Concours Centrale-Supélec, France

# Session 2008, filière PC

## Mathématiques 1

### Ce que traite le sujet

- Partie I
- Partie II
- Partie III
- Partie IV

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/pc/2008/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

# MATHÉMATIQUES I

***Objectifs***

On se propose, dans ce qui suit, de déterminer l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants lorsqu'elle est homogène, puis lorsque celle-ci admet un « second membre » d'un type particulier.

La partie I vise à établir des résultats utiles dans les suivantes.

***Notations***

- Pour tout couple $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ :
  - si $m\leq n$ l'ensemble $\{k\in\mathbb{N}, m\leq k\leq n\}$ est noté $[[m,n]]$ ;
  - $\delta_{m,n}$ vaut $1$ si $m=n$, $0$ sinon.
- Si $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, on note $\mathbb{C}_q[X]$ l'ensemble constitué des éléments de $\mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à $q$ et $\mathbb{C}_{q,p}[X]$ celui constitué des éléments de $\mathbb{C}_q[X]$ divisibles par $X^p$.
- Si $u$ est une application linéaire, $Ker(u)$ et $Im(u)$ désignent respectivement son noyau et son image.
- Si $u$ est un endomorphisme, par convention, $u^0$ est l'application identité, et pour tout entier naturel $p$, on pose $u^{p+1}=u\circ u^p$.
- On considère un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux éléments. On dira que l'intervalle $I$ est un voisinage de $0$ s'il existe un réel $\alpha>0$ tel que $[-\alpha,\alpha]\subset I$. On note $E$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications de classe $C^\infty$ de $I$ dans $\mathbb{C}$, $0_E$ son élément nul, $id_E$ l'application identité de $E$ et $D$ l'endomorphisme « dérivation » de $E$, c'est-à-dire tel que : $\forall f\in E, D(f)=f'$.
- Pour tout $y$ de $E$, et pour tout $k$ entier strictement positif, $y^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ième}}$ de $y$. Par convention $y^{(0)}=y$.
- Si $P\in\mathbb{C}[X]$ et $z\in\mathbb{C}$, on note $deg(P)$ le degré de $P$ et $P_{\langle z\rangle}$ l'application de $I$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $\forall t\in I,\ P_{\langle z\rangle}(t)=P(t)e^{zt}$.

# Filière PC

## *Partie I -*

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq q$.

**I.A -** Montrer que $\mathbb{C}_{q,p}[X]$ est un $\mathbb{C}$- espace vectoriel de dimension finie et préciser sa dimension.

**I.B -** Montrer qu'on peut définir une application $\varphi_z$ de $\mathbb{C}[X]$ dans $E$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad \varphi_z(P) = P_{\langle z \rangle}.$$

Montrer que $\varphi_z$ est linéaire et injective.

**I.C -** Déduire des questions précédentes que les images par $\varphi_z$ de $\mathbb{C}_q[X]$ et $\mathbb{C}_{q,p}[X]$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$ de dimensions finies que l'on précisera.

*Dans la suite de ce problème, $n$ est un entier naturel non nul, $\alpha = (\alpha_0, \ldots \alpha_n)$ un élément de $\mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\alpha_n$ n'est pas nul, et on note $(H)$ l'équation différentielle, d'inconnue $y$ élément de $E$ :*

$$(H) \qquad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k y^{(k)} = 0_E.$$

## *Partie II -*

On se propose, dans cette partie, de déterminer $S_H$, l'ensemble des solutions de $(H)$ définies sur $I$. On admettra que $\dim(S_H) = n$.

**II.A -** Justifier que $S_H = Ker\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k D^k\right)$.

On note $p$ le nombre de racines distinctes du polynôme $A = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ de $\mathbb{C}[X]$ ; on note $r_1, r_2 \ldots r_p$ ses racines et $m_1, m_2 \ldots m_p$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

**II.B -** Vérifier que $S_H$ contient le sous-espace vectoriel de $E$ :

$$\sum_{j=1}^{p} Ker((D - r_j \cdot id_E)^{m_j}).$$

On admettra que cette somme est directe.

