Concours Centrale-Supélec, France

# Session 2020, filière PC

## Mathématiques 1

Durée : 4 heures

### Ce que traite le sujet

- Partie I : cas des matrices de taille 2 x 2
- Partie II : matrices symplectiques et orthogonales
- Partie III : généralités sur les matrices symplectiques
- Partie IV : réduction des matrices symétriques et symplectiques
- Partie V : cas des matrices antisymétriques

**Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.**

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/pc/2020/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

# Mathématiques 1

PC

2020

4 heures

Calculatrice autorisée

## *Étude de certaines matrices symplectiques*

L'objet du problème est de définir et étudier la notion de matrice symplectique, et d'établir des résultats de réduction dans certains cas particuliers.

**Vocabulaire et notations**

Dans tout le problème, $n$ désigne un entier naturel non nul et $J_n$ la matrice carrée de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par blocs par

$$J_n = \begin{pmatrix} 0_{n,n} & I_n \\ -I_n & 0_{n,n} \end{pmatrix}$$

où $0_{n,n}$ est la matrice nulle à $n$ lignes et $n$ colonnes et $I_n$ est la matrice identité de même taille.

Si $p$ et $q$ sont deux entiers naturels non nuls, la matrice transposée de toute matrice $M$ de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est notée $M^\top$.

On dit qu'une matrice $M$ de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est *symplectique* si et seulement si $M^\top J_n M = J_n$. On désigne par $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symplectiques de taille $2n \times 2n$.

On note $\mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle *forme bilinéaire* sur $E$ toute application $\psi$ définie sur $E \times E$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $Y \in E$,

$$X \mapsto \psi(X, Y) \qquad \text{et} \qquad X \mapsto \psi(Y, X)$$

soient toutes les deux linéaires sur $E$.

Soit $\psi$ une forme bilinéaire ; $\psi$ est dite *alternée* si et seulement si, pour tout $X \in E$, $\psi(X, X) = 0$ ; $\psi$ est dite *antisymétrique* si et seulement si, pour tout $(X, Y) \in E^2$, $\psi(X, Y) = -\psi(Y, X)$.

Si $i$ et $j$ sont deux entiers naturels, on note $\delta_{i,j}$ le nombre qui vaut 1 si $i = j$ et qui vaut 0 sinon.

On note $e_i$ la matrice colonne élémentaire dont le seul coefficient non nul vaut 1 et est placé sur la ligne numéro $i$.

On munit $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne associée, notée $\|\cdot\|$. En identifiant $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$, on a, pour tous $X$ et $Y$ dans $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$,

$$\langle X, Y \rangle = X^\top Y \qquad \text{et} \qquad \|X\|^2 = X^\top X.$$

Si $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, $X^\perp$ désigne l'orthogonal de $X$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $Y$ de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ tels que $\langle X, Y \rangle = 0$. Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, $F^\perp$ désignera l'orthogonal de $F$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ qui sont orthogonaux à tous les éléments de $F$.

Si $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, on notera $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres réelles de $A$.

Si $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et $\lambda$ est une de ses valeurs propres, on notera $E_\lambda$ le sous-espace propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$.

Soit $E$ un espace vectoriel et $X_1, ..., X_p$ des vecteurs de $E$. On note $\mathrm{Vect}(X_1, ..., X_p)$ l'espace vectoriel engendré par $X_1, ..., X_p$.

Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et $F$ une partie de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. On dit que $F$ est *stable* par $A$ si et seulement si, pour tout $X$ dans $F$, $AX$ est un élément de $F$.


BY-NC-SA

# I Cas des matrices de taille $2 \times 2$

**Q 1.** Dans cette question uniquement, $n$ est un entier naturel non nul quelconque. Déterminer $J_n^2$ et montrer que $J_n \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$.

Dans la suite de cette partie, $n = 1$.

**Q 2.** Montrer qu'une matrice de taille $2 \times 2$ est symplectique si et seulement si son déterminant est égal à 1.

**Q 3.** Soit $M$ une matrice orthogonale de taille $2 \times 2$. On note $M_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ les deux colonnes de $M$. Montrer l'équivalence

$$M \text{ est symplectique } \iff M_2 = -J_1 M_1.$$

**Q 4.** Soit $X_1 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de norme 1. Montrer que la matrice carrée constituée des colonnes $X_1$ et $-J_1 X_1$ est à la fois orthogonale et symplectique.

