Concours Centrale-Supélec, France

Session 2026, filière MPI

Physique-chimie 1

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie A : étude d'une cavité en électromagnétisme
- Partie B : approche quantique simplifiée de l'effet Casimir
- Partie C : mesures expérimentales et corrections

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/mpi/2026/physique-chimie1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Physique-chimie 1

MPI

4 heures Calculatrice autorisée

2026

Modélisation et mesure de l'effet Casimir

Selon le philosophe grec Aristote, le vide ne pouvait pas exister. On serait tenté d'affirmer que le vide est ce qui reste lorsqu'on a tout retiré, c'est-à-dire rien. Mais selon la mécanique quantique, même lorsque l'on a vidé un volume d'espace de tout son contenu matériel, il reste tout même quelque chose... qui, loin d'être rien, a même des effets tangibles. En 1948, le physicien néerlandais Hendrik Casimir prédit l'existence d'une force entre deux plaques conductrices, non chargées, parallèles entre elles et placées dans le vide. L'effet Casimir a pour origine les fluctuations quantiques du vide dont l'existence est une conséquence de la quantification du champ électromagnétique. Il a été mis en évidence expérimentalement pour la première fois en 1997.

Le sujet s'intéresse à l'effet Casimir au travers de modèles et d'expérimentations. Il se décompose en trois parties qu'il est recommandé d'aborder dans l'ordre, même si elles sont relativement indépendantes. Tout résultat intermédiaire fourni par l'énoncé peut être admis pour poursuivre la composition.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par un soulignement de leur numéro. Il est alors demandé d'expliciter clairement la démarche, les choix, ainsi que les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Des données et un formulaire sont regroupés en fin d'énoncé.

Dans tout le sujet, h désigne la constante de Planck et $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ la constante de Planck réduite.

Partie A – Étude d'une cavité en électromagnétisme classique

I – Pression de radiation sur un conducteur parfait

La pression de radiation résulte de l'interaction entre un rayonnement électromagnétique et les charges d'un milieu matériel. On se propose d'en établir l'expression dans le cas d'un rayonnement électromagnétique monochromatique, de pulsation ω, se propageant dans le vide et atteignant sous incidence normale un conducteur métallique parfaitement réfléchissant occupant le demi-espace $z > 0$. Le rayonnement incident est décrit par une onde plane, progressive, monochromatique et transverse dont le champ électrique a pour expression :

$$\overrightarrow{E_i}(M,t) = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right) \overrightarrow{e_x}\,.$$

On pourra noter $\overrightarrow{k_i} = \frac{\omega}{c}\overrightarrow{e_z} = k_z \overrightarrow{e_z}$ le vecteur d'onde de cette onde incidente (figure 1). On rappelle qu'à l'intérieur d'un conducteur parfait, les champs électriques et magnétiques sont nuls. L'origine de l'axe (Oz) est prise à la surface du conducteur.

On admet qu'à la surface du conducteur, la densité surfacique de charge est nulle.

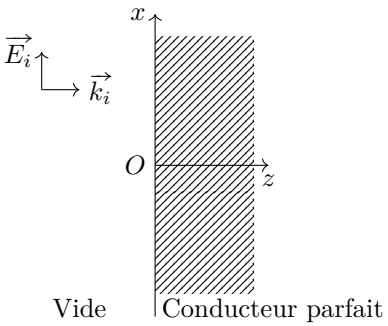


Figure 1 – Structure de l'onde incidente.

Q1. En utilisant la relation de passage sur le champ électrique, rappelée dans le formulaire en fin d'énoncé, justifier qu'il existe nécessairement une onde réfléchie de même pulsation et de même état de polarisation que l'onde incidente. Exprimer son champ électrique $\overrightarrow{E_r}(M,t)$ dans le domaine $z<0$.

Q2. En déduire que le champ électrique total en tout point du demi-espace $z<0$ est de la forme

$$\vec{E}(M,t) = E_{0t}\,\sin\left(\frac{\omega z}{c}\right)\sin(\omega t)\,\vec{e_x}$$

où E_{0t} est un facteur à expliciter en fonction de E_0.

Q3. Déterminer le champ magnétique total en tout point du demi-espace $z<0$ en fonction de E_0, c, ω, z et t.

Q4. En déduire la densité volumique d'énergie électromagnétique u_{em} en fonction de ε_0, E_0, c, ω, z et t, puis sa moyenne temporelle que l'on notera $\langle u_{em}\rangle$.

Q5. En utilisant la relation de passage sur le champ magnétique, rappelée dans le formulaire en fin d'énoncé, déterminer l'expression du vecteur densité de courant $\vec{j_s}(t)$ sur la surface ($z=0$) du conducteur parfait en fonction de ε_0, E_0, c, ω et t.

On cherche à déterminer la force électromagnétique exercée sur un élément de surface $\mathrm{d}S$ du plan conducteur situé autour d'un point P. On note $\vec{B}_{\mathrm{d}S}(z,t)$ le champ magnétique créé par cet élément de surface dans son voisinage immédiat. On admet que

$$\vec{B}_{\mathrm{d}S}\left(z\to 0^-,t\right) = -\frac{1}{2}\,\mu_0\,\vec{j_s}(t)\wedge\vec{e_z} \qquad \text{et} \qquad \vec{B}_{\mathrm{d}S}\left(z\to 0^+,t\right) = \frac{1}{2}\,\mu_0\,\vec{j_s}(t)\wedge\vec{e_z}\,.$$

Q6. Déterminer le champ magnétique $\overrightarrow{B^*}\left(z\to 0^{\pm},t\right)$ résultant de la superposition de l'onde incidente et du champ créé par la nappe de courants surfaciques du plan $z=0$ privée de l'élément de surface $\mathrm{d}S$ autour du point P.

Q7. En déduire la force magnétique élémentaire $\mathrm{d}\vec{F}$ exercée sur cet élément de surface $\mathrm{d}S$, puis sa moyenne temporelle $\langle \mathrm{d}\vec{F}\rangle$.

Q8. Montrer que le résultat précédent peut s'interpréter par l'existence d'une pression, appelée « pression de radiation », donnée par la relation

$$P_{\mathrm{rad}} = \langle u_{em}\rangle\,.$$

Un rayonnement électromagnétique peut aussi être décrit d'un point de vue corpusculaire. Dans cette deuxième description, un rayonnement monochromatique incident est assimilé à un flux de photons, de vitesse c, chacun d'énergie $\hbar\omega$ et de quantité de mouvement $\frac{\hbar\omega}{c}\,\vec{e_z}$. La densité volumique de photons du rayonnement incident est notée n_γ. On modélise l'interaction d'un photon incident avec la surface parfaitement réfléchissante par un choc élastique lors duquel l'énergie du photon ainsi que la quantité de mouvement du système {photon, plan réflecteur} sont conservées.

Q9. En détaillant la démarche suivie, exprimer la quantité de mouvement cédée au plan réflecteur par le flux de photons incidents, par unité de temps et par unité de surface. En déduire l'expression de la pression de radiation en fonction de la densité volumique d'énergie, associée aux photons incidents et réfléchis. Commenter.

II – Champ électromagnétique dans une cavité plane délimitée par deux plans conducteurs

On cherche à présent à caractériser les modes propres d'une cavité formée du plan précédent et d'un second plan conducteur parfait identique au premier et placé en $z=-a$. On suppose ces deux plans de dimensions transversales illimitées selon (Ox) et (Oy).