**II.C -** Dans cette question, $r \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

a) Soit $P$ un élément non nul de $\mathbb{C}[X]$. Justifier l'existence d'un élément $Q$ de $\mathbb{C}[X]$ tel que $d^\circ Q < d^\circ P$ et $(D - r \cdot id_E)(P_{\langle r \rangle}) = Q_{\langle r \rangle}$.

b) En déduire par récurrence la propriété suivante pour tout entier $k$ de $[[1, m]]$ :

$$\text{si } P \in \mathbb{C}_{k-1}[X], \text{ alors } P_{\langle r \rangle} \in Ker((D - r \cdot id_E)^k).$$

c) En conclure que $Ker((D - r \cdot id_E)^m)$ est un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension au moins $m$.

**II.D -** Déduire de ce qui précède que, pour tout élément $y$ de $E$, on a l'équivalence suivante, $y \in S_H$ si et seulement si il existe une famille $(P_j)_{j \in [[1, p]]}$ d'éléments de $\mathbb{C}[X]$ telle que :

$$\forall j \in [[1, p]], \quad deg(P_j) < m_j \text{ et } \forall t \in I, \quad y(t) = \sum_{j=1}^{p} P_j(t) e^{r_j t}.$$

**II.E -** Dans le cas où $I$ est un voisinage de $0$, prouver que pour tout réel $\alpha$ strictement positif tel que $]-\alpha, \alpha[ \subset I$, les solutions de $(H)$ sont développables en série entière sur $]-\alpha, \alpha[$.

## *Partie III -*

Dans cette partie, on considère un polynôme $B$ de $\mathbb{C}[X]$, non nul. On note $d$ le degré du polynôme $B$. On choisit un nombre complexe $z$ et on note $m$ l'ordre de multiplicité (éventuellement nul) de $z$ en tant que racine du polynôme $A = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ de $\mathbb{C}[X]$.

On se propose de résoudre l'équation différentielle, d'inconnue $y$ élément de $E$, notée $(L)$ :

$$(L) \qquad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k y^{(k)} = B_{\langle z \rangle}.$$

**III.A -** Vérifier qu'on peut définir une application $\psi$, de $\mathbb{C}_{m+d,\,m}[X]$ dans $E$, définie par

$$\forall P \in \mathbb{C}_{m+d,\,m}[X], \quad \psi(P) = \left[\sum_{k=0}^{n} \alpha_k D^k\right](P_{\langle z\rangle})$$

puis montrer que celle-ci est linéaire.

**III.B -** Prouver que $\psi$ est injective et que $Im(\psi) \subset \varphi_z(\mathbb{C}_d[X])$.

**III.C -** Démontrer qu'il existe un unique élément $\Pi$ de $\mathbb{C}_{m+d,\,m}[X]$ tel que $\Pi_{\langle z\rangle}$ soit solution de $(L)$, définie sur $I$, puis préciser, en fonction de $\Pi$, l'ensemble des solutions de $(L)$ sur $I$.

**III.D -** Dans le cas où l'intervalle $I$ est un voisinage de $0$, les solutions de $(L)$ sont-elles développables en série entière sur tout intervalle $]-\alpha, \alpha[$ $(\alpha > 0)$ tel que $]-\alpha, \alpha[ \subset I$ ?

## *Partie IV -*

On suppose, dans cette dernière partie, que $\alpha_0$ vaut $1$ et que :

$$M = \max_{k \in [[0,\,n]]} |\alpha_k| \qquad .$$

On considère également un élément $b$ de $E$ et on note $(L_b)$ l'équation différentielle, d'inconnue $y$ élément de $E$ :

$$(L_b) \qquad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k y^{(k)} = b\,.$$

**IV.A -** Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $]-\alpha, \alpha[ \subset I$ et que $(L_b)$ admette une solution développable en série entière sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$.

Montrer que $b$ est également développable en série entière sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$. Qu'en est-il alors des autres solutions de $(L_b)$ ?

