Concours Centrale-Supélec, France

Session 2022, filière PC

Physique 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie I : le voyage entre la Terre et Mars
- Partie II (II.A et II.B) : projet NERVA, étude dynamique et approche thermodynamique
- Partie II (II.C) : la tuyère

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/pc/2022/physique2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Physique 2

PC

2022

4 heures

Calculatrice autorisée

NASA's Mars Exploration Program

Un demi-siècle après avoir marché sur la Lune, l'exploration spatiale semble se fixer à moyen terme l'objectif de l'exploration de la planète Mars par l'homme. Une telle expédition suppose de résoudre un très grand nombre de problèmes concernant aussi bien les aspects techniques que les aspects humains.

Ce sujet propose d'étudier la cohérence de l'un des nombreux scénarios élaborés par la NASA pour un vol habité vers Mars.

Les deux parties du problème ainsi que les sous-parties sont largement indépendantes, mais les données numériques fournies dans les différentes parties sont susceptibles d'être utilisées ailleurs.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas ou peu guidées. Elles nécessitent plus de temps pour élaborer un modèle ou un raisonnement, le barème en tient compte.

Ce sujet est accompagné d'un document réponse à rendre avec la copie (même s'il n'a pas été utilisé). Les principales données numériques sont regroupées dans le document réponse.

I Le voyage entre la Terre et Mars

Dans toute cette partie du problème, les orbites des planètes autour du Soleil sont assimilées à des cercles de rayon égal au demi-grand axe a des ellipses. On se place dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen.

I.A – Vitesse de la Terre et de Mars dans le référentiel héliocentrique

Q 1. Donner les dimensions de la constante gravitationnelle G ainsi que son unité dans le système international.

Q 2. Montrer que le moment cinétique $\vec{L}_O$ en O, centre du Soleil, d'un objet de masse m est une constante du mouvement.

Q 3. On utilise les coordonnées cylindriques $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ avec $\vec{e}_z$ tel que $\vec{L}_O = L_O \vec{e}_z$. Justifier que le mouvement est plan et exprimer $C = r^2 \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ en fonction de L_O et m. Quel est le nom de cette grandeur ?

Q 4. Déterminer, dans le cas d'une orbite circulaire de rayon R, la vitesse V de l'objet en fonction de G, M_S, R et m. Calculer les valeurs numériques de V_T, la vitesse orbitale de la Terre et de V_M, celle de Mars, dans le référentiel héliocentrique.

I.B – Aspect énergétique et troisième loi de Kepler

Q 5. Déduire l'expression de l'énergie cinétique, puis de l'énergie mécanique de l'objet de masse m sur son orbite circulaire autour du Soleil en fonction de G, M_S, R et m.

Q 6. Exprimer la période de rotation T de l'objet en fonction G, M_S et R (troisième loi de Kepler).

Il est rappelé que les expressions de l'énergie mécanique et de la troisième loi de Kepler obtenues pour un mouvement circulaire peuvent être généralisées au cas d'une orbite elliptique en remplaçant le rayon R par le demi-grand axe de la trajectoire.

I.C – Voyage aller Terre – Mars, orbite de transfert

D'un point de vue énergétique, la méthode la plus efficace pour envoyer un vaisseau d'une orbite circulaire à une autre orbite circulaire coplanaire est de le placer sur une trajectoire de transfert elliptique tangente aux deux orbites circulaires, donc ici aux orbites de Mars et de la Terre (ellipse de Hohmann). On admet que seule l'attraction solaire agit sur le vaisseau pendant son mouvement.

Q 7. Représenter, sur la figure A du document réponse, montrant les orbites de la Terre et de Mars, l'allure de l'orbite de transfert (trajectoire de Hohmann).

La position de la Terre au temps $t = 0$ du départ du vaisseau est prise comme origine angulaire ($\theta_T(t = 0) = 0$).