Q10. Montrer que les conditions aux limites à la surface des deux conducteurs imposent que la pulsation ne peut prendre que des valeurs discrètes indexées par un entier $n>0$, à chaque valeur de n correspondant un mode de la cavité.

On suppose que les deux plans sont séparés d'une distance $a = 100$ nm longitudinalement selon (Oz), distance très inférieure à leurs dimensions transversales.

Q11. Donner l'expression de la plus grande longueur d'onde $\lambda_{\max}$ pouvant exister dans la cavité satisfaisant aux conditions aux limites, ainsi que le domaine du spectre électromagnétique du mode correspondant.

Partie B – Une approche quantique simplifiée du champ dans la cavité

I – Énergie minimale d'un oscillateur harmonique quantique

On considère une particule matérielle de masse m, non relativiste et évoluant selon un axe (Ox) dans un puits de potentiel harmonique correspondant à l'énergie potentielle $\frac{1}{2}\,m\,\omega_0^2\,x^2$. On note p_x la quantité de mouvement de la particule selon l'axe (Ox). L'énergie totale de la particule a donc pour expression $\frac{1}{2}\,m\,\omega_0^2\,x^2 + \frac{p_x^2}{2m}$.

On suppose que la particule est dans un état stationnaire lié (état stationnaire normalisé) d'énergie E et de fonction d'onde $\psi(x,t) = \varphi(x)\exp\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right)$ où $\varphi(x)$ est choisie à valeurs réelles.

Q12. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\varphi(x)$, puis rappeler l'écriture de la condition de normalisation sur cette fonction.

On ne cherche pas dans la suite à déterminer les états stationnaires liés du puits de potentiel harmonique qui vérifient ces relations. Seule une propriété de l'énergie minimale est établie à partir de l'inégalité spatiale d'Heisenberg $\Delta x\,\Delta p_x \geqslant \frac{\hbar}{2}$. Pour rappel, cette inégalité concerne les indéterminations

$$\Delta x = \sqrt{\left\langle (x - \langle x\rangle)^2 \right\rangle} \qquad \text{et} \qquad \Delta p_x = \sqrt{\left\langle (p_x - \langle p_x\rangle)^2 \right\rangle}$$

qui portent respectivement sur x et p_x. On précise en outre les relations suivantes où ψ^* désigne le complexe conjugué de ψ et $\langle A\rangle$ la moyenne d'une grandeur A dans l'état de fonction d'onde $\psi(x,t)$:

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\,|\psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \langle p_x\rangle = -i\hbar\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t)\,\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}x\,.$$

Q13. En analysant la parité de la fonction $\varphi(x)$, justifier que $\langle x\rangle = 0$ dans un état stationnaire lié du puits de potentiel harmonique.

Q14. Justifier également que $\langle p_x\rangle = 0$.

Q15. En déduire une expression de l'énergie E en fonction de $\Delta x, \Delta p_x, m$ et ω_0.

Q16. Montrer ainsi que l'énergie de la particule vérifie l'inégalité

$$E \geqslant f_{\mathrm{H}}(\Delta x)$$

où f_{H} est une fonction de Δx et des paramètres m, ω_0 et $\hbar$. Montrer que le minimum de cette fonction de Δx a pour expression $\frac{\hbar\omega_0}{2}$.

On admet que le minimum précédent correspond effectivement à l'énergie de l'état fondamental d'une particule matérielle évoluant dans un puits de potentiel harmonique unidimensionnel. Ainsi, dans son état fondamental :

(i) la particule a une énergie strictement positive ;

(ii) une mesure de position de la particule donne en moyenne une valeur nulle ;

(iii) la position n'est pas exactement déterminée.

II – Une première approche quantique de l'effet Casimir

En suivant un raisonnement qui ne sera pas détaillé ici, on peut montrer qu'un rayonnement électromagnétique se décompose en modes propres dont le champ électrique et le champ magnétique (multiplié par c) jouent des rôles similaires à ceux des deux variables conjuguées x et p_x précédentes. Il en résulte que l'énergie d'un mode de rayonnement électromagnétique est quantifiée, un quantum d'énergie correspondant à un photon. L'état fondamental d'un mode de vecteur d'onde $\vec{k}$ et de pulsation ω correspond à l'absence de photon dans ce mode, mais a cependant une énergie $\frac{\hbar\omega}{2}$, dite énergie de point zéro, qui peut être reliée à la moyenne $\left\langle \varepsilon_0 E^2\right\rangle$ dans ce mode. En notant l'analogie avec la conclusion de la sous-partie précédente :

(i) ce mode a une énergie strictement positive ;

(ii) le champ électrique associé est de valeur moyenne nulle ;

(iii) mais le champ électrique n'est pas exactement déterminé, si bien que sa moyenne quadratique est strictement positive.

L'énergie du vide est ainsi associée aux fluctuations du champ électromagnétique dans un état où il n'y a aucun photon. Pour analyser les conséquences de cette propriété, on revient à la cavité constituée de deux surfaces parfaitement conductrices séparées de la distance a selon (Oz). À température nulle ($T = 0$ K), la seule contribution à l'énergie d'un mode propre de la cavité est l'énergie de point zéro de ce mode, soit $\frac{\hbar\omega}{2} = \frac{\hbar k_z c}{2}$ en notant k_z la pulsation spatiale du mode ; celle-ci est quantifiée : $k_{z,n} = \frac{n\pi}{a}$ pour tout entier n non nul.

Q17. Donner l'expression de l'énergie électromagnétique dans la cavité à température nulle sous la forme d'une somme portant sur tous les modes. Expliquer pourquoi un tel résultat n'est pas acceptable.

Le problème précédent est évité si l'on suppose que la somme est tronquée à un rang $n_0 \gg 1$ traité comme une constante (ce qui revient à ne pas considérer les modes à de trop hautes pulsations pour lesquelles le confinement entre les surfaces conductrices est impossible). L'énergie correspondante, en se limitant aux n_0 premiers termes, est alors donnée par :

$$E(a) = \frac{\hbar\,\pi\,c}{4a}\,n_0\,(n_0+1)\ .$$

Pour caractériser l'effet Casimir, on cherche à comparer deux cavités dont les dimensions longitudinales, notées respectivement a et $\tilde{a}$, sont respectivement très petite et très grande devant les dimensions transversales.

Dans le cas de la cavité de dimension longitudinale $\tilde{a}$, on admet que les modes de pulsations spatiales $k_{z,n} = \frac{n\pi}{\tilde{a}}$ forment un continuum sur l'espace des pulsations spatiales k_z, avec un nombre de modes $\rho_{k_z}\,\mathrm{d}k_z$ (nombre de modes compris entre k_z et $k_z + \mathrm{d}k_z$). L'énergie totale E_∞ obtenue en sommant sur tous les modes, avec la même troncature que précédemment en termes de pulsation spatiale, est donnée par :

$$E_\infty = \int_0^{\frac{n_0\pi}{a}} \frac{\hbar\,k_z\,c}{2}\,\rho_{k_z}\,\mathrm{d}k_z\,.$$

On note que, sous cette hypothèse, la troncature se traduit par la borne supérieure de l'intégrale prise égale à $\frac{n_0\pi}{a}$.

Q18. En déduire l'expression de E_∞ en fonction de $\tilde{a}, n_0, a, c$ et $\hbar$.

