Concours Centrale-Supélec, France

Session 2002, filière PC

Mathématiques 2

Ce que traite le sujet

- Partie I : étude dans un espace euclidien orienté de dimension 3
- Partie II : recherche des plans stables

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/pc/2002/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

MATHÉMATIQUES II

Le but du problème est la recherche des plans stables par un endomorphisme, en relation avec la notion de produit vectoriel

Dans tout le problème,

- les espaces vectoriels $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^6$ sont munis de leur produit scalaire canonique et orientés par leur base canonique,
- on désigne par $\langle x, y\rangle$ ou $x \cdot y$ le produit scalaire de deux vecteurs x, y d'un espace vectoriel euclidien, par $\|.\|$ la norme associée,
- on désigne par $\wedge$ le produit vectoriel défini pour un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

Les vecteurs dans les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ sont notés en colonnes, mais on leur préférera la notation ${}^t(\ldots)$, transposée d'une ligne, lorsqu'ils seront de grande taille.

Partie I - Étude dans E euclidien orienté de dimension 3

On considère dans cette partie $E = \mathbb{R}^3$ espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ orthonormale directe. Si u est dans $\mathscr{L}(E)$ on définit $\widetilde{u}$, endomorphisme de E, par sa restriction à $\mathscr{B}$:

$$\begin{cases} \widetilde{u}(e_1) = u(e_2) \wedge u(e_3) \\ \widetilde{u}(e_2) = u(e_3) \wedge u(e_1) \\ \widetilde{u}(e_3) = u(e_1) \wedge u(e_2) \end{cases}$$

I.A - Dans cette question on considère les endomorphismes $u_1, u_2 \in \mathscr{L}(E)$, de matrices respectives U_1 et U_2 dans la base $\mathscr{B}$:

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer $\widetilde{U}_1$ et $\widetilde{U}_2$, matrices respectives dans la base $\mathscr{B}$ de $\widetilde{u}_1$ et $\widetilde{u}_2$.

Filière PC

I.B - Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\forall (x,y) \in E^2$, $\widetilde{u}(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y)$. Montrer que si v dans $\mathscr{L}(E)$ vérifie $\forall (x,y) \in E^2$, $v(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y)$, alors $v = \widetilde{u}$.

I.C - Déterminer $\widetilde{Id}_E$.
Si u et v sont dans $\mathscr{L}(E)$, montrer que $u \widetilde{\circ} v = \widetilde{u} \circ \widetilde{v}$.
Si u est inversible, en conclure que $\widetilde{u}$ est inversible et en exprimer l'inverse.

I.D - Si u appartient à $\mathscr{L}(E)$ et a comme matrice U dans la base $\mathscr{B}$, exprimer la matrice $\widetilde{U}$ de $\widetilde{u}$ dans la base $\mathscr{B}$ en fonction de $\mathrm{com}(U)$, comatrice de la matrice U.
Montrer que $u^* \circ \widetilde{u} = \det(u) Id_E$ où u^* désigne l'adjoint de u.

Montrer que $\widetilde{u}$ et u^* commutent.

Montrer que $\widetilde{u}^* = (\widetilde{u})^*$.

I.E - On considère toujours u dans $\mathscr{L}(E)$.
I.E.1) Dans le cas où u est inversible, déterminer une expression de $\det(\widetilde{u})$ en fonction de $\det(u)$, et de $(\widetilde{u})^{-1}$ en fonction de u^* et de $\det(u)$.
I.E.2) Dans le cas où u n'est pas inversible, déterminer $\mathrm{Ker}(\widetilde{u})$ puis $\det(\widetilde{u})$.

I.F - Préciser le rang de $\widetilde{u}$ selon la valeur de celui de u. L'application de $\mathscr{L}(E)$ dans lui-même qui à u associe $\widetilde{u}$ est-elle : linéaire ? injective ? surjective ?

Partie II - Recherche des plans stables par u endomorphisme de E

On conserve dans cette partie les notations de la précédente.

II.A - Soit u dans $\mathscr{L}(E)$ et $P = \mathrm{Vect}(x,y)$ un **plan** stable par u.
Montrer que $x \wedge y$ est vecteur propre de $\widetilde{u}$; exprimer la valeur propre associée à $x \wedge y$ à l'aide de $u|_P$.

II.B - Inversement, soit z un vecteur propre de norme 1 de $\widetilde{u}$.
Montrer qu'il existe (x,y) famille orthonormale dans E telle que $x \wedge y = z$.

Si la valeur propre associée à z est non nulle, montrer que $P = \mathrm{Vect}(x,y)$ est stable par u. On pourra remarquer que (x, y, z) est une base orthonormale directe de E et effectuer des calculs dans cette base.