Q 8. Au départ de l'orbite de la Terre, exprimer en fonction de V_T, a_M et a_T la vitesse V'_T que doit avoir le vaisseau sur sa trajectoire de transfert. En déduire la variation de vitesse $\Delta V_T = V'_T - V_T$. Calculer la valeur numérique de ΔV_T.

En pratique, la variation de vitesse requise est plus importante en raison de la nécessité de se libérer de l'attraction de la planète à partir d'une orbite basse.

Q 9. Exprimer puis calculer la durée Δt du voyage jusqu'à l'orbite de Mars.

BY-NC-SA

Q 10. Quel doit être l'angle $\alpha_0 = \theta_M(t=0) - \theta_T(t=0)$ (Terre - Soleil - Mars) formé par les directions de Mars et de la Terre, vus du Soleil, au moment du lancement afin que Mars soit au rendez-vous à l'arrivée du vaisseau ? Calculer la valeur numérique de α_0 et indiquer la position de Mars au moment du lancement sur la figure A du document réponse.

Q 11. Dans l'hypothèse d'un problème survenu pendant le voyage aller nécessitant de ne pas explorer la planète, le vaisseau ne modifie pas sa vitesse lors du passage de l'orbite de Mars. Déterminer la position angulaire de la Terre au bout d'une révolution complète de celui-ci sur son orbite de transfert. Commenter.

I.D – Durée de la mission

Toujours pour minimiser le cout énergétique, le voyage retour emprunte le même type d'orbite de transfert qu'à l'aller.

Q 12. Déterminer l'angle α_1 (Terre - Soleil - Mars) au moment du départ de Mars.

Q 13. En déduire le nombre de jours que les astronautes vont pouvoir passer sur la planète rouge, la durée totale de la mission (en jours) et la période entre deux fenêtres de lancement depuis la Terre.

Moyennant une plus grande dépense énergétique, il est possible de modifier ce scénario de mission, et ce en fonction des objectifs voulus (réduction du temps de trajet aller ou retour, modification du temps global de mission en sont des exemples). Ainsi, une variation de vitesse $\Delta\vec{V}_T$ colinéaire à $\vec{V}_T$ plus importante au départ permet de réduire le temps du voyage aller.

Dans la suite, on cherche une réduction de 25 % de l'angle balayé par le vaisseau pour atteindre l'orbite de Mars autour du Soleil. On se place de nouveau avec la position de la Terre au lancement prise comme origine angulaire ($\theta_T(t=0)=0$) et on souhaite que le vaisseau atteigne Mars à un instant $\Delta t'$ tel que $\theta_M(\Delta t') = 3\pi/4$. On admet que la nouvelle trajectoire du vaisseau est une conique dont l'un des foyers est le Soleil et d'équation polaire $r(\theta) = \dfrac{p}{1+e\cos\theta}$ où p est appelé paramètre de la conique et e son excentricité.

Q 14. Placer sur la figure B du document réponse la position de Mars à l'arrivée du vaisseau.

Q 15. Justifier que r_P, le périhélie de la trajectoire du vaisseau (distance minimale du Soleil au vaisseau), vérifie $r_P = a_T$.

Q 16. Montrer que l'excentricité s'écrit $e = \dfrac{a_M - a_T}{\frac{1}{\sqrt{2}}a_M + a_T}$ et calculer sa valeur numérique. Tracer sur la figure B l'allure de la trajectoire.

Q 17. Exprimer l'énergie mécanique E_M du vaisseau sur cette trajectoire en fonction de m, V_T et e.

Q 18. En déduire la vitesse V_T'' que doit avoir le vaisseau au départ pour se placer sur sa nouvelle orbite, toujours en fonction de V_T et e.

Q 19. Donner, en fonction de V_T et e, la variation de vitesse $\Delta V_T' = V_T'' - V_T$ qu'il faut communiquer au vaisseau pour le mettre sur sa nouvelle trajectoire de transfert. Calculer la valeur numérique de $\Delta V_T'$.

Q 20. Exprimer $C = r^2\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ en fonction de a_T et V_T''.

Q 21. Évaluer le temps $\Delta t'$ du transfert entre la Terre et Mars.

