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/mpi/2026/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

MP MPI

4 heures — Calculatrice autorisée

2026

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un nombre réel x. On rappelle qu'il s'agit de l'unique nombre entier pour lequel l'encadrement suivant est satisfait : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Pour s un nombre complexe, on note $\mathrm{Re}(s)$ et $\mathrm{Im}(s)$ ses parties réelle et imaginaire respectivement.

Le sujet utilise abondamment la lettre grecque ζ (« zeta »). Pour s un nombre réel strictement supérieur à 1, on note :

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Divers prolongements de cette fonction ζ sont étudiés au cours du sujet.

Pour k un entier supérieur ou égal à 2, on définit la fonction f_k sur $]0,1]$ par :

$$f_k(t) = \frac{1}{k}\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor.$$

Le problème vise à établir une condition suffisante pour que la fonction ζ ne s'annule pas sur l'ensemble des nombres complexes de partie réelle strictement supérieure à $\frac{1}{2}$ (cette non annulation étant une forme de l'*hypothèse de Riemann*), la condition considérée portant sur la géométrie des fonctions f_k dans un espace *ad hoc*.

Partie A – Questions préliminaires

I – La fonction ζ sur l'intervalle $]1, +\infty[$

Pour k entier naturel non nul, on définit $u_k(s) = \frac{1}{k^s}$ sur $\mathbb{R}$.

Q1. La série de fonctions $\sum_{k \geqslant 1} u_k$ converge-t-elle normalement sur l'intervalle $]1, +\infty[$?

Q2. Montrer que la fonction $s \mapsto \zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$ est continue sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

Q3. Montrer que la fonction ζ ne s'annule pas sur l'intervalle $]1, +\infty[$. Préciser son signe.

II – Cas de la variable complexe

Q4. Soit s un nombre complexe et t un nombre réel strictement positif. On note $t^s = e^{s \ln(t)}$. Exprimer le module $|t^s|$ à l'aide de t et du couple $(\mathrm{Re}(s), \mathrm{Im}(s))$.

Soit s un nombre complexe tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Q5. Établir que la série $\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^s}$ converge absolument.

On note encore $\zeta(s)$ la somme de cette série : $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$.

On note $(p_i)_{i \geqslant 1}$ la suite des nombres premiers rangés par ordre croissant. Ainsi, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$. On utilisera librement le fait que $\lim_n p_n = +\infty$.

Q6. Soit n un entier naturel non nul. Justifier que la famille $\left(\frac{1}{(p_1^{m_1} \cdots p_n^{m_n})^s} \right)_{(m_1,\ldots,m_n) \in \mathbb{N}^n}$ est une famille sommable et que la somme de cette famille, notée $S_n(s)$, est donnée par

$$S_n(s) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^s}}.$$

Pour n entier naturel non nul, on note $\mathbb{N}_n$ l'ensemble des entiers naturels non nuls dont la factorisation en nombres premiers ne fait intervenir que les nombres $p_1, \dots, p_n$.

Q7. En considérant la somme $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}_n} \frac{1}{k^s}$, exprimer la limite de $S_n(s)$ lorsque n tend vers $+\infty$ à l'aide d'une valeur de la fonction ζ.

On note x la partie réelle du nombre s. On rappelle qu'on travaille sous l'hypothèse $x > 1$.

Q8. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_i \frac{1}{p_i^x}$. *On pourra justifier et exploiter la convergence de la suite* $(S_n(x))_n$.

On note $a_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{p_i^x}{p_i^x + 1}$.

Q9. Montrer que la suite $(a_n)_n$ converge et que sa limite est un réel strictement positif. *On considérera la suite de terme général* $\ln(a_n)$.

Q10. Pour tout $n \geqslant 1$, établir l'inégalité $|S_n(s)| \geqslant a_n$ et en déduire que le nombre $\zeta(s)$ est non nul.

III – Un calcul d'intégrale

Dans cette question, la lettre s désigne un nombre complexe tel que $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$.

Q11. Établir que la fonction $t \mapsto t^{2(s-1)}$ est intégrable sur $]0,1]$, puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 |t^{s-1}|^2 \mathrm{d}t$.

IV – Une étude géométrique

Pour tout nombre réel d dans l'intervalle $]0,1[$, on considère Δ_d l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe s satisfait l'inégalité $d^2|s|^2 \geqslant 2\,\mathrm{Re}(s) - 1$.

Q12. Soit $d \in]0,1[$. Montrer que Δ_d est égal au complémentaire dans le plan complexe d'un disque $\mathcal{D}_d$ dont on précisera le centre O_d et le rayon R_d en fonction de d.