Q19. Exprimer l'énergie de Casimir $E_{\mathrm{Cas}} = E(a) - E_\infty$ dans la limite où $n_0 \gg 1$ et $a \ll \tilde{a}$.

Q20. Établir le caractère attractif ou répulsif de l'effet Casimir sachant que la géométrie de la cavité tend à évoluer de façon à minimiser E_{Cas}.

III – Étude de la dépendance de l'énergie de Casimir avec la dimension longitudinale de la cavité

On s'est restreint dans le raisonnement précédent à des modes particuliers de la cavité, ce qui en limite la validité. En effet, pour une cavité de dimension longitudinale a selon (Oz) et de dimension transversale L selon (Ox) et (Oy), on peut montrer que les modes propres correspondent aux vecteurs d'onde $\overrightarrow{k} = \left(\frac{n_x\pi}{L}, \frac{n_y\pi}{L}, \frac{n_z\pi}{a}\right)$ avec n_x, n_y, n_z trois entiers positifs, dont au moins l'un d'eux est non nul.

On note :

- $E(a)$ l'énergie électromagnétique contenue dans la cavité de dimension longitudinale a dont les modes sont discrets et E_∞ l'énergie qui serait obtenue dans le cas où les modes forment un continuum ;
- $E_{\mathrm{Cas}}(a) = E(a) - E_\infty$ l'énergie de Casimir, grandeur finie dont on se propose d'étudier numériquement la dépendance avec a.

On admet que :

$$E_{\mathrm{Cas}}(a) = -\frac{\hbar\,c\,L^2}{2\pi}\,f(a)$$

où

$$f(a) = \int_0^\infty g(u,a)\,u\,\mathrm{d}u$$

et

$$g(u,a) = a\int_0^\infty \sqrt{u^2+k_z^2}\,\mathrm{d}k_z - \frac{u}{2} - \sum_{n_z=1}^{\infty}\sqrt{u^2+\left(\frac{n_z\pi}{a}\right)^2}\,.$$

Pour évaluer numériquement $g(u,a)$, on procède par des troncatures de façon analogue à la sous-partie précédente : on ne retient que les n_0 premiers termes de la série et on remplace la borne supérieure de l'intégrale par $\frac{n_0\pi}{a}$. L'intégrale qui figure dans l'expression de $g(u,a)$ peut être évaluée par la méthode des rectangles à droite en divisant l'intervalle $\left[0, \frac{n_0\pi}{a}\right]$ en $n_0\,N$ intervalles avant de lui retrancher la somme de la série tronquée.

Q21. Proposer un contenu acceptable pour les lignes incomplètes 12, 17 et 19 du script suivant en langage Python qui vise à implémenter cette méthode simplifiée.

```
1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  n0 = 100  # Rang maximum des modes longitudinaux retenus
4  N = 20
5
6  def g(u, a):
7      # Évaluation de l'intégrale par la méthode des rectangles à droite
8      s1 = 0
9      dk = np.pi / (a * N)  # Pas de discrétisation
10     for i in range(n0 * N):
11         k_droite = (i + 1) * dk
12         s1 = s1 +   # À compléter
13     s1 = a * s1 * dk
14     s2 = 0
15     # Évaluation de la série en la tronquant
16     for j in range(1, n0 + 1):
17         s2 = s2 +   # À compléter
18     # Évaluation de g(u, a)
19     return   # À compléter
20
21 def f(a):
22     sum = 0
23     for n in range(N * n0):
24         u = (n + 1 / 2) * np.pi / N / a
25         sum = sum + g(u, a) * u * (np.pi / N / a)
26     return sum
```

La méthode numérique simplifiée adoptée précédemment n'est assez robuste que pour l'évaluation de la pente en diagramme log-log (de base 10) ; la valeur de l'ordonnée à l'origine n'est accessible que par une méthode plus évoluée, dite de renormalisation de Richardson et non détaillée dans ce sujet, qui permet d'assurer la convergence numérique en annulant les divergences communes à la somme discrète et à l'intégrale continue [1]. Celle-ci permet d'obtenir la représentation graphique de la figure 2.

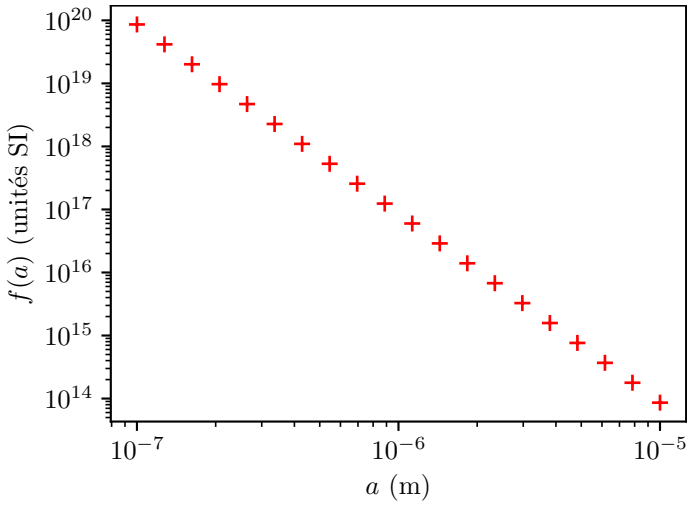


Figure 2 – Représentation de $f(a)$ en échelle log-log (de base 10).

Q22. En déduire que $E_{\text{Cas}}(a) = -\frac{B}{a^{\xi}}$ où ξ est un exposant, supposé entier, de valeur à préciser et B une constante strictement positive qui n'est pas à déterminer.

Q23. Sachant que la force « ressentie » par la paroi en $z = -a$ dérive de l'énergie de Casimir selon une expression analogue à celle d'une force conservative, établir l'expression de cette force en fonction de B et a. Commenter.

Cette force, dite force de Casimir, est de nature surfacique. En s'appuyant sur une analyse dimensionnelle, on peut lui associer une force par unité de surface de la forme suivante :

$$\kappa\, a^{\alpha}\, c^{\beta}\, \hbar^{\delta}$$

où κ est un facteur numérique sans dimension et c la célérité de la lumière dans le vide.

Q24. Déterminer les exposants α, β et δ. En déduire l'expression de la constante B introduite à la question **Q22**.

On admet que, pour la cavité étudiée, $\kappa = \frac{\pi^2}{240}$.

Q25. Calculer numériquement la différence de pression ΔP_{Cas} entre l'extérieur et l'intérieur de la cavité due à la force de Casimir. En déduire la norme de cette force pour une cavité formée de deux miroirs plans, de surface $L^2 = 1$ cm^2 chacun, distants de $a = 100$ nm, puis distants de $a = 1$ mm. Commenter.

Partie C – Mesures expérimentales et corrections des écarts à la force théorique de Casimir

I – Une mesure dans une configuration sphère-plan

En 2000, B.W. Harris *et al.* [2] publient les résultats d'une expérience qui permet la mesure de la force de Casimir et dont le principe est le suivant.

Il s'agit de rapprocher une sphère d'une surface plane à l'aide du micro-levier (très fine lamelle flexible d'environ 100 µm de longueur) d'un microscope à force atomique dont la mesure de flexion renseigne sur la force d'interaction à quelques piconewtons près (figure 3). La sphère de rayon 100 µm, ainsi que la plaque en regard, sont recouvertes d'or et sont placées à très basse température dans un vide poussé. Les surfaces sont supposées parfaitement conductrices et sont de plus portées au même potentiel. La distance minimum d'approche d de la sphère au plan couvre un intervalle de 60 à 900 nm ; elle est mesurée par interférométrie à l'aide d'un LASER. Les résultats de mesure de la force de Casimir, avec une précision expérimentale estimée à 2 %, sont présentés sur la figure 4.