On donne : $\displaystyle\int_0^{\theta_M(\Delta t')} \frac{1}{(1+e\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta = 2{,}15$ avec l'excentricité calculée en question 16.

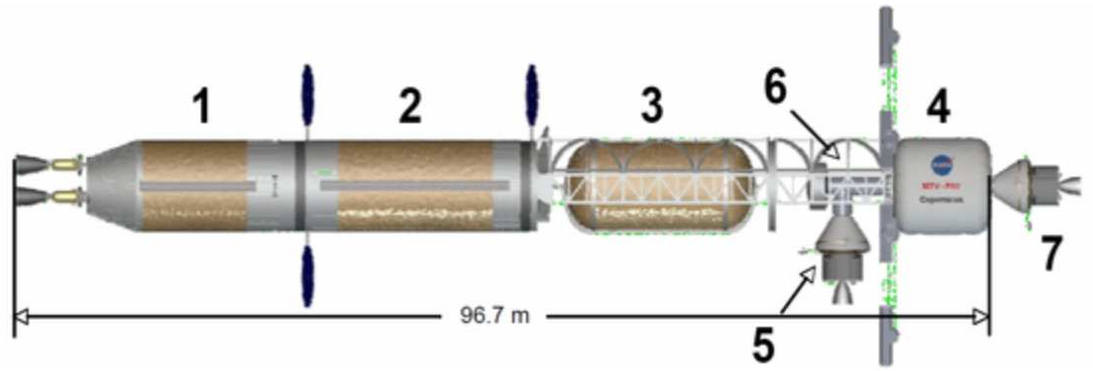
II Le projet NERVA (Nuclear Engine for Rocket Vehicle Application)

Pour les phases d'insertion sur les trajectoires de transferts, la NASA préconise la propulsion nucléaire qui permet de réduire considérablement la masse de carburant par rapport à une propulsion chimique. Ce type de technologie a été mis au point dès les années 1960 pour le NERVA, elle repose sur l'éjection à grande vitesse d'hydrogène réchauffé par un réacteur nucléaire.

Le scénario propose l'utilisation d'un vaisseau assemblé en orbite basse terrestre constitué en modules indépendants afin de répondre à diverses exigences nécessaires au voyage interplanétaire. Ce vaisseau, d'un diamètre de 10 m et de près de 100 m de long a une masse d'environ 360 t. Il est équipé de deux moteurs NERVA dotés chacun d'une source thermique nucléaire d'une puissance $P_{\text{th}} = 1{,}00\,\text{GW}$ et fournissant une poussée unitaire de 220 kN.

De l'hydrogène liquide, noté LH_2, est stocké à la température T_{vap} et à la pression P_{vap} dans des réservoirs. On note $m_0 = 360\times10^3$ kg la masse initiale du vaisseau, $m(t)$ sa masse à l'instant t, $D = -\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} > 0$ le débit massique des gaz éjectés par les propulseurs NERVA (supposé constant jusqu'à épuisement du LH_2) et v_1 la vitesse des gaz en sortie de tuyère par rapport au vaisseau.

BY-NC-SA



(1) Étage de propulsion nucléaire (2) Réservoir d'hydrogène liquide fixe (3) Réservoir d'hydrogène liquide largable (4) Habitat utilisé pour le transit Terre-Mars (5) Vaisseau Orion (6) Système de télécommunication, cryorefroidisseurs et panneaux solaires (7) Port d'amarrage pour le vaisseau décollant de Mars

Figure 1 Architecture du vaisseau

Dans la suite, le temps de poussée des moteurs est suffisamment court par rapport au temps des transferts pour considérer la trajectoire rectiligne dans le référentiel héliocentrique pendant une phase de propulsion. De plus, les forces de gravitation sont négligeables devant la poussée des moteurs.

