Concours Centrale-Supélec, France

# Session 2019, filière PC

## Mathématiques 2

Durée : 4 heures

### Ce que traite le sujet

- Partie I : introduction d'une fonction auxiliaire
- Partie II : équivalent de alpha_(2n+1)
- Partie III : permutations alternantes

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/pc/2019/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

# Mathématiques 2

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC — PC — 2019

4 heures — Calculatrice autorisée

Le sujet est composée de trois parties.

Dans la partie I, on définit une suite $(\alpha_n)_n$ d'entiers naturels via le développement en série entière d'une fonction auxiliaire et on s'intéresse en particulier à la suite extraite $(\alpha_{2n+1})_n$ formée des termes de rang impair.

Dans la partie II, on détermine un équivalent, lorsque $n$ tend vers l'infini, de $\alpha_{2n+1}$ en faisant appel à des outils analytiques et notamment à la fonction zêta de Riemann.

Dans la partie III, on définit les permutations alternantes. On procède d'abord à leur dénombrement, avant de s'intéresser à des aspects probabilistes.

La partie II fait appel, très ponctuellement, à des résultats de la partie I. La partie III utilise des résultats des parties I et II.

## I Introduction d'une fonction auxiliaire

Soit l'intervalle $I = ]-\pi/2, \pi/2[$. On considère la fonction $f$ définie sur $I$ par

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x}.$$

On note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre $n$ de $f$ et, par convention, $f^{(0)} = f$.

### *I.A – Dérivées successives*

**Q 1.** Exprimer les dérivées $f'$, $f''$ et $f^{(3)}$ à l'aide des fonctions usuelles.

**Q 2.** Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$

On explicitera les polynômes $P_0$, $P_1$, $P_2$, $P_3$ et, pour tout entier naturel $n$, on exprimera $P_{n+1}$ en fonction de $P_n$ et $P_n'$.

**Q 3.** Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, le polynôme $P_n$ est unitaire, de degré $n$ et que ses coefficients sont des entiers naturels.

**Q 4.** Montrer

$$\forall x \in I, \qquad 2f'(x) = f(x)^2 + 1.$$

Pour tout entier naturel $n$, on pose $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$.

**Q 5.** Montrer $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad 2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}.$$

### *I.B – Développement en série entière*

On note $R$ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ et $g$ sa somme.

**Q 6.** À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0, \pi/2[, \qquad \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!} x^n \leqslant f(x).$$


BY-NC-SA

**Q 7.** En déduire la minoration $R \geqslant \pi/2$.

**Q 8.** Montrer

$$\forall x \in I, \qquad 2g'(x) = g(x)^2 + 1.$$

**Q 9.** Montrer

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = g(x).$$

Considérer les fonctions $\arctan f$ et $\arctan g$.

**Q 10.** En déduire que $R = \pi/2$.

### *I.C – Partie paire et partie impaire du développement en série entière*

**Q 11.** Justifier que toute fonction $h : I \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique sous la forme $h = p + i$ avec $p : I \to \mathbb{R}$ une fonction paire et $i : I \to \mathbb{R}$ une fonction impaire.

**Q 12.** En déduire

$$\forall x \in I, \qquad \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

On note $t$ la fonction définie sur $I$ par $t(x) = \tan(x)$.

**Q 13.** Pour tout entier naturel $n$, exprimer $t^{(n)}(0)$ en fonction des réels $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

**Q 14.** Rappeler, sans justification, l'expression de $t'$ en fonction de $t$.

**Q 15.** En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad \alpha_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1}\alpha_{2n-2k+1}.$$

## II Équivalent de $\alpha_{2n+1}$

### *II.A – La fonction zêta*

Pour tout $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

**Q 16.** Montrer que $\zeta$ est continue sur $]1, +\infty[$.

**Q 17.** Encadrer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ par deux intégrales et en déduire $\lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = 1$.

