Concours Centrale-Supélec, France

Session 2005, filière PC

Mathématiques 2

Ce que traite le sujet

- Partie I : étude du cas n = 2
- Partie II : étude du cas général
- Partie III : un exemple en dimension 3

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/pc/2005/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

MATHÉMATIQUES II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit A une matrice carrée d'ordre n, dont les coefficients sont des entiers naturels. On note a_{ij} le coefficient de A appartenant à la i-ème ligne et à la j-ème colonne de A.

On suppose que A est *symétrique* et que les coefficients de la diagonale principale de A sont égaux à 1.

On désigne par M la matrice réelle, carrée, d'ordre n, de coefficient m_{ij}, définie par :

$$m_{ij} = \begin{cases} -\cos\left(\dfrac{\pi}{a_{ij}}\right) & \text{si} \quad a_{ij} \neq 0 \\ -1 & \text{si} \quad a_{ij} = 0 \end{cases}$$

On remarque que M est symétrique et que les coefficients de sa diagonale principale valent 1.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et $\mathscr{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ une base donnée de E.

Pour chaque entier i compris entre 1 et n, on désigne par σ_i l'endomorphisme de E caractérisé par :

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \sigma_i(e_j) = e_j - 2m_{ij}e_i .$$

On note τ l'endomorphisme de E donné par :

$$\tau = \sigma_1 \circ \sigma_2 \ldots \circ \sigma_n .$$

où $\circ$ désigne la composition des applications.

On désigne par S_i et T les matrices associées aux endomorphismes σ_i et τ dans la base $\mathscr{B}$ et par I la matrice unité d'ordre n associé à l'identité (notée Id).

Partie I - Étude du cas $n = 2$

Dans cette partie I, on suppose $n = 2$ et on pose :

$$a = a_{12} = a_{21} \text{ et } m = m_{12} = m_{21} .$$

I.A -

I.A.1) Expliciter M en fonction de m puis en fonction de a.

I.A.2) Donner en fonction de m les matrices S_1, S_2 et T.

Filière PC

I.B - On suppose dans cette question I.B que $a \in \{0,1\}$ et donc que $|m| = 1$.

I.B.1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de τ

I.B.2) La matrice T est-elle diagonalisable ? (Justifier la réponse).

I.B.3) Diagonaliser ou trigonaliser, si possible, la matrice T.

I.B.4) Montrer que τ est d'ordre infini (c'est à dire qu'il n'existe pas d'entier naturel strictement positif k tel que $\tau^k = Id$, où $\tau^k = \tau \circ \tau \circ \ldots \tau$ désigne la puissance k-ième de τ pour la loi de composition).

I.C - On suppose dans cette question I.C, que a est supérieur ou égal à 2, et donc que $|m| < 1$.

On définit la forme bilinéaire ϕ sur $E \times E$ par :

$\phi(xe_1 + ye_2, x'e_1 + y'e_2) = xx' + yy' + m(xy' + yx')$, pour tous x, x', y, y' réels.

I.C.1) Montrer que ϕ est un produit scalaire.

Muni de ce produit scalaire, E est un plan euclidien, que nous noterons aussi E.

I.C.2) Pour quelle valeur de a la base $\mathscr{B}$ est-elle orthonormale ?

I.C.3) Montrer que les sous-espaces propres de σ_1 sont orthogonaux.

I.C.4) Montrer que σ_1 et σ_2 sont des symétries orthogonales en précisant par rapport à quelles droites vectorielles.

I.C.5) Montrer que τ est une rotation et déterminer une mesure en radians de l'angle de cette rotation, en supposant la base $\mathscr{B}$ directe.

I.C.6) En déduire que τ est d'ordre a, c'est-à-dire que a est le plus petit entier strictement positif k tel que $\tau^k = Id$.

I.D - On suppose dans cette question que $a \in \{2, 3, 4, 6\}$.