II.A – Étude dynamique

Q 22. À partir d'une étude dynamique sur le système fermé {vaisseau + gaz éjecté} entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$, justifier l'équation différentielle suivante, dans laquelle $\vec{F} = -D\vec{v}_1$ représente la force de poussée,

$$m(t)\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}.$$

Afin de pouvoir comparer l'efficacité des systèmes de propulsion ayant des débits, des vitesses d'éjection, ou des sources d'énergie différentes, on utilise généralement la notion d'impulsion spécifique notée I_{sp} s'exprimant en seconde. On peut la définir comme le temps pendant lequel une masse initiale m_i d'ergol est capable de donner une poussée égale à son poids à la surface de la Terre.

Q 23. Établir I_{sp} en fonction de g et v_1. Pour le vaisseau envisagé par la NASA, on a $I_{\mathrm{sp}} = 825\,\mathrm{s}$. Calculer la vitesse v_1 d'éjection des gaz du moteur NERVA.

Q 24. Pour une injection sur une trajectoire de Hohmann vers Mars depuis l'orbite basse terrestre, une variation de vitesse $\Delta V_T = 3{,}70\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$ est requise. Déterminer la masse m_c de LH_2 consommée. Le résultat est-il cohérent avec le dimensionnement proposé du vaisseau ?

Q 25. Quel sera le surplus de consommation dans l'hypothèse du voyage raccourci évoqué dans la sous-partie I.D ?

II.B – Approche thermodynamique

Schématiquement, la technologie du NERVA utilise un cœur de réacteur nucléaire de section $S_0 = 0{,}28\,\mathrm{m}^2$ (correspondant à un diamètre $d_0 = 60\,\mathrm{cm}$) dont le rôle est de produire les gaz chauds à la température $T_0 = 2500\,\mathrm{K}$ et à la pression $P_0 = 70{,}0 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$ nécessaires à la propulsion.

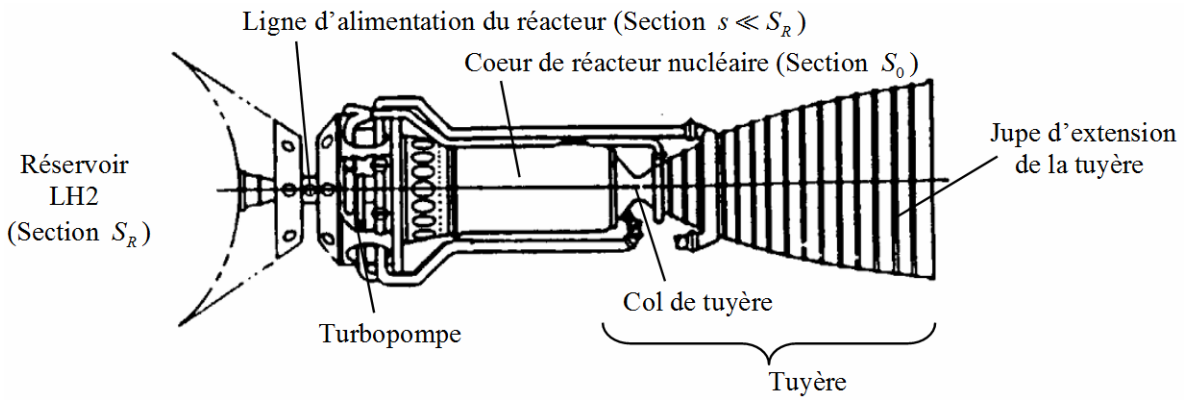


Figure 2 Plan du moteur NERVA

Des turbopompes placées entre le réservoir et le cœur du réacteur permettent d'alimenter celui-ci en LH_2 avec un débit massique constant D_m. On néglige les variations d'énergie cinétique de l'hydrogène devant les variations d'enthalpie dans le cœur du réacteur.

BY-NC-SA

Lorsque l'hydrogène pénètre dans le cœur du réacteur, il est sous forme liquide à la température T_{vap} et à la pression P_{vap} d'équilibre liquide-gaz.

Q 26. En appliquant le premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert au cœur du réacteur, établir l'expression du débit massique D_m en fonction de P_{th}, T_0, T_{vap}, M_{H_2}, ΔH_{vap}, R et γ.