**Q 18.** Déterminer $C(s)$ tel que

$$\forall s \in ]1, +\infty[, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} = C(s)\,\zeta(s).$$

### *II.B – Une formule pour la fonction cosinus*

Pour tout entier naturel $n$ et tout réel $x$, on pose $I_n(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(2xt)(\cos t)^n \,\mathrm{d}t$.

**Q 19.** Montrer

$$\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right) I_n(x) = \frac{n-1}{n}\, I_{n-2}(x) \qquad \text{et} \qquad \left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right) \frac{I_n(x)}{I_n(0)} = \frac{I_{n-2}(x)}{I_{n-2}(0)}.$$


BY-NC-SA

**Q 20.** Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(\pi x) = \pi x\, \frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right).$$

**Q 21.** En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in ]0,1[, \qquad \cos(\pi x) = \frac{1}{2}\, \frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)}\, \frac{I_{2n}(0)}{I_{2n}(x)} \prod_{p=1}^{n} \left(1 - \frac{4x^2}{(2p-1)^2}\right).$$

### *II.C – Un autre développement de tangente*

Dans toute cette sous-partie II.C, on pose $J = [0, 1/2[$ et, pour tout entier naturel $n$ et tout réel $x$ de $J$,

$$S_n(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2^{2p+1} x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}} \right).$$

**Q 22.** Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall s \in ]1, +\infty[, \qquad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} \leqslant \frac{1}{2(s-1)}\, \frac{1}{(2n-1)^{s-1}}.$$

**Q 23.** Justifier que, pour tout entier naturel $n$, la fonction $S_n$ est définie sur $J$.

**Q 24.** Montrer que la suite $(S_n)$ converge simplement sur $J$ vers la fonction nulle.

**Q 25.** En dérivant $x \mapsto \ln(\cos(\pi x))$, montrer

$$\forall x \in J, \qquad \pi \tan(\pi x) = -\frac{2I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{8x}{(2k-1)^2}\, \frac{1}{1 - \dfrac{4x^2}{(2k-1)^2}}.$$

**Q 26.** Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in J, \qquad \pi \tan(\pi x) + S_n(x) = -\frac{2I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + \sum_{p=1}^{+\infty} 2(2^{2p} - 1)\zeta(2p)\, x^{2p-1}.$$

**Q 27.** Montrer l'inégalité $t\cos(t) \leqslant \sin(t)$, pour tout $t$ de $[0, \pi/2]$.

**Q 28.** En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in [0,1], \qquad 0 \leqslant -I'_n(x) \leqslant \frac{4x}{n} I_n(x)$$

puis, pour $x \in [0,1]$, la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{I'_n(x)}{I_n(x)}$.

**Q 29.** En déduire l'égalité

$$\forall x \in J, \qquad \pi \tan(\pi x) = \sum_{p=1}^{+\infty} 2\left(2^{2p} - 1\right) \zeta(2p)\, x^{2p-1}.$$

### *II.D – Un équivalent de $\alpha_{2n+1}$*

**Q 30.** Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_{2n+1} = \frac{2\left(2^{2n+2} - 1\right)(2n+1)!}{\pi^{2n+2}} \zeta(2n+2).$$

**Q 31.** En déduire un équivalent de $\alpha_{2n+1}$ lorsque $n$ tend vers l'infini.


BY-NC-SA

# III Permutations alternantes

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2 et soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une liste de $n$ nombres réels. On dit que la liste $(x_1, ..., x_n)$ est alternante montante si $(-1)^i(x_i - x_{i-1}) > 0$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$. On dit qu'elle est alternante descendante si $(-1)^i(x_i - x_{i-1}) < 0$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$.

Autrement dit, la liste $(x_1, ..., x_n)$ est alternante montante si elle vérifie les inégalités $x_1 < x_2 > x_3 < x_4 > \cdots$. Elle est alternante descendante si elle vérifie les inégalités inverses.