I.D.1) Dans chacun des cas $a = 2, 3, 4, 6$, déterminer un réel μ_a, $1 \leq \mu_a < 2$, tel que les matrices associées à σ_1 et σ_2 relativement à la base $(e_1, \mu_a e_2)$, aient tous leurs coefficients dans $\mathbb{Z}$.

I.D.2) Dans chacun des cas $a = 2, 3, 4, 6$, faire une figure soignée où l'on indiquera e_1 et $f_2 = \mu_a e_2$, ainsi que leurs images par σ_1 et σ_2. On représentera le plan euclidien E de façon usuelle, c'est-à-dire que des vecteurs orthogonaux seront représentés par des flèches perpendiculaires et des vecteurs de même norme par des flèches de même longueur.

Partie II - Étude du cas général

Dans cette partie n désigne un entier quelconque supérieur ou égal à 2.

II.A -

II.A.1)

a) Pour i compris entre 1 et n, calculer $\sigma_i(e_i)$.

b) Exprimer $\sigma_i^2 = \sigma_i \circ \sigma_i$ en fonction de l'identité.

c) Montrer que $E = \mathrm{Ker}\,(\sigma_i - Id) \oplus \mathrm{Ker}\,(\sigma_i + Id)$.

II.A.2) On pose $\varepsilon_1 = e_1$ et, pour tout $k \in \{2, \ldots, n\}$, $\varepsilon_k = \sigma_1 \circ \sigma_2 \ldots \sigma_{k-1}(e_k)$.

a) Montrer par récurrence sur $i < k$, que, pour tout $k \in \{2, \ldots, n\}$, on a :

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 \ldots \sigma_i(e_k) = e_k - 2 \sum_{1 \le j \le i} m_{jk} \varepsilon_j .$$

b) Vérifier que la famille $\mathscr{F} = (\varepsilon_i)_{1 \le i \le n}$ est une base de E.

II.A.3)

a) Exprimer $\tau(e_n)$ en fonction de ε_n.

b) Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ on a :

$$\tau(e_k) = -\varepsilon_k - 2 \sum_{j=k+1}^{n} m_{jk} \varepsilon_j .$$

II.A.4) Soit C la matrice carrée d'ordre n, triangulaire supérieure, dont les coefficients c_{ij} sont donnés par :

$$c_{ij} = \begin{cases} 2m_{ij} & \text{si} \quad i < j \\ 0 & \text{si} \quad i \ge j \end{cases}$$

On notera ${}^tC$ la matrice transposée de la matrice C.

On désigne par P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{F}$.

a) Exprimer P^{-1} en fonction de C.

b) Montrer que :

$$T = -(I + C)^{-1}(I + {}^tC) .$$

c) En déduire que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\det(\lambda I - T) = \det((\lambda + 1)I + \lambda C + {}^tC) .$$

II.B - Soient i, j vérifiant : $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $i \neq j$; on note E_{ij} le sous-espace vectoriel de E engendré par e_i et e_j.

II.B.1)

a) Montrer que $\dim E_{ij} = 2$.

b) Montrer que E_{ij} est stable par σ_i, σ_j, $\sigma_i \circ \sigma_j$ et $\sigma_j \circ \sigma_i$.

On note π_{ij} et π_{ji} les restrictions de $\sigma_i \circ \sigma_j$ et $\sigma_j \circ \sigma_i$ à E_{ij}.

c) Donner les matrices Π_{ij} et Π_{ji} associées à π_{ij} et π_{ji} relativement à la base (e_i, e_j) de E_{ij}.

d) Vérifier que Π_{ij} et Π_{ji} sont inverses l'une de l'autre. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

II.B.2)

a) Montrer que, si pour tous i et j on a $a_{ij} \in \{0,1\}$, alors π_{ij} et π_{ji} sont d'ordre infini.

b) Quels sont les ordres de π_{ij} et π_{ji} lorsque $a_{ij} \geq 2$?

II.C - On suppose dans cette section que :

i) $n \geq 3$

ii) $a_{ij} = 2$ pour $1 < |i - j| < n - 1$

iii) $\{a_{12}, a_{23}, \ldots, a_{(n-1)n}, a_{n1}\} \subset \{3, 4, 6\}$.