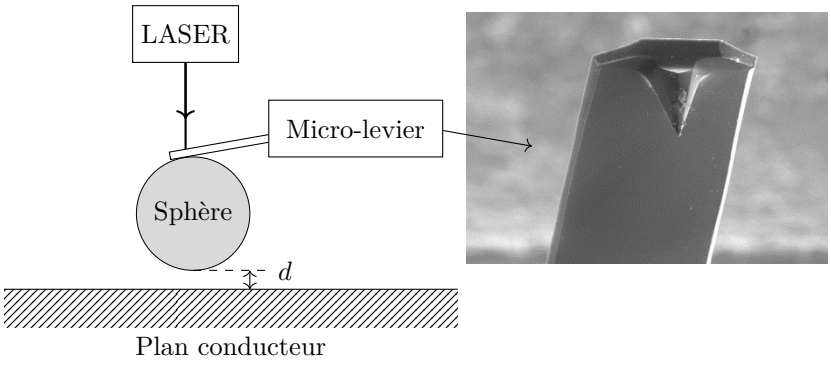


Figure 3 – Principe de l'expérience (le dessin à gauche n'est pas à l'échelle) [2].

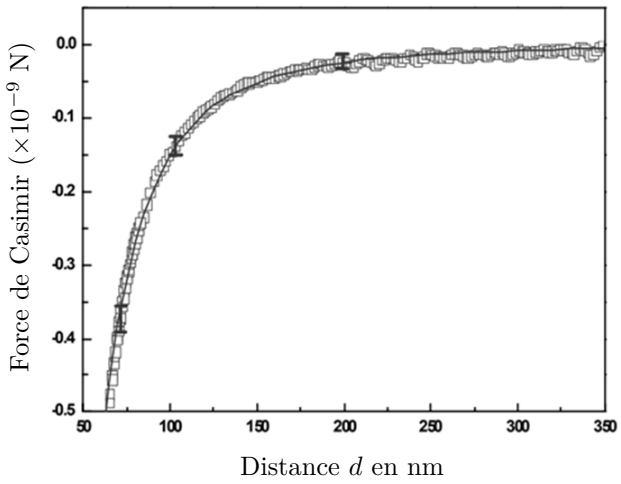


Figure 4 – Force de Casimir en fonction de la distance de la sphère au plan [3].

Q26. Expliquer en quoi l'étude expérimentale de la configuration sphère-plan est plus avantageuse d'un point de vue pratique que celle de la configuration plan-plan vue auparavant.

Avec cette configuration sphère-plan, on perd les symétries de la configuration plan-plan, ce qui ne permet plus une détermination simple des modes propres de la cavité. Cependant, lorsque la distance de séparation d est petite devant le rayon de la sphère R, on peut considérer que chaque élément de surface n'interagit qu'avec l'élément de surface situé en face de lui (approximation de proximité), ce qui permet ainsi de décomposer la force totale en l'ensemble des contributions indépendantes de chaque couronne sphérique de rayon x comme représenté sur la figure 5.

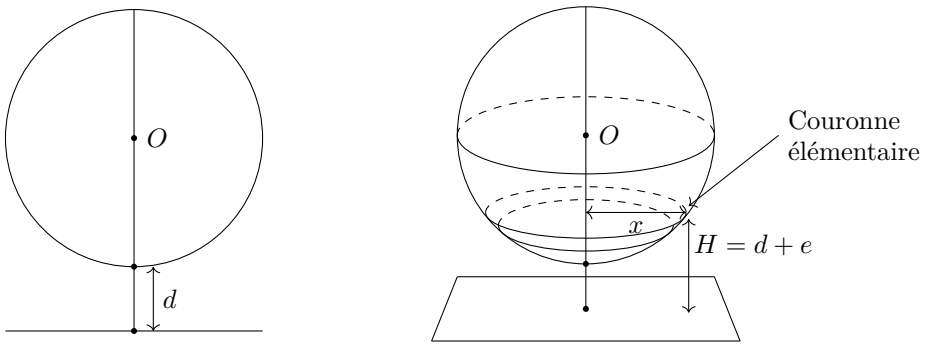


Figure 5 – Configuration sphère-plan [4].

On suppose que la dépendance à la dimension longitudinale de la cavité dans la force de Casimir analysée aux questions **Q23** et **Q24** est encore valide entre une couronne élémentaire et le plan en remplaçant a par la distance $H = d + e$.

Q27. En reliant les grandeurs e, x et R et en considérant le cas où d est de l'ordre de 100 nm, proposer une estimation qui montre que la force de Casimir se réduit en pratique aux contributions des couronnes élémentaires au voisinage immédiat de la zone de plus courte approche entre la sphère et le plan.

Une analyse plus poussée de la configuration sphère-plan conduit, pour une sphère de rayon R et une distance au plan de d, à l'expression de la valeur de la force de Casimir sphère-plan (notée F_{sp}) suivante :

$$F_{sp} = \frac{\pi^3 \hbar c R}{360 d^3} \eta_E$$

où η_E est un facteur de correction en énergie dont la variation avec d est présentée sur la figure 6.

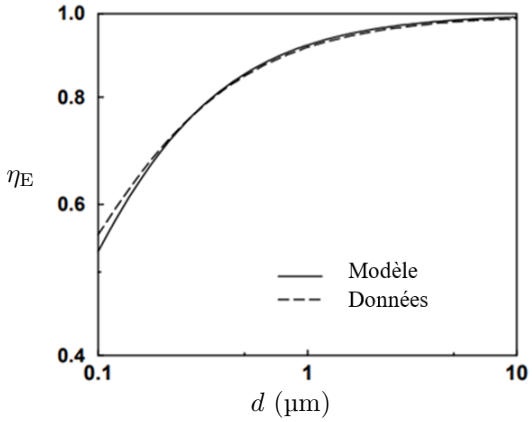


Figure 6 – Variation du facteur de correction en énergie η_E avec d [5].

Q28. Évaluer la force de Casimir sphère-plan pour une distance au plan de 100 nm. Commenter au vu de la figure 4.

II – Prise en compte de la température non nulle

On revient à une configuration plan-plan comme celle étudiée dans les parties A et B. L'expression établie dans les questions **Q23** et **Q24** de la force de Casimir n'est correcte qu'à température nulle. À température non nulle, il faut tenir compte de la pression de radiation exercée par les photons d'origine thermique. On considère une cavité de dimension longitudinale $a = 100$ nm.

Q29. Évaluer l'ordre de grandeur de la longueur d'onde λ_T du rayonnement thermique à température ambiante. Préciser ce que l'on peut dire de la contribution des photons du rayonnement thermique dans la cavité compte tenu du résultat établi à la question **Q11**.

On admet que la densité volumique d'énergie associée au rayonnement thermique peut, en ordre de grandeur, être assimilée à la densité volumique d'énergie $u(T)$ obtenue en intégrant la densité spectrale d'énergie volumique $u_\omega(\omega,T)$ sur toutes les pulsations comprises entre 0 et $+\infty$ (cf. loi de Planck fournie dans le formulaire en fin d'énoncé).

