Concours Centrale-Supélec, France

# Session 2001, filière PC

## Mathématiques 1

### Ce que traite le sujet

- Préliminaires
- Partie I
- Partie II

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/pc/2001/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

# MATHÉMATIQUES I

## *Préliminaire*

On rappelle qu'une fonction $\varphi$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bornée par un réel $K>0$ si la fonction $|\varphi|$ est majorée par $K$ :

$\forall x \in \mathbb{R}, |\varphi(x)| \leq K$ .

**1)** Soit $m$ un entier supérieur ou égal à $1$. En calculant de deux façons différentes le développement limité à l'ordre $m$ à l'origine de la fonction $(e^x-1)^m$ montrer que :

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} C_m^k k^j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \text{ est un entier entre 1 et } m-1, \\ m! & \text{si } j = m. \end{cases}$$

**2)** Prouver que si $(u_k)$ est une suite croissante de réels strictement positifs et $k$, $n$ des entiers tels que $1 \leq k \leq n$, on a :

$$(u_1 u_2 \ldots u_k)^n \leq (u_1 u_2 \ldots u_n)^k .$$

## *Partie I -*

**I.A -** Soit $f$ une fonction de classe $C^1$ et de classe $C^2$ par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f$ et $f''$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par $M_0$ et $M_2$.

I.A.1) En écrivant, pour $h>0$, l'inégalité de Taylor-Lagrange entre $x$ et $x+h$ et entre $x$ et $x-h$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2} .$$

I.A.2) En déduire que $f'$ est bornée par $\sqrt{2M_0M_2}$.

**I.B -**

I.B.1) Montrer de même que, si $f$ est de classe $C^2$ et de classe $C^3$ par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f$ et $f^{(3)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par $M_0$ et $M_3$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}(9M_0^2M_3)^{1/3} .$$

I.B.2) $f''$ est-elle également bornée sur $\mathbb{R}$ ?

# Filière PC

*Dans toute la suite du problème, $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à $2$.*

## *Partie II -*

Soit $f$ une fonction, non constante, de classe $C^{n-1}$ et de classe $C^n$ par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f$ et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par $M_0$ et $M_n$.

**II.A -** En utilisant la question 1) du préliminaire ainsi que l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $n$ appliquée à la fonction $f$ entre les valeurs $x$ et $x+h$ pour $h = 1, 2, \ldots, n-1$, montrer que la fonction $f^{(n-1)}$ est, elle aussi, bornée sur $\mathbb{R}$.

**II.B -** En déduire que toutes les dérivées $f^{(k)}$ sont bornées pour $0 \leq k \leq n$. On note alors $M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left|f^{(k)}(x)\right|$.

**II.C -**

II.C.1) Montrer que pour tout entier $k$ tel que $0 \leq k \leq n$, on a $M_k > 0$.

II.C.2) En utilisant la suite finie $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$ avec $u_k = 2^{k-1}\dfrac{M_k}{M_{k-1}}$, en déduire que pour tout entier $k$ entre $0$ et $n$, on a :

$$M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}.$$

Est-ce la meilleure majoration possible ?

## *Partie III -*

$E$ (respectivement $F$) désigne l'espace des fonctions continues par morceaux (respectivement continues) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x+1) + f(x) = 0$ pour tout réel $x$. On admettra —c'est évident— que ce sont des sous-espaces vectoriels réels de l'espace de toutes les fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ que l'on munit de la norme de la convergence uniforme, notée ici $N$ et définie par

$$N(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

**III.A -** Démontrer que pour toute fonction $f$ dans $E$, il existe $g$ unique dans $F$ telle que, en tout point $x$ où $f$ est continue, on a $g'(x) = f(x)$. On note alors $g = T(f)$ ou $g = Tf$ et l'on définit ainsi une application $T$ de $E$ dans $E$.

**III.B -** On considère la fonction $\varphi_0$ de $E$ telle que :

$$\varphi_0(0) = 0, \qquad \varphi_0(x) = 1 \text{ si } x \in ]0;1[ .$$

On pose $T^1 = T$ et si $k \in \mathbb{N}^*$, $T^k = T \circ T^{k-1}$, puis pour $k \geq 1$, $\varphi_k = T^k(\varphi_0)$.

III.B.1) Déterminer et représenter graphiquement sur le segement $[0;2]$ les fonctions $\varphi_k$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Dans toute la suite, on notera $\lambda_k = N(\varphi_k)$.

III.B.2) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_k(-x) = (-1)^{k+1}\varphi_k(x) \text{ et } \varphi_k(1-x) = (-1)^k\varphi_k(x).$$

III.B.3) Montrer que, pour $k \geq 1$,

$$\lambda_{2k} = (-1)^k\varphi_{2k}(1/2) \text{ et } \lambda_{2k-1} = (-1)^k\varphi_{2k-1}(0).$$

**III.C -**

III.C.1) Soit $f \in E$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt + \int_1^x f(t)\,dt .$$

III.C.2) En déduire que, pour tout $f \in E$, on a $2N(Tf) \leq N(f)$.

