Concours Centrale-Supélec, France

Session 2022, filière PC

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : étude de deux familles de polynômes
- Partie II : convergence des polynômes d'interpolation pour une fonction de classe C^infini
- Partie III : phénomène de Runge

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/pc/2022/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PC

2022

4 heures

Calculatrice autorisée

Ce sujet en trois parties étudie la convergence des polynômes d'interpolation de Lagrange sous différentes hypothèses et aborde le phénomène de Runge.

La partie I est consacrée à l'étude de deux familles de polynômes, les polynômes de Lagrange et les polynômes de Tchebychev.

La partie II donne des résultats généraux de convergence des polynômes d'interpolation de Lagrange pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$; elle utilise également quelques résultats de la partie I.

Enfin la partie III présente le phénomène de Runge. Elle s'appuie sur les sous-parties III.A et III.B, qui portent sur une intégrale généralisée et sont indépendantes des parties I et II.

Notations

Si k_1 et k_2 sont deux entiers tels que $k_1 \leqslant k_2$, on note $[\![k_1, k_2]\!]$ l'ensemble des entiers k tels que $k_1 \leqslant k \leqslant k_2$. Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n.

I Étude de deux familles de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, ..., a_n)$ une famille de n réels deux à deux distincts.

Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, on note L_i le polynôme de degré $n-1$ défini par

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}. \tag{I.1}$$

On dit que $L_1, ..., L_n$ sont les polynômes de Lagrange associés à $a_1, ..., a_n$.

I.A – Polynômes de Lagrange

On définit l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n-1}[X] \times \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(a_k)Q(a_k) \end{array} \right.$$

Q 1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Q 2. Montrer que, pour tout i et k dans $[\![1, n]\!]$,

$$L_i(a_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q 3. Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$\langle L_i, P \rangle = P(a_i).$$

Q 4. Montrer que la famille $(L_1, ..., L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Q 5. En déduire que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$P = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)L_i.$$

Q 6. Montrer que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-2$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P(a_i)}{\displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (a_i - a_j)} = 0.$$

BY-NC-SA

I.B – Polynômes de Tchebychev

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$T_n(X) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} X^{n-2p}(1-X^2)^p.$$

Q 7. En développant $(1+x)^n$ pour deux réels x bien choisis, montrer que

$$\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} = 2^{n-1}.$$

Q 8. Montrer que T_n est un polynôme de degré n. Expliciter le coefficient dominant de T_n.

Q 9. Montrer que T_n est l'unique polynôme à coefficients réels vérifiant la relation

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad T_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta).$$

Q 10. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $y_{k,n} = \cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$. Montrer que

$$T_n(X) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} \Big(X - y_{k,n}\Big)$$

I.C – Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et W un polynôme unitaire de degré n. L'objectif de cette sous-partie est de montrer que

$$\sup_{x\in[-1,1]} |W(x)| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}} \tag{I.2}$$

puis d'étudier dans quel cas on a égalité.

Q 11. Montrer que $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = 1$. En déduire un polynôme unitaire de degré n réalisant le cas d'égalité dans (I.2).

On pose $Q = \dfrac{1}{2^{n-1}} T_n - W$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $z_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.

Q 12. Montrer que Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Q 13. Dans cette question, on montre (I.2) par l'absurde.

— Si on suppose que $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |W(x)| < \dfrac{1}{2^{n-1}}$, montrer que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $Q(z_k)Q(z_{k+1}) < 0$.

— En déduire une contradiction et conclure.

On suppose maintenant que $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |W(x)| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Q 14. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\frac{Q(z_k)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (z_k - z_j)} \geqslant 0.$$

Q 15. En déduire que $Q = 0$, puis que $W = \dfrac{1}{2^{n-1}} T_n$.

On pourra considérer la somme des inégalités de la question précédente et exploiter la question 6 appliquée à des données convenables.

II Interpolation et convergence des polynômes d'interpolation pour une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$

II.A – Interpolation d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$

Dans cette sous-partie, n est un entier naturel non nul et I est un segment $[a, b]$, où $a < b$. On considère n nombres réels distincts $a_1 < \cdots < a_n$ de I.

On note $L_1, ..., L_n$ les polynômes de Lagrange associés à $a_1, ..., a_n$ définis par (I.1) et on note $W = \prod\limits_{i=1}^{n} (X - a_i)$.