Q13. Pour $d \in]0,1[$, on pose $g(d) = \dfrac{1}{d^2} - \dfrac{\sqrt{1-d^2}}{d^2}$. Déterminer l'image par la fonction g de l'intervalle $]0,1[$. *On pourra procéder par étude des variations.*

Q14. Déterminer l'intersection $\displaystyle\bigcap_{d\in]0,1[} \Delta_d$.

Partie B – Étude analytique

I – Transformée de Mellin des fonctions f_k

Soit k un entier supérieur ou égal à 2. On rappelle l'expression :

$$f_k(t) = \frac{1}{k}\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor.$$

Q15. Calculer $f_k\left(\dfrac{1}{i}\right)$ pour i entier compris entre 1 et k.

Q16. Pour t dans l'intervalle $]0,1]$, établir l'encadrement :

$$0 \leqslant f_k(t) \leqslant \frac{k-1}{k}.$$

On pourra commencer en utilisant la définition de la partie entière $\lfloor \frac{1}{kt} \rfloor$, *dont on déduira un encadrement de* $\frac{1}{t}$ *qu'on interprétera au vu de la définition de* $\lfloor \frac{1}{t} \rfloor$.

Q17. Déduire des deux questions précédentes l'ensemble des valeurs prises par f_k sur l'intervalle]0,1].

Q18. Justifier que la fonction f_k est continue par morceaux et intégrable sur]0,1].

Dans les questions suivantes, s désigne un nombre réel strictement supérieur à 1.

Q19. Dans cette question uniquement, on élargit l'étude au cas $k = 1$ (et donc k est un entier naturel non nul). Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor t^{s-1}\mathrm{d}t$ converge.

On note :

$$F(s) = \int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor t^{s-1}\mathrm{d}t.$$

Q20. Établir :

$$F(s) = \sum_{j=1}^{+\infty} j \int_{1/(j+1)}^{1/j} t^{s-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\zeta(s).$$

Q21. Pour k entier supérieur ou égal à 2 et $s > 1$, établir l'égalité :

$$\int_0^1 f_k(t)t^{s-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^s}\right)\zeta(s).$$

II – Prolongement de la fonction ζ

Soit s un nombre réel strictement positif.

Q22. Soit k un entier naturel non nul. On considère la fonction h sur $]0, +\infty[$ définie par $h(t) = \dfrac{1}{t^s}$. Déterminer le maximum de $|h'(t)|$ sur le segment $[k, k+1]$.

Q23. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{t^s}\right)\mathrm{d}t$ est une série à termes positifs convergente et que sa somme $G(s)$ vérifie :

$$0 \leqslant G(s) \leqslant s\zeta(s+1).$$

Q24. Dans cette question, on suppose $s > 1$. Établir l'égalité :

$$\zeta(s) - G(s) = \frac{1}{s-1},$$

puis l'estimation asymptotique $\zeta(s) = \dfrac{1}{s-1} + O(1)$ lorsque s tend vers 1 par valeurs supérieures.

On admet que les résultats de cette partie se généralisent, au prix de quelques menues adaptations, au cas où s est un nombre complexe de partie réelle strictement positive. On peut alors *définir* $\zeta(s)$ pour s un nombre complexe distinct de 1 dont la partie réelle satisfait $0 < \mathrm{Re}(s) \leqslant 1$ par

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + G(s).$$

III – Intégrale des fonctions f_k

Q25. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f_k(t)t^{s-1}\mathrm{d}t$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 f_k(t)\mathrm{d}t$ lorsque s tend vers 1 par valeurs réelles strictement supérieures.

Q26. En utilisant la question précédente et les questions **Q21** et **Q24**, établir l'égalité :

$$\int_0^1 f_k(t)\mathrm{d}t = \frac{\ln(k)}{k}.$$

Partie C – Étude algébrique et géométrique

On note E l'espace des fonctions continues par morceaux sur]0,1] et à valeurs réelles. On définit en outre le sous-ensemble L^2 des fonctions f de E telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t$ converge.

I – Une forme bilinéaire symétrique positive

Q27. On considère des fonctions continues par morceaux sur]0,1], sans qu'il soit besoin de le spécifier à chaque fois. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie en justifiant complètement :

a) toute fonction bornée sur]0,1] appartient à L^2 ;

b) les ensembles E et L^2 sont égaux ;

c) toute fonction intégrable sur]0,1] appartient à L^2.