**Q 5.** Soit $M$ une matrice de taille $2 \times 2$ symétrique et symplectique. Montrer que $M$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont inverses l'une de l'autre. Montrer qu'il existe une matrice $P$ à la fois orthogonale et symplectique telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

**Q 6.** Déterminer les matrices de taille $2 \times 2$ à la fois antisymétriques et symplectiques et montrer qu'elles ne sont pas diagonalisables dans $\mathbb{R}$.

# II Cas des matrices symplectiques et orthogonales

Soit $K$ une matrice antisymétrique et $\varphi$ l'application de $\left(\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})\right)^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (X, Y) \in \left(\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})\right)^2, \qquad \varphi(X, Y) = X^\top K Y.$$

(On identifie de nouveau $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$.)

**Q 7.** Montrer que $\varphi$ est une forme bilinéaire sur $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$.

**Q 8.** En calculant de deux manières $\varphi(X, X)^\top$, montrer que $\varphi$ est alternée. Montrer de même que $\varphi$ est antisymétrique.

Dans toute la suite du sujet, $K = J_n$.

**Q 9.** Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ et pour tout $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{2n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, montrer l'égalité

$$\varphi(X, Y) = \sum_{k=1}^{n} (x_k y_{k+n} - x_{k+n} y_k).$$

**Q 10.** Montrer que pour tout $(i, j) \in \{1, ..., 2n\}^2$, $\varphi(e_i, e_j) = \delta_{i+n,j} - \delta_{i,j+n}$ (on pourra commencer par le cas où $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$ puis généraliser).

**Q 11.** Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, $J_n X \in X^\perp$ et calculer $\varphi(J_n X, X)$.

**Q 12.** Si $Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, on note $Y^{J_n}$ l'ensemble des vecteurs $Z$ de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ tels que $\varphi(Y, Z) = 0$. Montrer que $X^{J_n} = (J_n X)^\perp$.

**Q 13.** Soit $P$ une matrice symplectique et orthogonale dont les colonnes sont notées $X_1, ..., X_{2n}$. Montrer que, pour tout $(i, j) \in \{1, ..., 2n\}^2$,

$$\begin{cases} \|X_i\| = 1 \\ i \neq j \implies X_i \perp X_j \\ \varphi(X_i, X_j) = \delta_{i+n,j} - \delta_{i,j+n} \end{cases}$$

**Q 14.** Sous les mêmes hypothèses, montrer que, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $X_i^{J_n} = X_{i+n}^\perp$.

**Q 15.** Sous les mêmes hypothèses, montrer que, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $X_{i+n} = -J_n X_i$.

# III Quelques généralités sur les matrices symplectiques

**Q 16.** Montrer que le déterminant d'une matrice symplectique vaut soit 1 soit $-1$.

**Q 17.** Montrer que l'inverse d'une matrice symplectique est une matrice symplectique.

**Q 18.** Montrer que le produit de deux matrices symplectiques est une matrice symplectique. L'ensemble $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ ?


BY-NC-SA

# IV Réduction des matrices symétriques et symplectiques

Le but de cette partie est de montrer que, si $M \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ tel que $P^\top MP$ est diagonale de coefficients diagonaux $d_1, ..., d_{2n}$ avec pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $d_{k+n} = 1/d_k$.

### *IV.A – Propriété*

Soit $M \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.

**Q 19.** Montrer que si $\lambda$ est valeur propre de $M$, $1/\lambda$ est également valeur propre de $M$. Donner un vecteur propre associé.

**Q 20.** Soit $\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(M)$ et $p = \dim E_\lambda$. Soit $(X_1, ..., X_p)$ une base de $E_\lambda$. Montrer que $(J_nX_1, ..., J_nX_p)$ est une base de $E_{1/\lambda}$ et que

$$\dim(E_\lambda) = \dim(E_{1/\lambda}).$$

**Q 21.** Soient $Y_1, ..., Y_p$ des vecteurs de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. Soit $Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. Montrer l'implication

$$Y \in (\mathrm{Vect}(Y_1, ..., Y_p, J_nY_1, ..., J_nY_p))^\perp \implies J_nY \in (\mathrm{Vect}(Y_1, ..., Y_p, Y, J_nY_1, ..., J_nY_p))^\perp.$$

**Q 22.** Dans cette question $\lambda = 1$. Montrer que $E_1$ est de dimension paire et qu'il existe une base de $E_1$ orthonormée de la forme $(X_1, ..., X_p, J_nX_1, ..., J_nX_p)$ où $2p$ est la dimension de $E_1$.