BY-NC-SA

Pour toute fonction f définie sur I, le polynôme

$$\Pi(f) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i) L_i \tag{II.1}$$

est l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(a_i) = f(a_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On l'appelle polynôme interpolateur de Lagrange de f associé à $a_1, ..., a_n$.

Q 16. Soit r une une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et s'annulant en $n+1$ points distincts de I. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $r^{(n)}(c) = 0$.

Q 17. Soit f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Soit $P = \Pi(f)$ le polynôme interpolateur de f associé aux réels $a_1, ..., a_n$, comme défini en (II.1) ci-dessus. Pour tout $x \in I$, montrer qu'il existe $c \in I$ tel que

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} W(x).$$

Pour x distinct des a_i, on pourra considérer la fonction r définie sur I par

$$r(t) = f(t) - P(t) - KW(t)$$

où le réel K est choisi de façon que $r(x) = 0$.

Q 18. En déduire que

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)| \leqslant \frac{M_n (b-a)^n}{n!}$$

où $M_n = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f^{(n)}(x)|$.

II.B – Suites de polynômes interpolateurs

On considère encore un segment I et une fonction f définie sur I.

De plus, pour tout entier naturel non nul n, on suppose donnés des réels distincts $a_{1,n} < \cdots < a_{n,n}$ de I et on considère $P_n = \Pi_n(f)$ le polynôme interpolateur de Lagrange de f associé à ces réels $a_{1,n}, ..., a_{n,n}$.

En notant $L_{1,n}, L_{2,n}, ..., L_{n,n}$ les polynômes de Lagrange associés à $a_{1,n}, ..., a_{n,n}$, on a donc

$$\Pi_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(a_{i,n}) L_{i,n} \tag{II.2}$$

et $\Pi_n(f)$ est l'unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P_n(a_{i,n}) = f(a_{i,n})$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

On s'intéresse à la convergence uniforme sur I vers f de la suite de polynômes $\big(\Pi_n(f)\big)$ pour divers exemples de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

II.B.1) Convergence uniforme vers la fonction exponentielle

Dans cette section, $I = [a, b]$, où $a < b$, et f est la restriction à I de la fonction exponentielle :

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \exp(x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $P_n = \Pi_n(f)$ le polynôme interpolateur comme défini par (II.2).

Q 19. Montrer que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur I.

Q 20. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge uniformément vers f sur I et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction Q_n ne coïncide avec f en aucun point de I, sauf peut-être en zéro :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in I \setminus \{0\}, \qquad Q_n(x) \neq \exp(x)$$

II.B.2) Convergence uniforme vers une fonction rationnelle

Dans cette section, a est un réel strictement positif et $I = [-a, a]$. Soit

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array} \right.$$

Q 21. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que, pour tout k dans $\mathbb{N}$ et tout $t \in]-\pi/2, \pi/2[$,

$$f^{(k)}(\tan t) = k! \cos^{k+1}(t) \cos\big((k+1)t + k\pi/2\big).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $P_n = \Pi_n(f)$ le polynôme interpolateur de f sur I défini par (II.2).

Q 22. Montrer que, si $a < \dfrac{1}{2}$, la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[-a, a]$.

BY-NC-SA

II.B.3) Cas de la somme d'une série entière

Soit $\sum_{k\geqslant 0} c_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On pose,

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]-1, 1[, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k.$$

Q 23. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ et que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-1, 1[, \qquad g^{(j)}(x) = \frac{j!}{(1-x)^{j+1}}.$$

Q 24. Soit $r \in]0, R[$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad |c_k| \leqslant \frac{C}{r^k}.$$

Q 25. En déduire que pour tout $x \in]-r, r[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{n!\, rC}{(r-|x|)^{n+1}}.$$

Q 26. On suppose que $a < R/3$. Montrer que la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \big(\Pi_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[-a, a]$.

II.B.4) Interpolation aux points de Tchebychev

Cette section reprend l'étude des deux sections précédentes dans le cas de points d'interpolation particuliers, liés aux racines des polynômes de Tchebychev. On considère $a > 0$ et $I = [-a, a]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les points de Tchebychev d'ordre n dans I sont :

$$a^*_{k,n} = a\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad \text{pour } k \in [\![1, n]\!].$$

On pose $W^*_n(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - a^*_{k,n})$.

Si f est une fonction définie sur I et si $n \in \mathbb{N}^*$, on définit comme au (II.2) le polynôme interpolateur $P^*_n = \Pi^*_n(f)$ de f aux points de Tchebychev d'ordre n.