Q28. Pour f et g dans l'ensemble L^2, montrer que l'intégrale $\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ converge absolument, puis établir que l'ensemble L^2 est un sous-espace vectoriel de E (là encore, on ne demande pas de relever le caractère continu par morceaux des fonctions considérées).
On pourra établir et utiliser l'inégalité $|f(t)g(t)| \leqslant \frac{1}{2}\big(f(t)^2 + g(t)^2\big)$.

Q29. Vérifier qu'on définit une forme bilinéaire symétrique positive sur L^2 en posant :

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Justifier que ce n'est pas un produit scalaire sur L^2, en fournissant un contre-exemple à l'aspect « défini ».

II – Un espace préhilbertien réel

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $(\lambda_k)_{2\leqslant k\leqslant n}$ une famille de nombres réels tels que :

$$\sum_{k=2}^{n} \lambda_k f_k = 0 \text{ sur }]0,1]\,.$$

Q30. En évaluant la relation précédente pour $t \in \left]\frac{1}{2},1\right]$, établir l'égalité $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda_k}{k} = 0$.

Q31. Soit ℓ un entier compris entre 2 et $n-1$. En évaluant en un nombre t bien choisi, établir l'égalité :

$$\sum_{k=\ell+1}^{n} \lambda_k \frac{\ell}{k} + \sum_{k=2}^{\ell-1} \lambda_k \left(\frac{\ell}{k} - \left\lfloor \frac{\ell}{k} \right\rfloor\right) = 0.$$

Dans le cas $\ell = 2$, la deuxième somme étant indicée pour k allant de 2 à $2-1$, on la considère vide, donc nulle.

Q32. Montrer l'égalité $\lambda_2 = 0$ en combinant le résultat de **Q30** et celui de **Q31** pour $\ell = 2$, puis montrer que tous les scalaires λ_k sont nuls. Quelle propriété de la famille $(f_k)_{k\geqslant 2}$ a-t-on ainsi établie ?

On considère maintenant le sous-espace F de L^2 engendré par les fonctions f_k pour $k \geqslant 2$, et la fonction constante égale à 1, qu'on note $\mathbf{1}$.

Q33. Montrer que (.|.) (voir notation **Q29**) définit un produit scalaire sur F.

III – Distance d'un vecteur à des sous-espaces

On rappelle que $\mathbf{1}$ désigne la fonction constante égale à 1. On travaille dans l'espace $F = \mathrm{Vect}\,(\mathbf{1}, f_2, \ldots, f_n, \ldots)$ muni du produit scalaire (.|.) (selon **Q29** et **Q33**).

Q34. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer l'existence d'une unique famille orthonormale $(e_k)_{2\leqslant k\leqslant n}$ d'éléments de L^2 telle que pour chaque entier p compris entre 2 et n, les sous-espaces engendrés $\mathrm{Vect}\,(e_2,\ldots,e_p)$ et $\mathrm{Vect}\,(f_2,\ldots,f_p)$ sont égaux, et $(e_p|f_p) > 0$.

Pour $n \geqslant 2$ entier, on note d_n la distance de la fonction $\mathbf{1}$ au sous-espace engendré par $(f_2, \ldots, f_n)$.

Q35. Montrer l'égalité :

$$d_n^2 = 1 - \sum_{k=2}^{n} (\mathbf{1}|e_k)^2.$$

Q36. Montrer que la suite $(d_n)_n$ converge.

Partie D – Synthèse

On admet que l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'étend aux fonctions continues par morceaux sur]0,1] de carré intégrable, dans le cas de fonctions à valeurs complexes, sous la forme suivante (les fonctions f et g ci-dessous sont donc supposées vérifier les conditions précédentes, en particulier, f^2 et g^2 sont supposées intégrables sur]0,1]) :

$$\left| \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \right|^2 \leqslant \int_0^1 |f(t)|^2 \mathrm{d}t \times \int_0^1 |g(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Q37. Soit $(\lambda_k)_{2 \leqslant k \leqslant n}$ une famille de nombres réels. Soit s un nombre complexe de partie réelle strictement supérieure à $\frac{1}{2}$. Justifier l'inégalité :

