Concours Centrale-Supélec, France

# Session 2002, filière PC

## Mathématiques 1

### Ce que traite le sujet

- Partie I : définition de la fonction
- Partie II : étude de quelques propriétés de la fonction
- Partie III : séries de Fourier lacunaires

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/pc/2002/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

# MATHÉMATIQUES I

La première partie de ce problème est consacrée à la description d'une procédure géométrique qui aboutit naturellement à la construction d'une fonction continue $x : ]0,\pi[ \to \mathbb{R}$ que l'on étudie sommairement à la Partie II. La troisième partie concerne les propriétés de dérivabilité des fonctions continues $2\pi-$périodiques ayant une série de Fourier lacunaire. Enfin, à la Partie IV on combine les résultats des parties I et III pour montrer que la fonction $x$ n'est dérivable en aucun point de $]0,\pi[$.

On note $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et on désigne par $C_{2\pi}$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont continues et $2\pi-$périodiques.

Si $f \in C_{2\pi}$ on rappelle que ses coefficients de Fourier sont donnés pour $n \in \mathbb{Z}$ par $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$, la série de Fourier (formelle) de $f$ étant $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{int}$.

## *Partie I* - Définition de la fonction $x$

**I.A -** On suppose l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique. On définit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par :

$T(x,x,0) = (x,x,0)$,

$T(x,y,z) = (x',y',z')$ où $x' = y$ et $(y',z')$ est la projection orthogonale de $(y,-z)$ sur la droite passant par $(x,0)$ et $(y,z)$ si $(x,y,z) \neq (x,x,0)$.

I.A.1) On suppose $x \neq y$, $z \neq 0$ et l'on pose $A = (x,0)$, $B = (y,z)$, $C = (y,-z)$, $A' = (x',0)$, $B' = (y',-z')$, $C' = (y',z')$ où $(x',y',z') = T(x,y,z)$.

Que représentent les points $A'$, $B'$, $C'$ par rapport au triangle $ABC$ ?

I.A.2) Montrer que si $(x,y,z) \neq (x,x,0)$ alors

$$y'-x' = -\frac{2z^2(y-x)}{(y-x)^2+z^2},\quad z' = z\frac{(y-x)^2-z^2}{(y-x)^2+z^2}.$$

**I.B - Pour $t \in ]0,\pi[$ on pose $X_0(t) = (0,1,\operatorname{cotan} t)$ et on définit par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$ la suite $X_n(t) = (x_n(t),y_n(t),z_n(t))$ par $X_{n+1}(t) = T(X_n(t))$.**

I.B.1) Soit $n \in \mathbb{N}$, $t \in ]0,\pi[$. Montrer que, si l'on a $z_n(t) = 0$, alors $z_{n+1}(t) = 0$ et $y_{n+1}(t) - x_{n+1}(t) = 0$.

# Filière PC

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ ; on suppose que $t \in ]0,\pi[$ est tel que $z_n(t) \neq 0$ si $0 \leq n \leq N-1$.

a) Montrer que, pour ces valeurs de $n$,

$$\frac{y_n(t) - x_n(t)}{z_n(t)} = \tan(2^n t) .$$

b) On suppose de plus à présent que $z_N(t) = 0$. Montrer que :

$$\left( \frac{y_{N-1}(t) - x_{N-1}(t)}{z_{N-1}(t)} \right)^2 = 1 \text{ et que } \cos(2^N t) = 0 .$$

I.B.2) Montrer que

$$\forall n \geq 0 , \ \forall t \in ]0,\pi[ , \ y_{n+1}(t) - x_{n+1}(t) = -2\cos^2(2^n t)(y_n(t) - x_n(t)) .$$

I.B.3) En déduire :

$$\forall n \geq 0 , \ \forall t \in ]0,\pi[ , \ x_{n+1}(t) - x_n(t) = (-1)^n \frac{\sin^2(2^n t)}{2^n \sin^2(t)} .$$

I.B.4) On pose pour $n \geq 0$ $u_n(t) = \sin^2(t) x_n(t)$. Montrer que la suite $(u_n)$ converge simplement vers une fonction $u$ continue sur $]0,\pi[$. En déduire que la suite $(x_n)$ converge simplement vers une fonction $x$ continue sur $]0,\pi[$.

I.B.5) Montrer que la fonction $u$ se prolonge en une fonction paire (que l'on appellera encore $u$) de $C_{2\pi}$ dont on déterminera la série de Fourier.

I.B.6) Calculer $z_n(t)$ pour $n \geq 0$, $t \in ]0,\pi[$ et étudier la limite simple de cette suite de fonctions sur $]0,\pi[$.