**III.D -** Déterminer les fonctions $f$ de norme 1 de $E$ telles que :

$$N(Tf) = \frac{1}{2}.$$

**III.E -** Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f$ de norme 1 dans $F$ telle que :

$$N(Tf) = \frac{1}{2}.$$

**III.F -** Soit maintenant $p$ un entier naturel non nul et $f$ une fonction de classe $C^{n-1}$ et de classe $C^n$ par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x+2p) = f(x)$ pour tout réel $x$.

III.F.1)

a) Montrer que si $f$ a $q$ zéros distincts sur $[0;2p[$, alors $f'$ a au moins $q$ zéros distincts sur $[0;2p[$.

b) Montrer que si $f$ et $f'$ ont exactement $q$ zéros distincts sur $[0;2p[$, alors elles n'ont aucun zéro commun.

III.F.2) Pour tout réel $\nu$ tel que $0 < \nu < 1$ et tout réel $\rho$, on définit la fonction $l : x \text{ a } \varphi_n(x) - \nu f(x+\rho)$.

a) On suppose que $N(f^{(n)}) \leq 1$. Montrer que $l^{(n-1)}$ s'annule au plus $2p$ fois sur $[0;2p[$.

b) On suppose que $N(f) \leq \lambda_n$. Montrer que $l$ s'annule au moins $2p$ fois sur $[0;2p[$.

c) En déduire que, si $N(f) \leq \lambda_n$ et $N(f^{(n)}) \leq 1$, les $l^{(k)}$ pour $k = 1, 2, \ldots, n-1$ ont exactement $2p$ zéros sur l'intervalle $[0;2p[$.

III.F.3) On suppose $f$ non constante.

a) Montrer que l'on peut trouver $\alpha$ et $\beta$ dans $[0;2p[$ tels que :

$$|f'(\alpha)| = N(f'), \qquad \varphi'_n(\beta) = \frac{\lambda_{n-1}}{N(f')} f'(\alpha).$$

On pose alors $h(x) = \varphi_n(x) - \lambda_{n-1} f(x + \alpha - \beta) / N(f')$.

b) Ici on suppose $n \geq 3$. Vérifier que $h'(\beta) = h''(\beta) = 0$.

c) En déduire que :

$$\left(N(f) \leq \lambda_n \text{ et } N(f^{(n)}) \leq 1\right) \Rightarrow \left(N(f') \leq \lambda_{n-1}\right).$$

d) Montrer que cette dernière implication est encore vraie pour $n = 2$.

**III.G -** Montrer qu'il existe une fonction $\omega$ de classe $C^n$ de $\mathbb{R}$ dans $[0;1]$ valant $1$ sur le segment $[-1/2;1/2]$ et $0$ en dehors du segment $[-1;1]$ (on pourra utiliser la fonction $x$ a $\int_0^x \sin^n(t)\,dt$ sur le segment $[0;\pi]$).

**III.H -** Soit maintenant $f$ une fonction de classe $C^{n-1}$ et de classe $C^n$ par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f$ et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ et pour laquelle :

$$N(f) \leq \lambda_n \text{ et } N(f^{(n)}) \leq 1.$$

Soit $\alpha$ un réel de l'intervalle $[0;1[$. Pour tout entier naturel $p$ non nul, on note $f_p$ la fonction de période $2p$ telle que :

$$f_p(x) = \alpha f(x)\omega(x/p) \text{ pour } |x| \leq p.$$

III.H.1) Montrer que $f_p^{(n)}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et que l'on a, pour $p$ assez grand,

$$N(f_p) \leq \lambda_n \text{ et } N(f_p^{(n)}) \leq 1.$$

III.H.2) En déduire que l'on a encore $N(f') \leq \lambda_{n-1}$.

**III.I -** Soit $f$ une fonction de classe $C^{n-1}$ et de classe $C^n$ par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f$ et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout entier $k$ compris entre $0$ et $n$, $f^{(k)}$ est bornée et que l'on a :

$$N(f^{(k)}) \leq N(f)^{1-k/n} N(f^{(n)})^{k/n} \lambda_{n-k} / \lambda_n^{1-k/n}.$$

(On pourra utiliser une fonction du type $x$ a $af(bx)$).

## *Partie IV -*

**IV.A -** On définit, pour $p$ entier supérieur ou égal à $2$, la fonction $\psi_p$ de $F$, affine sur $\left[0;\frac{1}{p}\right]$, $\left[\frac{1}{p};1-\frac{1}{p}\right]$ et $\left[1-\frac{1}{p};1\right]$ et vérifiant :

$$\psi_p(0) = \psi_p(1) = 0, \qquad \psi_p(\frac{1}{p}) = \psi_p(1-\frac{1}{p}) = 1.$$

En utilisant le III.C, montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$\lim_{p \to +\infty} N(T^n(\psi_p)) = \lambda_n .$$

**IV.B -** En déduire que l'inégalité du III.I ne peut être améliorée.

---

**••• FIN •••**

---

# Prepa Help

prepahelp.com · classes préparatoires, Maroc et France

## Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

### Chapitres liés à ce sujet

de calcul d'intégrales

s, produits, binôme et systèmes linéaires

mériq

### Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/pc