**Q 23.** Qu'en est-il pour $E_{-1}$ ?

**Q 24.** Démontrer la propriété annoncée au début de la partie.

### *IV.B – Mise en application sur un exemple*

Dans la fin de cette partie, on note $A$ la matrice

$$A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 9 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

**Q 25.** Montrer que $A \in \mathcal{S}_4(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$.

**Q 26.** Construire une matrice orthogonale et symplectique $P$ telle que $P^\top AP$ soit diagonale.

# V Étude du cas des matrices antisymétriques

### *V.A – Un peu de théorie*

Soit $M \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$. Soit $m$ l'application linéaire canoniquement associée à $M$.

**Q 27.** Montrer l'égalité $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(M) = \emptyset$.

**Q 28.** Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ tel que $P^\top M^2 P$ soit diagonale de coefficients diagonaux $d_1, ..., d_{2n}$ avec pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $d_{k+n} = 1/d_k$.

Dans toute la suite de cette sous-partie, $X$ désigne un vecteur propre de $M^2$ de norme 1 associé à une certaine valeur propre $\lambda$.

**Q 29.** Montrer que $MX$, $J_nX$ et $J_nMX$ sont des vecteurs propres de $M^2$ et donner les valeurs propres associées à chacun de ces vecteurs.

**Q 30.** Dans cette question et dans la suite, on note $F = \mathrm{Vect}(X, MX, J_nX, J_nMX)$. Montrer que $F$ est stable par $M$ et par $J_n$.

**Q 31.** Montrer que toutes les valeurs propres de $M^2$ sont strictement négatives.

**Q 32.** Justifier que si $\lambda \neq -1$, $F$ est un espace vectoriel de dimension 4. Montrer que, dans ce cas,

$$\left(X, \frac{-1}{\sqrt{-\lambda}}MX, -J_nX, \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}J_nMX\right)$$

est une base orthonormée de $F$. Donner alors la matrice de l'application $m_F$ induite par $m$ sur $F$ dans la base obtenue.

**Q 33.** Montrer que $F^\perp$ est stable par $M$ et par $J_n$.


BY-NC-SA

**Q 34.** Montrer qu'il existe un entier naturel non nul $q$ et des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, notés $F_1, ..., F_q$ tels que

(a) $F_1 \oplus \cdots \oplus F_q = \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ ;

(b) $\forall i \in \{1, ..., q\}$, $F_i$ est stable par $M$ et par $J_n$ ;

(c) $\forall i \in \{1, ..., q\}$, $F_i^\perp$ est stable par $M$ et par $J_n$ ;

(d) $\forall (i,j) \in \{1, ..., q\}^2$, $i \neq j \implies \forall (Y, Z) \in F_i \times F_j, \langle Y, Z\rangle = 0 = \varphi(Y, Z)$ ;

(e) $\forall i \in \{1, ..., q\}$, $\dim F_i \in \{2, 4\}$ ;

(f) $\forall i \in \{1, ..., q\}$, la matrice de l'application $m_{F_i}$ induite par $m$ sur $F_i$ dans une certaine base est de la forme

$$J_1 \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} \sqrt{-\lambda} J_1 & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}} J_1 \end{pmatrix}.$$

### *V.B – Mise en application*

Dans la fin de cette partie, on note $B$ la matrice

$$B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Q 35.** Calculer $B^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Q 36.** Déterminer un réel $a$ et une matrice $P$ tels que

$$P \in \mathcal{O}_4(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_4(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad P^\top B P = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/a \\ 0 & 0 & -1/a & 0 \end{pmatrix}.$$

• • • FIN • • •


BY-NC-SA

# Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

## Chapitres liés à ce sujet

- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Compléments d'algèbre linéaire

## Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

**prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/pc