Q30. En exploitant le résultat de la question **Q8**, donner l'ordre de grandeur de la pression de radiation sur la face externe des plans reflecteurs et liée aux photons thermiques à température ambiante. En le comparant à la différence de pression ΔP_{Cas} évaluée à la question **Q25**, conclure sur l'effet de la température dans les mesures de l'effet Casimir.

III – Prise en compte du caractère imparfait des plans réflecteurs

En réalité, les conducteurs sont imparfaits et l'onde électromagnétique incidente sur leur surface n'est pas parfaitement réfléchie. En négligeant l'effet de la relaxation des électrons sur la force de Casimir – approximation acceptable aux fréquences considérées – on modélise l'interaction de l'onde électromagnétique avec la surface du conducteur par celle avec un plasma d'électrons de conduction, affectés d'une masse effective m^* qui diffère de leur masse réelle. Le plasma est localement neutre ; la densité numérique en électrons (en m^{-3}) est notée n_e et celle en ions est $n_i = n_e$. L'équation du mouvement d'un électron de conduction soumis aux champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ d'une onde plane progressive harmonique (opph) dans le métal s'écrit alors :

$$m^* \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\left[\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right].$$

Q31. Commenter les différents termes de cette équation. Préciser les conditions permettant de négliger le terme en $\vec{v} \wedge \vec{B}$ devant celui en $\vec{E}$.

On se place dans le cadre de cette hypothèse qui sera validée à la question **Q36**. De plus, on introduit la notation complexe en $e^{+i\omega t}$ pour l'étude menée en régime sinusoïdal à la pulsation ω de l'opph.

Q32. Justifier que les ions ne contribuent pratiquement pas à la densité de courant et en déduire l'expression de la conductivité complexe $\underline{\sigma}$ du milieu, à exprimer en fonction de la densité numérique n_e, de la charge élémentaire e, de la pulsation ω et de la masse effective m^*.

Q33. En utilisant l'équation de Maxwell-Ampère, établir une équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ magnétique $\underline{\vec{B}}$ en notation complexe.

Q34. En déduire la relation de dispersion relative à une opph se propageant dans ce milieu et dont la phase est de la forme $\omega t - kz$.

Q35. Montrer l'existence d'une pulsation de coupure ω_P, dite pulsation plasma, à exprimer en fonction de ε_0, n_e, e et m^*.

Q36. Exprimer la vitesse de phase et valider l'hypothèse faite à la question **Q31**.

On définit la longueur d'onde plasma $\lambda_P = \frac{2\pi c}{\omega_P}$. On donne pour l'aluminium $\lambda_P = 78{,}6$ nm et une densité numérique en électrons de conduction $n_e = 1{,}96 \times 10^{29}$ m^{-3}.

Q37. Calculer numériquement la masse effective des électrons de conduction dans cette modélisation.

La dimension longitudinale a des cavités étudiées expérimentalement est en pratique comprise entre 0,1 et 10 µm. Suivant les expériences, les surfaces réfléchissantes sont choisies en or (Au), en aluminium (Al) ou en cuivre (Cu). Ces deux derniers métaux ayant des comportements similaires, on ne s'intéresse par la suite qu'à l'or et à l'aluminium. Les effets induits par la conductivité finie des miroirs relativement à la prédiction de Casimir, établie entre deux miroirs parfaitement réfléchissants, sont pris en compte par un facteur correctif sans dimension η_{F} défini par le rapport de la force de Casimir mesurée entre miroirs réels, notée F_{mes}, et la force de Casimir théorique calculée dans la situation idéale entre des plans parfaitement conducteurs, notée F_{th} :

$$\eta_{\text{F}} = \frac{F_{\text{mes}}}{F_{\text{th}}}.$$

La figure 7 rend compte des valeurs du facteur correctif η_{F} pour la force de Casimir entre des miroirs réels en fonction de la distance a entre les miroirs.

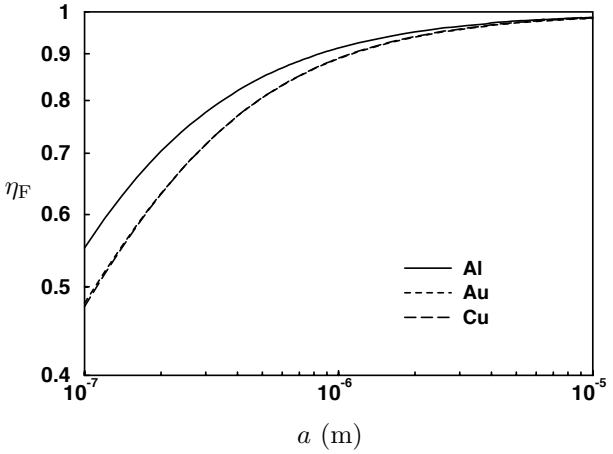


Figure 7 – Facteur correctif η_F en fonction de la distance a entre les miroirs [5].
Les trois courbes correspondent au cas de miroirs en aluminium (Al, courbe pleine), en or (Au, courbe pointillée) et en cuivre (Cu, courbe en tirets).

En modélisant le conducteur comme un plasma d'électrons dont la longueur d'onde plasma est notée λ_P, le facteur η_F ne dépend que du rapport $\frac{a}{\lambda_P}$ avec une évolution telle que représentée sur la figure 8.
On donne pour l'or $\lambda_P = 137$ nm.

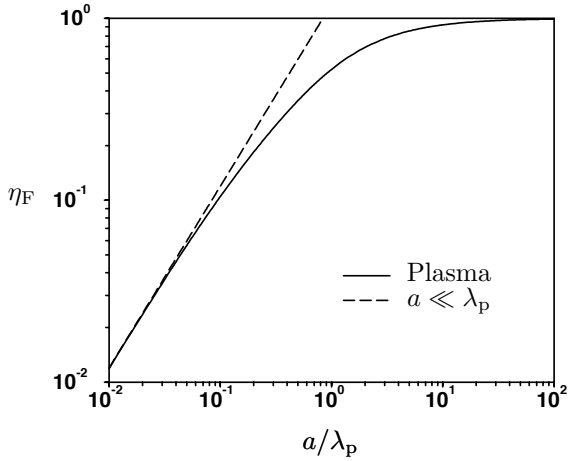


Figure 8 – Facteur correctif η_F en fonction de la longueur de la cavité rapportée à la longueur d'onde plasma [5].
La droite en tirets correspond au comportement asymptotique aux courtes distances.

Q38. Montrer que le caractère imparfait des conducteurs se traduit par une variation de la norme de la force de Casimir mesurée en $a^{\alpha'}$ où α' est un entier négatif dont la valeur sera estimée.

Q39. Dans les deux cas limites (cas 1 et cas 2) de dimensions de cavité a égales respectivement à 0,1 et 10 µm, discuter du choix de conducteurs respectivement en aluminium ou en or. Compte tenu des résultats présentés sur les figures 7 et 8, discuter du choix entre l'or et l'aluminium pour une expérience dans une cavité de dimension a de l'ordre de 100 nm. Proposer une justification du fait que l'or est souvent choisi en pratique.

IV – Mesure de déflexion par interférométrie en quadrature de phase

On s'intéresse dans cette sous-partie à un dispositif de mesure de déflexion d'un micro-levier, utile notamment pour l'étude de l'effet Casimir [6, 7]. L'étude est menée volontairement dans un cadre idéalisé, sans considérer divers défauts qu'il est possible de prendre en compte en pratique par un protocole de calibration non abordé.