II.C - Soit u dans $\mathscr{L}(E)$. Montrer que 0 est valeur propre de u si, et seulement si, 0 est valeur propre de $\widetilde{u}$. Montrer que, pour tout réel λ, les plans stables par u sont les plans stables par $u - \lambda Id_E$. En déduire un moyen pour obtenir les plans stables par u dans $\mathscr{L}(E)$ n'ayant pas 0 comme valeur propre, puis par u quelconque dans $\mathscr{L}(E)$.

II.D - Appliquer cette méthode à la recherche des plans respectivement stables par les deux endomorphismes u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^3$ définis à la question I.A.

Certaines démonstrations dans les parties qui suivent sont analogues à celles demandées dans les deux précédentes et, de ce fait, certains résultats seront admis.

Partie III - Définition et étude d'un produit vectoriel de $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^6$

On munit $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ de leurs structures euclidiennes canoniques et on les oriente grâce à leurs bases canoniques.

À un vecteur

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ de } \mathbb{R}^4, \text{ on associe } l(X) = x_1 \text{ et } L(X) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix},$$

de sorte que l'on écrira, par blocs,

$$X = \begin{pmatrix} l(X) \\ L(X) \end{pmatrix}.$$

On définit alors, pour X et Y dans $\mathbb{R}^4$, $X \times Y$ comme suit :

si $X = \begin{pmatrix} a \\ \xi \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a' \\ \xi' \end{pmatrix}$, où $a, a' \in \mathbb{R}$ et $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^3$, alors $X \times Y$ est le

vecteur de $\mathbb{R}^6$ défini par les blocs $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, avec $A = a\xi' - a'\xi$ et $B = \xi \wedge \xi'$,

ce dernier produit vectoriel étant le produit vectoriel canonique de $\mathbb{R}^3$.

On admettra sans démonstration que $\times$ est une application bilinéaire antisymétrique de $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^6$.

III.A - Trouver une condition nécessaire et suffisante sur X et Y dans $\mathbb{R}^4$ pour que $X \times Y = 0$.

Soient p et p' les applications linéaires de $\mathbb{R}^6$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_6 \end{pmatrix} \text{ associent respectivement}$$

$$p(\Sigma) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_3 \end{pmatrix} \text{ et } p'(\Sigma) = \begin{pmatrix} \xi_4 \\ \vdots \\ \xi_6 \end{pmatrix}.$$

III.B - Soit Σ dans $\mathbb{R}^6$, de la forme $X \times Y$, où X et Y sont dans $\mathbb{R}^4$; montrer que

$$\langle p(\Sigma), p'(\Sigma) \rangle = 0 \quad (\mathscr{C})$$

III.C - Soit, inversement, Σ dans $\mathbb{R}^6$ vérifiant $(\mathscr{C})$; on pose $A = p(\Sigma)$ et $B = p'(\Sigma)$.

III.C.1) Si $B \neq 0$ et si C dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ vérifient $C \cdot B = 0$, trouver tous les X, Y dans $\mathbb{R}^4$ tels que $X \times Y = \Sigma$ et $L(X) = C$.

III.C.2) Exemple : si $\Sigma = {}^t(2 \;\; 2 \;\; 4 \;\; 4 \;\; 0 \;\; -2)$ et $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, déterminer tous les X, Y correspondants.

III.C.3) Si $B \neq 0$, décrire tous les X, Y dans $\mathbb{R}^4$ tels que $X \times Y = \Sigma$.

III.C.4) Enfin, si $B = 0$, décrire tous les X, Y dans $\mathbb{R}^4$ tels que $X \times Y = \Sigma$. Si $\Sigma \neq 0, B = 0$ et $X \times Y = \Sigma$, donner une description simple de $\mathrm{Vect}(X, Y)$ à l'aide notamment de A.

III.D - Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur a, a', ξ, ξ', pour que la famille (X, Y) définie par

$$X = \begin{pmatrix} a \\ \xi \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} a' \\ \xi' \end{pmatrix}$$

soit orthonormale dans $\mathbb{R}^4$. Dans ce cas, exprimer $\|a\xi' - a'\xi\|^2$ et $\|\xi \wedge \xi'\|^2$ en fonction de (a, a') seulement. En déduire que $\|X \times Y\|^2 = 1$.

III.E - Soit X, Y, Z, T dans $\mathbb{R}^4$ tels que $X \cdot T = Y \cdot T = 0$. Simplifier l'expression $(X \times Y) \cdot (Z \times T)$.