## *Partie II* - Étude de quelques propriétés de la fonction $x$

**II.A -** Calculer $x(\pi/4)$, $x(\pi/3)$, $x(\pi/2)$ ; montrer que $x(\pi - t) = x(t)$, $t \in [0, \pi[$.

**II.B -**

II.B.1) On pose pour $n \geq 1$, $t \in ]0,\pi[$,

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k 2^k \sin^2\left(\frac{t}{2^k}\right) .$$

Montrer que, pour $n \geq 1$ ,

$$\forall t \in ]0,\pi[\ ,\ 2^n u\left(\frac{t}{2^n}\right) = (-1)^n (u(t) + \varphi_n(t)) .$$

II.B.2) Montrer que la suite $(\varphi_n)$ converge simplement sur $]0,\pi[$ vers une fonction $\varphi$ de classe $C^1$.

**II.C -**

II.C.1) Montrer que les suites

$$\alpha_n = 2^{-2n} x\left(\frac{\pi}{2^{2n+2}}\right) , \beta_n = 2^{-(2n+1)} x\left(\frac{\pi}{2^{2n+3}}\right) \text{ sont convergentes :}$$

déterminer leurs limites puis une valeur approchée de celles-ci à $10^{-3}$ près.

II.C.2) Montrer que $\lim_{n\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2^{2n}}\right) = -\infty$ , $\lim_{n\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2^{2n+1}}\right) = +\infty$ et qu'il existe une suite de nombres $t_n \in ]0,\pi[$ convergeant vers $0$ telle que $x(t_n) = 0$ .

## *Partie III* - Séries de Fourier lacunaires

Soit $N \in \mathbb{N}$ . On pose $D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}$ et $I_N = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)^4 dt$ .

**III.A -**

III.A.1) Montrer que : $\forall t \in ]-\pi\ ,\ \pi\ [\backslash\{0\}\ ,\ D_N(t) = \dfrac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ .

III.A.2) Montrer que : $I_N \geq \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^4\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{t^4} dt$

et en déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $\forall N \geq 0$ , $I_N \geq CN^3$ .

**Dans toute la suite de la Partie III, $a = (a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de nombres complexes telle que $\sum_{n\geq 0} |a_n| < +\infty$ .**

**III.B -**

III.B.1) Pour $n \geq 0$ , $t \in \mathbb{R}$ on pose $v_n(t) = 2a_n \cos 2^n t$ .

Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $v \in C_{2\pi}$ dont on déterminera la série de Fourier.

**Désormais $v$ désigne cette fonction (associée à la suite $a$) et $t_0$ un réel tel que $v$ est dérivable en $t_0$ (on suppose l'existence d'un tel $t_0$).**

Si $n_0 \in \mathbb{N}^*$, on définit $H_{n_0}(t) = e^{-i2^{n_0}(t+t_0)}[v(t+t_0) - v(t_0)\cos t - v'(t_0)\sin t]$.

III.B.2) Montrer que $H_{n_0} \in C_{2\pi}$ et que $H_{n_0}$ est dérivable en $0$. Calculer $H_{n_0}(0)$ et $H'_{n_0}(0)$.

III.B.3) Calculer $\hat{H}_{n_0}(0)$ à l'aide de la suite $a$ et montrer que $\hat{H}_{n_0}(k) = 0$ si $k \in \mathbb{Z}^* \cap [-2^{n_0-1}+1, 2^{n_0}-1]$.

**III.C -** On suppose désormais $n_0 \geq 6$. Soit $N = 2^{n_0-4}$ et $g_N(t) = I_N^{-1} D_N(t)^4$.

III.C.1) Montrer que pour tout nombre entier $j$ tel que $-4N \leq j \leq 4N$, il existe $\alpha_j$ tel que :

$$\alpha_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R},\ g_N(t) = \sum_{j=-4N}^{4N} \alpha_j e^{ijt}.$$

III.C.2) Calculer

$\int_{-\pi}^{\pi} H_{n_0}(t) g_N(t) dt$ à l'aide de la suite $a$.

**III.D -** On pose $K(t) = \left|\frac{H_{n_0}(t)}{t}\right|$ si $t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$, $K(t) = 0$ si $t = 0$ ou $|t| > \pi$ (noter que la fonction $K$ ne dépend pas de $n_0$).

III.D.1) Montrer que $K$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Étudier sa limite en $0$.

III.D.2) Montrer qu'il existe $C' > 0$ telle que

$$2^{n_0}|a_{n_0}| \leq C' \int_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{t}{N+\frac{1}{2}}\right) \frac{\sin^4 t}{|t|^3} dt.$$

III.D.3) Étudier la limite de la suite $(2^n a_n)_{n \geq 0}$.

## *Partie IV -*

Utiliser les résultats des parties I et III pour montrer que la fonction $x$ définie en Partie I n'est dérivable en aucun point de $]0,\pi[$.

**••• FIN •••**

# Prepa Help

prepahelp.com · classes préparatoires, Maroc et France

## Travailler les chapitres de ce su

Prepa Help suit le programme de PC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta

s

mériques

rielles

### Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bou

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur

**écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/pc