**IV.B -** Montrer que, si $p \in \mathbb{N}$, alors il existe un unique élément $\Pi_p$ de $\mathbb{C}_p[X]$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \Pi_p^{(k)} = \frac{X^p}{p!}\,.$$

Prouver qu'il existe un unique élément $(\pi_{p,\,j})_{j \in [[0,\,p]]}$ de $\mathbb{C}^{p+1}$ tel que :

$$\Pi_p = \sum_{j=0}^{p} \left(\pi_{p,\,j} \cdot \frac{X^j}{j!}\right).$$

**IV.C -** Prouver que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \quad q \leq p \Rightarrow \sum_{k=0}^{\min\{n,\, p-q\}} (\alpha_k \cdot \pi_{p,\,q+k}) = \delta_{p,\,q}$$

**IV.D -** Lorsque $p$ est un entier strictement positif, traduire sous forme matricielle le système linéaire précédent d'inconnue $(\pi_{p,\,j})_{j \in [[0,\,p]]}$, élément de $\mathbb{C}^{p+1}$, puis écrire une procédure qui, en fonction de $n$ et du système $\alpha$, détermine l'unique solution de celui-ci.

**IV.E -**

a) Vérifier que : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall j \in [[0, p]], \ |\pi_{p,\,p-j}| \leq (2M)^j$.

b) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout entier $q$, alors :

$$|\Pi_q(t)| \leq (2M+|t|)^q .$$

On suppose dorénavant que $b$ est une application de $I$ dans $\mathbb{C}$ développable en série entière sur un intervalle $]-\alpha, \alpha[$ $(\alpha > 0)$ inclus dans $I$. On note $r$ le rayon de convergence de la série entière $\sum b^{(n)}(0)\, z^n$ et on suppose que $r > 2M$.

**IV.F -**

a) Montrer qu'il existe $\beta$ élément de $]0, \alpha[$ tel que la suite de fonctions $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall t \in I, \ f_p(t) = \sum_{q=0}^{p} b^{(q)}(0)\Pi_q(t)$$

converge sur $]-\beta, \beta[$.

On note $f$ la limite de cette suite de fonctions, définie sur $]-\beta, \beta[$.

b) Prouver que $f$ est de classe $C^n$ sur $]-\beta, \beta[$.

**IV.G -** Justifier que $f$ est une solution de $(L_b)$ définie sur l'intervalle sur $]-\beta, \beta[$.

**IV.H -** Prouver que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $]-\beta, \beta[$ et que pour tout entier $k > 0$, on a :

$$\forall t \in ]-\beta, \beta[, \ f^{(k)}(t) = \lim_{p \to +\infty} f_p^{(k)}(t) .$$

**IV.I -** Si $t \in \mathbb{R}^+$, on note $E(t)$ sa partie entière.

On se propose, dans cette question, de démontrer que $f$ est développable en série entière sur $]-\beta,\beta[$. À cet effet, on introduit un élément $x$ de $]-\beta,\beta[$ puis, pour tout entier $p$ de $\mathbb{N}$, l'application $e_p$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad e_p(t) = \frac{f_p^{(E(t))}(0) \cdot x^{E(t)}}{[E(t)]!}.$$

a) Montrer que, si $p \in \mathbb{N}$, $e_p$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et préciser la valeur de son intégrale sur $\mathbb{R}^+$.

b) Exhiber une application $e$ en escalier de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ intégrable telle que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad |e_p(t)| \leq e(t).$$

c) Conclure.

**IV.J -**

a) Qu'en déduit-on pour les solutions de $(L_b)$ sur l'intervalle $]-\beta,\beta[$ ?

b) Les résultats précédents sont-ils encore valables si $\alpha_0$ n'est pas égal à $1$ ?

---

**••• FIN •••**

---

# Prepa Help

prepahelp.com · classes préparatoires, Maroc et France

## Travailler les chapitres de ce suje

Prepa Help suit le programme de PC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

### Chapitres liés à ce sujet

éaire

s, produits, binôme et systèmes

éaire

s

**Ouvrir l'essai gratuit**

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta fil

**écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/pc