Le dispositif fait intervenir divers éléments précisés sur la figure 9 et qui impose un système d'axes utile pour la suite :

– un faisceau LASER entrant : ce faisceau est monochromatique, de longueur d'onde $\lambda_0 = 633$ nm, et polarisé rectilignement selon la direction du vecteur $\overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{e_z}$;

– des cubes séparateurs non polarisants inférieur (CS_i) et supérieur (CS_s) : ces cubes permettent de diviser les ondes lumineuses de manière équilibrée en intensité, sans modifier leur état de polarisation. Notamment, le faisceau LASER entrant est, pour moitié en intensité, réfléchi par CS_i et donne un faisceau qui se propage vers BD_0 d'état de polarisation rectiligne selon la direction du vecteur $\vec{e_x} + \vec{e_y}$;

– des lentilles L_0, L_1 et L_2 d'ajustement optique supposées parfaites : elles ne modifient ni l'état de polarisation des ondes qui les traversent ni leur amplitude ;

– une lame quart d'onde $\lambda/4$: cette lame introduit sur le champ électrique de l'onde qui la traverse une avance de phase de $\pi/2$ pour la composante selon l'axe des y par rapport à celle selon l'axe des z (on néglige tout effet d'absorption) ;

– des déplaceurs polarisants BD_0, BD_1 et BD_2 (initiales BD pour « *beam displacer* ») : il s'agit de cristaux biréfringents qui réalisent des opérations particulières expliquées dans la suite ;

– des photodiodes à deux cadrans PD_1 et PD_2 : elles permettent de déterminer le contraste complexe $\underline{C}$ défini par

$$\underline{C} = C_1 + i\,C_2 \qquad \text{avec, pour } n = 1 \text{ ou } 2, \qquad C_n = \frac{I_{A_n} - I_{B_n}}{I_{A_n} + I_{B_n}}$$

où I_{A_n} et I_{B_n} sont les intensités relevées respectivement par les cadrans A_n et B_n du détecteur PD_n (les termes C_1 et C_2 peuvent être positifs ou négatifs).

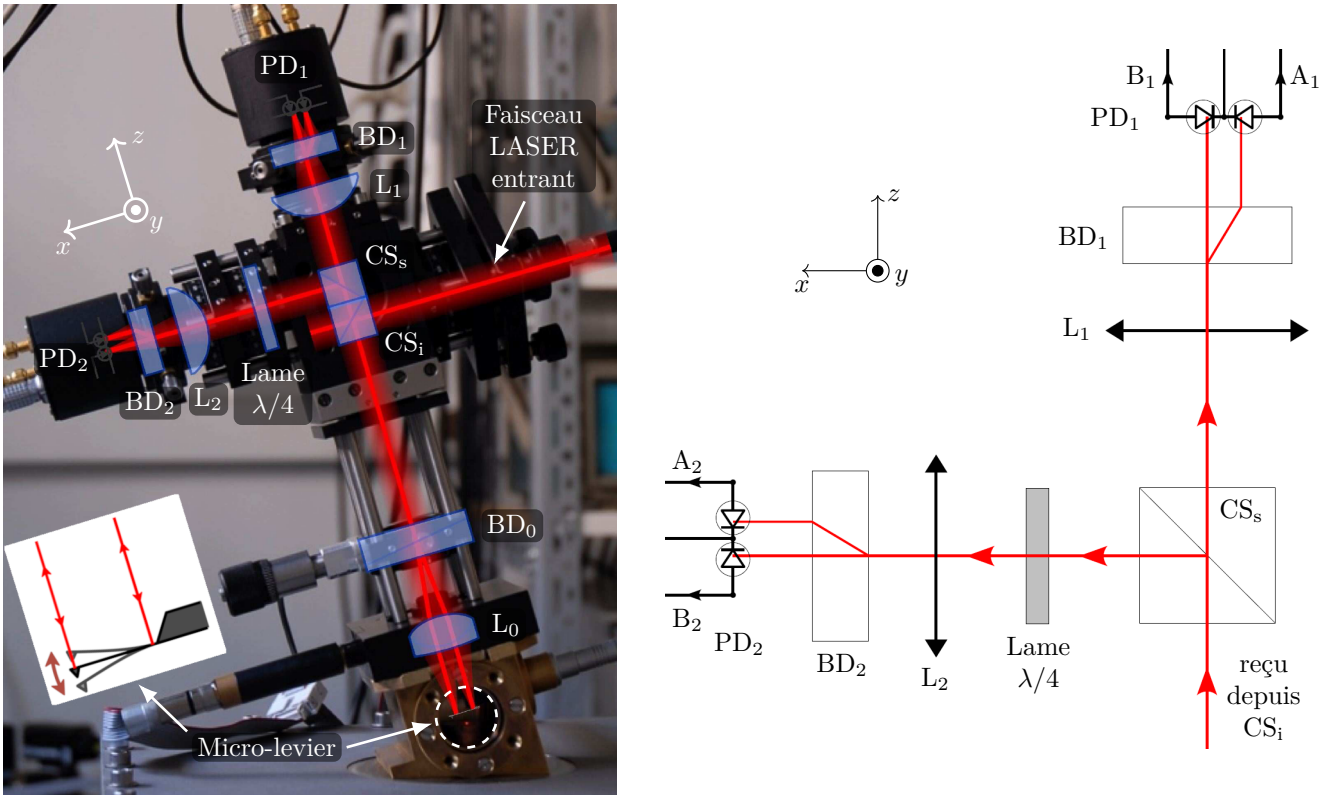


Figure 9 – Dispositif de mesure de déflexion d'un micro-levier [6]. Un système d'axes (x, y, z) est précisé, de vecteurs unitaires associés $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$. À gauche : montage avec divers éléments schématisés en surimpression et un encart spécifique pour le micro-levier. À droite : schéma optique relatif à la partie analyse du dispositif.

Les opérations réalisées par un déplaceur polarisant (BD) sont les suivantes (en se référant à la figure 10) :

– opération en sens direct de séparation (*lecture de la figure 10 avec propagation de gauche à droite*) : BD décompose un rayon d'état de polarisation quelconque en deux rayons parallèles entre eux, l'un non dévié polarisé rectilignement selon $\vec{e_u}$ et l'autre décalé polarisé rectilignement selon $\vec{e_v}$. BD permet de séparer les deux composantes de polarisation de l'onde incidente ;

– opération en sens inverse de superposition (*lecture de la figure 10 avec propagation de droite à gauche*) : BD permet aussi de réaliser l'opération inverse de la précédente, c'est-à-dire combiner les deux rayons polarisés représentés à droite pour constituer le rayon à gauche avec les états de polarisation superposés.

Ces opérations n'introduisent pas de déphasage entre les composantes séparées (sens direct) ou superposées (sens inverse).

Dans toute la suite, on appelle amplitude complexe associée à un champ électrique $\vec{E}$ de pulsation ω le vecteur complexe constant $\underline{\vec{E}}_0$ tel que $\vec{E} = \mathrm{Re}\left[\underline{\vec{E}}_0\, e^{i\omega t}\right]$ où la notation Re désigne la partie réelle.

On suppose que, si $\underline{\vec{E}}_n$ est l'amplitude complexe du champ reçu par le cadran A_n, l'intensité relevée est donnée par $\underline{\vec{E}}_n \cdot \underline{\vec{E}}_n^*$, où $\underline{\vec{E}}_n^*$ est l'amplitude complexe conjuguée associée à $\underline{\vec{E}}_n$.