Par exemple, $(1, 5, 3, 11, 8, 9)$ est alternante montante car $1 < 5 > 3 < 11 > 8 < 9$ et $(7, 4, 5, 2, 12)$ est alternante descendante car $7 > 4 < 5 > 2 < 12$.

On dit qu'une permutation $\sigma$ de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ est alternante montante (respectivement alternante descendante) si la liste $(\sigma(1), ..., \sigma(n))$ est alternante montante (respectivement alternante descendante).

Par exemple, avec $n = 7$ et en représentant toute permutation $\sigma$ par la liste des images $(\sigma(1), ..., \sigma(7))$, on constate que $(1, 5, 4, 6, 2, 7, 3)$ représente une permutation alternante montante et $(3, 2, 6, 4, 7, 1, 5)$ une permutation alternante descendante.

### *III.A – Dénombrement des permutations alternantes*

**Q 32.** Déterminer les permutations alternantes montantes de $[\![1, n]\!]$ pour $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$.

**Q 33.** Montrer, pour tout $n \geqslant 2$, que le nombre de permutations alternantes montantes est égal au nombre de permutations alternantes descendantes.

Si $n \geqslant 2$, on note $\beta_n$ le nombre de permutations alternantes montantes de $[\![1, n]\!]$, et on convient que $\beta_0 = \beta_1 = 1$.

**Q 34.** Soient $k$ et $n$ deux entiers tels que $2 \leqslant k \leqslant n$ et $A$ une partie à $k$ éléments de $[\![1, n]\!]$. On considère les listes $(x_1, ..., x_k)$ constituées de $k$ éléments deux à deux distincts de $A$. Montrer que le nombre de ces listes qui sont alternantes montantes est égal à $\beta_k$.

Le nombre de celles qui sont alternantes descendantes est le même, mais on ne demande pas de le justifier.

**Q 35.** Montrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, $2\beta_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta_k \beta_{n-k}$.

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, dénombrer les permutations $\sigma$ alternantes (montantes ou descendantes) de $[\![1, n+1]\!]$ telles que $\sigma(k+1) = n+1$.

**Q 36.** En déduire que $\beta_n = \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

### *III.B – Permutations aléatoires*

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on munit l'ensemble $\Omega_n$ des permutations de $[\![1, n]\!]$ de la probabilité uniforme. On note $p_n$ la probabilité qu'une permutation dans $\Omega_n$ soit alternante montante. On convient de plus que $p_0 = p_1 = 1$.

**Q 37.** Montrer que la suite $(p_n)$ tend vers 0. Donner un équivalent de $p_{2n+1}$ quand $n$ tend vers l'infini.

On définit une variable aléatoire $M_n$ sur $\Omega_n$ en associant à toute permutation $\sigma \in \Omega_n$ l'entier $M_n(\sigma)$ tel que :

— $M_n(\sigma) = 2$ si $\sigma(1) > \sigma(2)$ ;
— $M_n(\sigma) = 3$ si $\sigma(1) < \sigma(2) < \sigma(3)$ ;
— $M_n(\sigma) = 4$ si $\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) > \sigma(4)$ ;
— ...
— $M_n(\sigma) = n + 1$ si $\sigma$ est alternante montante.

En d'autres termes, $M_n(\sigma) = k+1$, où $k$ est le plus grand entier tel que $(\sigma(1), ..., \sigma(k))$ soit alternante montante.

On note $\mathbb{E}(M_n)$ l'espérance de $M_n$.

**Q 38.** Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, montrer $\mathbb{P}(M_n > i) = p_i$.

**Q 39.** Exprimer $\mathbb{E}(M_n)$ en fonction de $p_0$, $p_1$, ..., $p_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(M_n) = \dfrac{\sin(1) + 1}{\cos(1)}$.

• • • FIN • • •


BY-NC-SA

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Séries entières
- Dérivabilité et convexité
- Techniques fondamentales de calcul en analyse
- Suites et séries de fonctions
- Intégrales dépendant d'un paramètre
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires
- Espaces probabilisés
- Variables aléatoires discrètes



## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/pc