C'est l'unique polynôme $P^*_n \in \mathbb{R}_{n-1}(X)$ tel que $P^*_n(a^*_{k,n}) = f(a^*_{k,n})$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Q 27. Pour tout $x \in [-a, a]$, montrer que $|W^*_n(x)| \leqslant 2\left(\frac{a}{2}\right)^n$.

Q 28. On reprend dans cette question la fonction f étudiée dans la section II.B.2 : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que, si $a < 2$, la suite $(\Pi^*_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[-a, a]$.

Q 29. On reprend dans cette question la fonction f somme de série entière étudiée dans la section II.B.3. Montrer que, si $a < 2R/3$, la suite $(\Pi^*_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[-a, a]$.

III Phénomène de Runge

III.A – Étude d'une intégrale généralisée

Pour tout réel $\alpha > 0$, on considère la fonction $h_\alpha : t \mapsto \ln\left(\dfrac{1-t^2}{\alpha^2+t^2}\right)$.

Q 30. Montrer que h_α est une fonction continue décroissante intégrable sur $[0, 1[$.

On pose $J_\alpha = \displaystyle\int_0^1 h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$.

Q 31. Justifier que $J_\alpha = \displaystyle\int_0^1 \ln(1-t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \ln(\alpha^2+t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \ln(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^1 \ln(\alpha^2+t^2)\,\mathrm{d}t$.

Q 32. En déduire que $J_\alpha = 2\ln(2) - \ln(1+\alpha^2) - 2\alpha\arctan\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$.

Q 33. Montrer qu'il existe $\gamma > 0$ tel que, pour tout $\alpha \in]0, \gamma[$, $J_\alpha > 0$.

BY-NC-SA

III.B – Application à une somme de Riemann

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère dans $]0,1[$ les points $a_{k,n}$ donnés, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, par $a_{k,n} = \dfrac{2k+1}{2n}$ et on pose

$$S_n(h_\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h_\alpha(a_{k,n}) = \frac{1}{n}\left(h_\alpha\left(\frac{1}{2n}\right) + h_\alpha\left(\frac{3}{2n}\right) + \cdots + h_\alpha\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\right).$$

Q 34. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\int_{1/2n}^{(2n-1)/2n} h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{2n-1}{2n}\right) \leqslant S_n(h_\alpha) \leqslant \frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{1}{2n}\right) + \int_{1/2n}^{(2n-1)/2n} h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q 35. En déduire que la suite $\left(S_n(h_\alpha)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers J_α.

Q 36. Montrer que, pour $\alpha \in]0,\gamma[$, la suite $\left(\left|\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1-a_{k,n}^2}{\alpha^2+a_{k,n}^2}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

III.C – Le phénomène de Runge

Dans cette sous-partie $I = [-1,1]$ et $\alpha > 0$. On considère

$$f_\alpha : \left|\begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\alpha^2+x^2} \end{array}\right.$$

On reprend les points $a_{k,n}$ définis dans la sous-partie III.B :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in [\![0, n-1]\!], \qquad a_{k,n} = \frac{2k+1}{2n}.$$

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ le polynôme interpolateur de f_α aux $2n$ réels $\{\pm a_{k,n} \in I \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}$. Autrement dit, R_n est l'unique polynôme de degré au plus $2n-1$ qui coïncide avec f_α aux points

$$-\frac{2n-1}{2n}, -\frac{2n-3}{2n}, ..., -\frac{3}{2n}, -\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}, ..., \frac{2n-3}{2n}, \frac{2n-1}{2n}.$$

On pose $Q_n(X) = 1 - (X^2+\alpha^2)R_n(X)$.

Q 37. Montrer que R_n est un polynôme pair et déterminer $Q_n(\alpha\mathrm{i})$.

Q 38. Montrer qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in [-1,1], \qquad Q_n(x) = \lambda_n \prod_{k=0}^{n-1}(x^2 - a_{k,n}^2).$$

Q 39. En déduire que, pour tout $x \in [-1,1]$,

$$f_\alpha(x) - R_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^2+\alpha^2}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{x^2-a_{k,n}^2}{\alpha^2+a_{k,n}^2}.$$

Q 40. On suppose que $\alpha < \gamma$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} |f_\alpha(1) - R_n(1)| = +\infty.$$

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Compléments d'algèbre linéaire
- Nombres complexes et trigonométrie
- Dérivabilité et convexité
- Intégration sur un intervalle quelconque

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/pc