On pose $\beta_n = 2m_{1n}$ et $\beta_i = 2m_{i(i+1)}$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

On désigne par p (resp. q) le nombre de couples (i,j), $i < j$, tels que $a_{ij} = 4$ (resp. $a_{ij} = 6$).

II.C.1) Montrer que si p et q sont pairs, alors il existe un n-uplet de réels $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ tel que les matrices de tous les σ_k, pour $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, relativement à la base $(\nu_1 e_1, \nu_2 e_2, \ldots, \nu_n e_n)$, ont leurs coefficients dans $\mathbb{Z}$.

II.C.2) $\det(\lambda I - T)$ est un polynôme réel en λ, de degré n, que l'on écrira $\det(\lambda I - T) = \sum \alpha_k \lambda^k$.

a) Justifier que $\alpha_n = 1$ et $\alpha_{n-1} = -\operatorname{tr} T$, où $\operatorname{tr} T$ désigne la trace de T.

b) Calculer, pour $n = 3$, $\det(\lambda I - T)$ en fonction de λ, β_1, β_2 et β_3.

c) Montrer que

$$\alpha_{n-1} = n - \sum_{1 \leq i \leq n} \beta_i^2 + (-1)^{n+1} \beta_1 \ldots \beta_n$$

(on pourra utiliser la question II.A.4 et démontrer la relation par récurrence sur n).

II.C.3)

a) Montrer que, s'il existe une base de E dans laquelle toutes les matrices des σ_k ont tous leurs coefficients entiers, alors la trace de τ est un entier.

b) Montrer que si p est impair ou q est impair, alors la trace de τ est irrationnelle.

c) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de tous les σ_k ont tous leurs coefficients entiers si et seulement si p et q sont pairs.

Partie III - Un exemple dans le cas de $n = 3$

On suppose dans cette partie que $n = 3$ et que :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

III.A - Peut-on trouver une base de E dans laquelle les matrices de σ_1 , σ_2 et σ_3 ont tous leurs coefficients entiers ?

III.B - On définit la forme bilinéaire Φ sur $E \times E$ par :

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^{3} x_i e_i, \sum_{j=1}^{3} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} m_{ij} x_i y_j$$

pour tous x_1 , x_2 , x_3 , y_1 , y_2 , y_3 réels.

III.B.1) Vérifier que Φ est un produit scalaire.

On considérera donc E comme un espace vectoriel euclidien muni de ce produit scalaire.

III.B.2) Donner une équation cartésienne de l'orthogonal, pour Φ , du vecteur $ae_1 + be_2 + ce_3$ en fonction de a , b , c .

III.C -

III.C.1) Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, déterminer les sous-espaces $F_i = \text{Ker}\,(\sigma_i - Id)$ et $G_i = \text{Ker}\,(\sigma_i + Id)$.

III.C.2) En déduire que les σ_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, sont des symétries orthogonales par rapport à des plans (ou réflexions) de E.

III.D - Montrer que les $\sigma_i \circ \sigma_j$, pour $1 \leq i$, $j \leq 3$, sont des rotations et les caractériser.

III.E -

III.E.1) Que peut-on dire de $\tau = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$?

III.E.2) Déterminer la matrice T.

Déterminer un vecteur non nul u de norme 1 tel que $\tau(u) = -u$, puis une base directe de E, de premier vecteur u, orthonormale pour Φ, $\mathscr{D} = (u, v, w)$.

III.E.3) Montrer que τ est la composée d'une rotation d'axe $\mathbb{R}u$, dont on précisera l'angle et de la symétrie orthogonale par rapport au plan $(\mathbb{R}u)^{\perp}$.

Donner l'ordre de la matrice T, c'est-à-dire le plus petit entier $k > 0$ tel que $T^k = I$.

••• FIN •••

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Compléments d'algèbre linéaire
- Nombres complexes et trigonométrie

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/pc