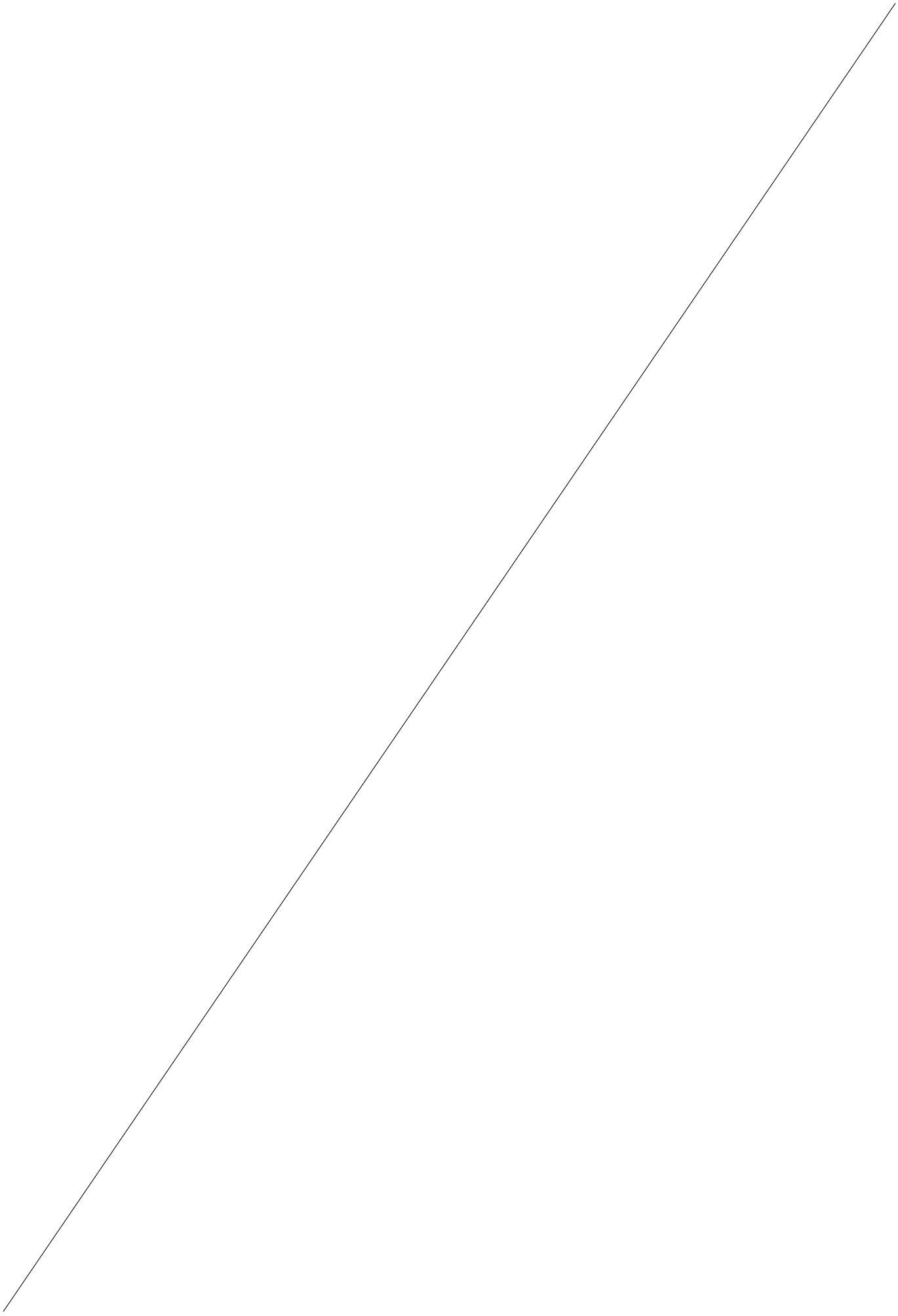
$$\left| \int_0^1 \left(1 - \sum_{k=2}^{n} \lambda_k f_k(t)\right) t^{s-1} \mathrm{d}t \right|^2 \leqslant \int_0^1 \left(1 - \sum_{k=2}^{n} \lambda_k f_k(t)\right)^2 \mathrm{d}t \times \int_0^1 |t^{2(s-1)}| \mathrm{d}t.$$

On souhaite maintenant démontrer que, si la suite $(d_n)_n$ admet pour limite 0, alors la fonction ζ, prolongée selon la Partie BII, ne s'annule en aucun nombre complexe s tel que $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$. Pour cela, on procède par l'absurde, et on suppose que s est un nombre complexe distinct de 1 tel que $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ et $\zeta(s) = 0$. On admet que l'égalité **Q21** est encore vraie pour tout nombre complexe s distinct de 1, de partie réelle strictement positive.

Q38. Établir l'inégalité $d_n^2 |s|^2 \geqslant 2\,\mathrm{Re}(s) - 1$, puis, en supposant $\lim_{n \to +\infty} d_n = 0$, conclure.

◇ Fin ◇

M104 - 15 janvier 2026 - 10:44:51



Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MPI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Séries numériques et vectorielles
- Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs
- Nombres complexes et trigonométrie
- Intégration sur un intervalle quelconque
- Nombres réels et suites numériques

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/mpi