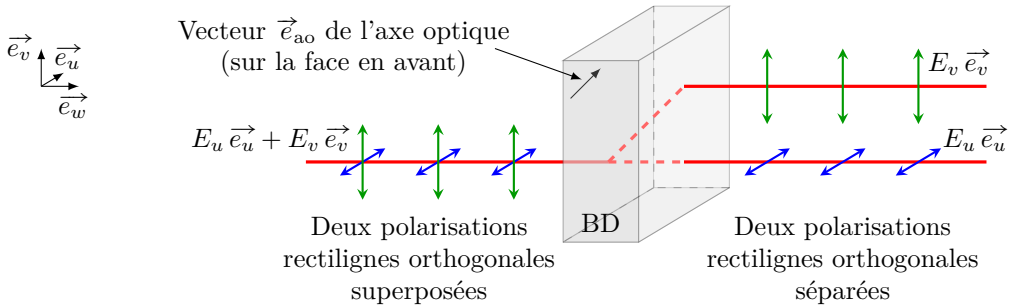


Figure 10 – Schéma de principe d'un déplaceur polarisant (BD). Le trièdre de vecteurs unitaires $(\vec{e_u}, \vec{e_v}, \vec{e_w})$ est direct et droit : $\vec{e_w}$ est orthogonal à la face d'entrée de BD et $\vec{e_u}$ est orthogonal à $\vec{e}_{\mathrm{ao}}$ caractéristique de BD ($\vec{e}_{\mathrm{ao}}$ est dans le plan vectoriel $(\vec{e_v}, \vec{e_w})$). Tous les champs électriques représentés sont associés à des ondes transverses.

On considère pour le moment uniquement deux rayons de même intensité qui parviennent sur le micro-levier comme indiqué sur la figure 11. Ces deux rayons ont été obtenus à partir d'un unique rayon, séparé spatialement par le déplaceur polarisant BD_0, et ajustés avec la lentille L_0. Le rayon qui arrive sur la base immobile du micro-levier est polarisé selon l'axe x (il sert de référence et il s'agit du rayon non dévié transmis par BD_0 sur L_0) ; celui qui arrive sur l'extrémité du micro-levier est polarisé selon l'axe y. Au moment de leur réflexion, ces rayons ne changent pas d'intensité, ne subissent pas de déphasage et conservent leur état de polarisation.

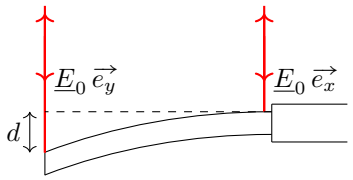


Figure 11 – Réflexion de deux rayons sur le micro-levier. Les amplitudes complexes des rayons incidents sont indiquées.

Q40. En supposant l'angle de déflexion suffisamment faible pour considérer un retour inverse de deux rayons parallèles comme l'illustre la figure 11, donner une expression approchée du retard de phase φ introduit par une déflexion d du micro-levier pour le rayon réfléchi à l'extrémité du micro-levier par rapport à l'autre.

Les deux faisceaux obtenus après réflexion sur le micro-levier sont recombinés en un seul faisceau grâce au déplaceur polarisant BD_0 : l'amplitude complexe associée au champ électrique de ce faisceau est notée $\underline{E}'_0\left(\vec{e_x} + e^{-i\varphi}\,\vec{e_y}\right)$.

On choisit une orientation du déplaceur polarisant BD_1 qui donne au niveau des cadrans A_1 et B_1 les amplitudes complexes suivantes associées aux champs électriques des faisceaux qui les atteignent respectivement :

$$\underline{\vec{E}}_{A_1} = \underline{E}''_0\,(1 + e^{-i\varphi})\,\vec{e}_{A_1} \qquad \text{et} \qquad \underline{\vec{E}}_{B_1} = \underline{E}''_0\,(1 - e^{-i\varphi})\,\vec{e}_{B_1}.$$

Les vecteurs $\vec{e}_{A_1}$ et $\vec{e}_{B_1}$ sont unitaires et orthogonaux entre eux.

Q41. Proposer une orientation pour le déplaceur polarisant BD_1 qui correspond à ce choix. On précisera soigneusement à cet effet les orientations des vecteurs $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$, $\vec{e}_{A_1}$ et $\vec{e}_{B_1}$ sur un ou plusieurs schémas adaptés.

L'orientation du déplaceur polarisant BD_2 permet d'obtenir au niveau des cadrans A_2 et B_2, *en l'absence de la lame quart d'onde* $\lambda/4$, les amplitudes complexes suivantes associées aux champs électriques des faisceaux qui les atteignent respectivement :

$$\underline{\vec{E}}_{A_2} = \underline{E}''_0\,(1 + e^{-i\varphi})\,\vec{e}_{A_2} \qquad \text{et} \qquad \underline{\vec{E}}_{B_2} = \underline{E}''_0\,(1 - e^{-i\varphi})\,\vec{e}_{B_2}.$$

Les vecteurs $\vec{e}_{A_2}$ et $\vec{e}_{B_2}$ sont unitaires et orthogonaux entre eux. C'est seulement après ce réglage que la lame quart d'onde $\lambda/4$ est ajoutée et que l'on procède aux mesures.

Q42. Montrer que dans le plan complexe (C_1, C_2) associé au contraste complexe $\underline{C}$, le déphasage φ est obtenu par la mesure d'un angle θ à préciser.

Q43. Sachant qu'il est possible de détecter une variation de l'angle θ de 10^{-5} rad au mieux, déterminer la valeur numérique de la plus petite variation δd de déflexion mesurable pour le micro-levier. Conclure dans le contexte de l'étude de forces de Casimir avec un tel dispositif.

Données et formulaire

Notations et données numériques

Dans tout le sujet, i désigne l'unité imaginaire complexe de carré -1.

Le tableau suivant donne quelques valeurs numériques, à trois chiffres significatifs, potentiellement utiles dans le cadre du sujet :

Constante de Planck réduite	$\hbar = 1{,}05 \times 10^{-34}$ J · s
Constante de Boltzmann	$k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J · K^{-1}
Constante d'Avogadro	$N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$ mol^{-1}
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 2{,}99 \times 10^{8}$ m · s^{-1}
Charge élémentaire	$e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C
Masse de l'électron	$m_e = 9{,}10 \times 10^{-31}$ kg
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F · m^{-1}
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 12{,}6 \times 10^{-7}$ H · m^{-1}

Le résultat de l'intégrale suivante est également fourni :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}\,.$$

Relations de passage

Les relations de passage pour le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$ au niveau d'une interface qui comporte des charges et courants surfaciques $(\sigma, \vec{j_s})$ et qui sépare deux milieux, notés 1 et 2, sont :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma(M)}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12} \qquad \text{et} \qquad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0\, \vec{j_s}(M) \wedge \vec{n}_{12}$$

où $\vec{n}_{12}$ désigne le vecteur unitaire normal à la surface de séparation entre les deux milieux, dirigé du milieu 1 vers le milieu 2 (voir figure 12), et $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ (comme $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$) sont les champs dans les milieux 1 et 2 aux points M_1 et M_2 au voisinage immédiat du point M de l'interface sur une même normale.

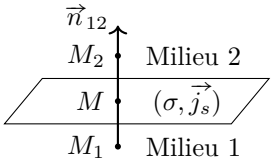


Figure 12 – Schématisation associée aux relations de passage.