On pourra utiliser la formule suivante, valable pour ξ, ξ', ξ'', ξ''' vecteurs dans $\mathbb{R}^3$,

$$(\xi \wedge \xi') \cdot (\xi'' \wedge \xi''') = (\xi \cdot \xi'')(\xi' \cdot \xi''') - (\xi \cdot \xi''')(\xi' \cdot \xi'')$$

III.F - En déduire que si $(e_1, ..., e_4)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$, alors $\widetilde{\mathscr{B}} = (e_i \times e_j)_{1 \leq i < j \leq 4}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^6$. Déterminer $\widetilde{\mathscr{B}}$ lorsque $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Partie IV - Endomorphisme $\widetilde{u}$ de $\mathbb{R}^6$ associé à un endomorphisme u de $\mathbb{R}^4$ et détermination des plans stables par u

Si u est dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$, on admet qu'il existe un unique $\widetilde{u}$ dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^6)$ tel que l'on ait

$$\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^4)^2, \quad \widetilde{u}(X \times Y) = u(X) \times u(Y)$$

On admet également que $u \widetilde{\circ} v = \widetilde{u} \circ \widetilde{v}$, pour u et v dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$.

IV.A - Si u est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^4$, montrer que $\widetilde{u}$ est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^6$; on pourra utiliser **III.F.**

IV.B - Si u est un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^4$, justifier l'existence d'une base orthonormale directe $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ formée de vecteurs propres de u associés à des valeurs propres notées $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$; exprimer alors la matrice de $\widetilde{u}$ dans la base $\widetilde{\mathscr{B}}$ et en déduire que $\widetilde{u}$ est autoadjoint.

On admet que, pour tout endomorphisme u de $\mathbb{R}^4$, il existe s et w, endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ respectivement autoadjoint et orthogonal et tels que $u = s \circ w$.

IV.C - Montrer que, pour tout u dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$, $\widetilde{u}^* = (\widetilde{u})^*$.

IV.D - Soit u dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ et $P = \mathrm{Vect}(X, Y)$ un plan vectoriel stable par u ; montrer que $X \times Y$ est un vecteur propre de $\widetilde{u}$.

IV.E - Exemple : on donne u dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ défini par

$$X \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X$$

IV.E.1) Déterminer u^2 ; u a-t-il des vecteurs propres ?

IV.E.2) Soit X un vecteur non nul de $\mathbb{R}^4$. Montrer que $P = \mathrm{Vect}(X, u(X))$ est un plan stable par u. Montrer qu'inversement tout plan stable par u est de cette forme.

IV.E.3) Si $X = {}^t(x, y, z, t)$ est non nul dans $\mathbb{R}^4$, déterminer par ses composantes dans la base canonique le vecteur propre $\varphi(X) = X \times u(X)$ de $\widetilde{u}$ ainsi obtenu.

IV.E.4) Montrer que $(\widetilde{u})^2 = Id_{\mathbb{R}^6}$ et vérifier que deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^6$ sont des vecteurs propres de $\widetilde{u}$.

IV.E.5) Déterminer la matrice $\widetilde{M}$ de $\widetilde{u}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^6$; on pourra exprimer $\widetilde{u}(X \times Y)$ pour $X = {}^t(x, y, z, t)$ et $Y = {}^t(x', y', z', t')$ quelconques dans $\mathbb{R}^4$.

IV.E.6) La matrice $\widetilde{M}$ est-elle diagonalisable ?

IV.E.7) Déterminer les ensembles

$$E_{+1} = \left\{\Sigma \in \mathbb{R}^6, \quad \widetilde{M}\Sigma = \Sigma\right\} \text{ et } E_{-1} = \left\{\Sigma \in \mathbb{R}^6, \quad \widetilde{M}\Sigma = -\Sigma\right\}.$$

En déduire les valeurs propres de $\widetilde{M}$ ainsi que leurs ordres de multiplicité.

IV.E.8) Vérifier que, dans E_{-1}, seul le vecteur nul satisfait à $(\mathscr{C})$.

IV.E.9) Vérifier que, dans E_{+1}, le vecteur Σ satisfait à $(\mathscr{C})$ si, et seulement si, il est de la forme ${}^t(a, b, c, d, -b, -c)$, où $ad = b^2 + c^2$.

IV.E.10) Vérifier que tous les vecteurs de la forme $\varphi(X)$ obtenus en IV.E.3 sont bien de cette forme.

••• FIN •••

Prepa Help

prepahelp.com · classes préparatoires, Maroc et France

Travailler les chapitres de ce su

Prepa Help suit le programme de PC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bou

s et endomorphismes des

prepahelp.com/#essai

éaire

ismes et des matrices

Une question sur le concours ou sur

écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/pc