Équation de Schrödinger

L'évolution spatio-temporelle de la fonction d'onde $\Psi(x,t)$ associée à une particule de masse m dans un « potentiel » $V(x,t)$ est régie par l'équation de Schrödinger à une dimension suivant l'axe (Ox) :

$$i\hbar\,\frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x,t) + V(x,t)\,\Psi(x,t)\,.$$

Loi de Planck

Le rayonnement d'un corps noir à l'équilibre thermique à la température T a une densité spectrale d'énergie volumique (en J · s · m^{-3}) :

$$u_\omega(\omega,T) = \frac{\hbar\,\omega^3}{\pi^2\,c^3}\,\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}\,.$$

$u_\omega(\omega,T)\,\mathrm{d}\omega$ est la contribution de l'intervalle $[\omega, \omega + \mathrm{d}\omega]$ à la densité volumique d'énergie du rayonnement.

Loi de Wien

L'exitance énergétique monochromatique (c'est-à-dire la densité spectrale de flux surfacique rayonné) d'un corps noir à l'équilibre thermique à la température T admet un maximum à une longueur d'onde λ_m qui correspond à un maximum de la densité spectrale d'énergie en longueur d'onde. La loi de Wien précise la relation entre cette longueur d'onde et la température associée :

$$\lambda_\mathrm{m}\,T = 2898\ \mu\mathrm{m} \cdot \mathrm{K} \approx 3 \times 10^{-3}\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{K}\,.$$

Analyse vectorielle

Pour un champ vectoriel $\vec{X}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{X})) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}(\vec{X})) - \Delta\vec{X}\,.$$

Références

[1] X. Sun. « The numerical computation of Casimir energies and related spectral problems ». Thèse. University College London, déc. 2022. URL : https://discovery.ucl.ac.uk/id/eprint/10185254.

[2] B. W. Harris, F. Chen et U. Mohideen. « Precision measurement of the Casimir force using gold surfaces ». In : *Phys. Rev. A* 62 (5 oct. 2000), p. 052109. DOI : 10.1103/PhysRevA.62.052109. URL : https://doi.org/10.1103/PhysRevA.62.052109.

[3] A. Roy, C.-Y. Lin et U. Mohideen. « Improved precision measurement of the Casimir force ». In : *Phys. Rev. D* 60 (11 nov. 1999), p. 111101. DOI : 10.1103/PhysRevD.60.111101. URL : https://doi.org/10.1103/PhysRevD.60.111101.

[4] T. Emig et al. « Probing the strong boundary shape dependence of the Casimir force ». In : *Phys. Rev. Lett.* 87 (26 déc. 2001), p. 260402. DOI : 10.1103/PhysRevLett.87.260402. URL : https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.260402.

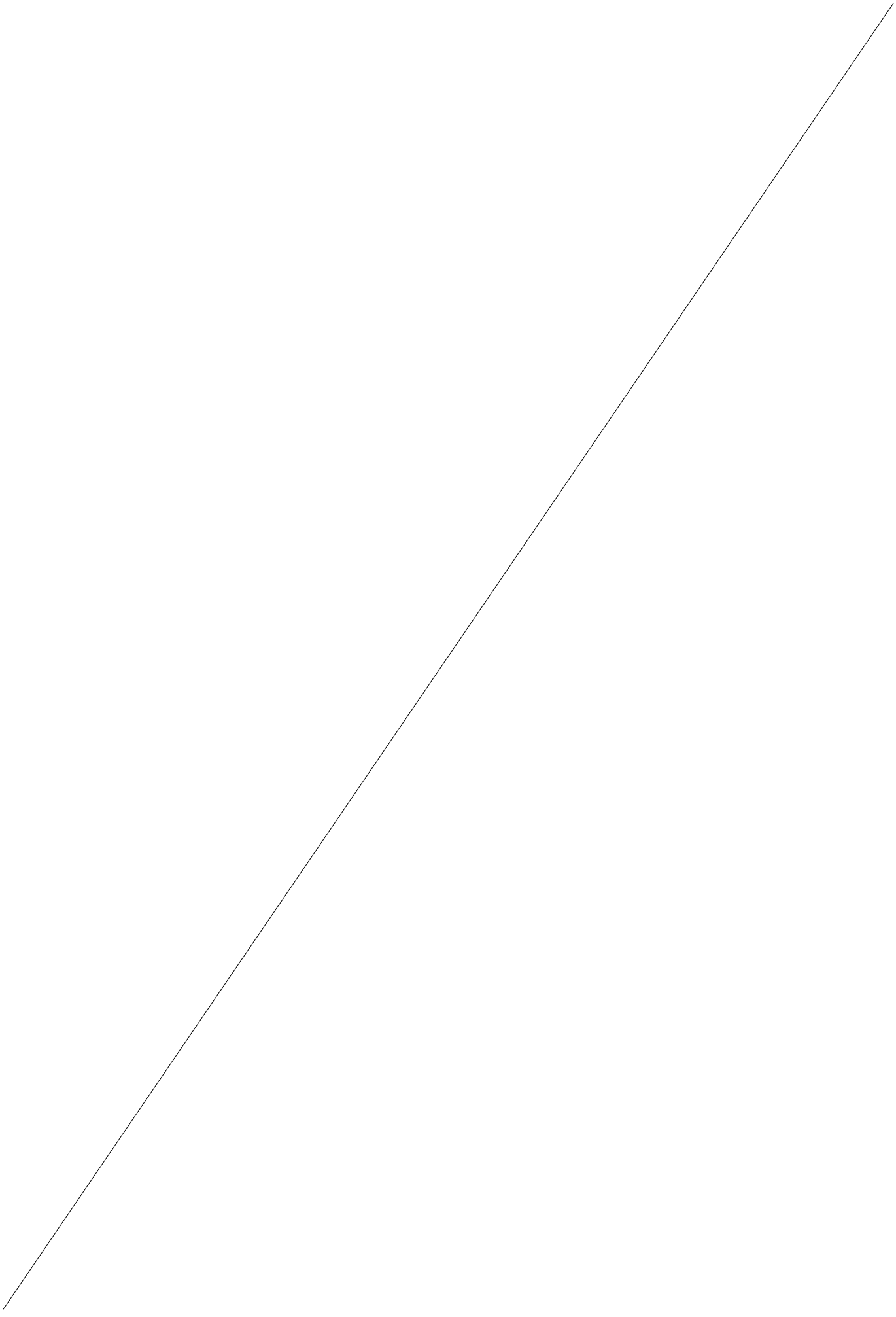
[5] C. Genet. « La force de Casimir entre deux miroirs métalliques à température non nulle ». Thèse. Université Pierre et Marie Curie – Paris VI, juill. 2002. URL : https://theses.hal.science/tel-00001749.

[6] L. Bellon. « Exploring nano-mechanics through thermal fluctuations ». Habilitation à diriger des recherches. École normale supérieure de Lyon – ENS LYON, nov. 2010. URL : https://theses.hal.science/tel-00541336.

[7] A. Le Cunuder. « Étude expérimentale des forces de Casimir ». Thèse. Université de Lyon, mars 2017. URL : https://theses.hal.science/tel-01490037.

◇ Fin ◇

P081 - 19 mars 2026 - 16:29:14



Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de MPI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Grandeurs, unités, analyse dimensionnelle et ordres de grandeur
- Bases de Python : expressions, types, instructions, fonctions

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/mpi