Q 27. Cette expression permet de calculer un débit massique $D_m = 27{,}4\ \text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$. Compte tenu des données proposées par la NASA, cette valeur vous semble-t-elle réaliste ?

Q 28. En l'absence de tuyère, déterminer la vitesse v_0 en sortie de cœur de réacteur en fonction de P_0, T_0, S_0, D_m et de la constante spécifique du dihydrogène $r = \dfrac{R}{M_{\text{H}_2}}$, puis calculer sa valeur. La tuyère est-elle indispensable ?

II.C – La tuyère

La tuyère du moteur NERVA présente une géométrie particulière dite tuyère de Laval comprenant trois parties distinctes :

— le convergent ;
— le col où la section est minimale ;
— le divergent.

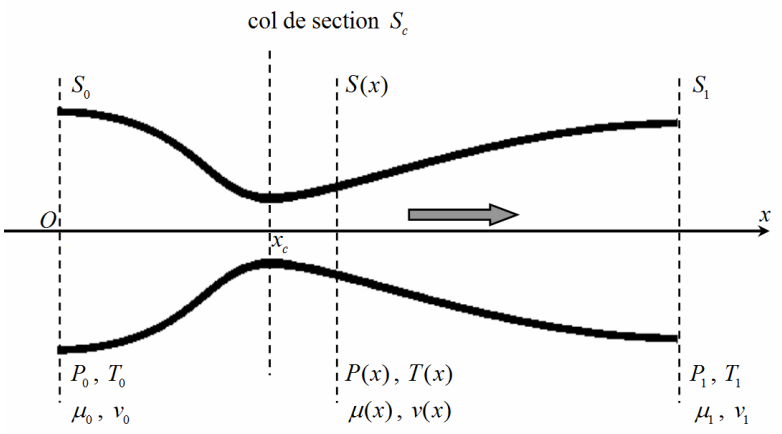


Figure 3 Tuyère de Laval

On cherche dans un premier temps à comprendre pourquoi cette forme est adaptée à l'éjection dans l'espace du dihydrogène issu du cœur de réacteur et ensuite à étudier les conséquences sur la vitesse des gaz en sortie de tuyère.

On rappelle l'équation d'Euler décrivant les évolutions spatiales et temporelles du champ de vitesse $\vec{v}(x,t)$ d'un fluide de masse volumique $\mu(x,t)$ soumis uniquement à la pression $P(x,t)$ dans le référentiel d'étude supposé galiléen :

$$\mu\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P.$$

L'écoulement du dihydrogène, se comportant comme un gaz parfait, dans la tuyère d'axe (Ox) est stationnaire et supposé adiabatique réversible. De plus, la section $S(x)$ est lentement variable, ce qui permet de considérer l'écoulement unidirectionnel (colinéaire à l'axe (Ox)) et unidimensionnel (les paramètres physiques ne dépendent que de l'abscisse x).

Les grandeurs caractéristiques du gaz sont indicées par 0 à l'entrée de la tuyère et par 1 à la sortie.

II.C.1) La forme de la tuyère

Q 29. Quelle condition nécessaire relie P_0 et P_1 pour avoir un écoulement dans le sens des x croissants ?

Q 30. Montrer que $\mu v \dfrac{\text{d}v}{\text{d}x} = K\dfrac{\text{d}P}{\text{d}x}$ où K est une constante dont on donnera la valeur.

Q 31. La transformation étant adiabatique réversible, quelle relation lie $\mu(x)$ à μ_0, $P(x)$ et P_0 ?

Q 32. Déduire des deux précédentes questions la relation

$$v^2 - v_0^2 = C_1\left(1 - \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)$$

où l'on exprimera la constante C_1 en fonction de P_0, μ_0 et γ.

BY-NC-SA

Q 33. En posant $\alpha = \dfrac{P(x)}{P_0}$ et en supposant que v_0 est négligeable devant v, établir l'expression du débit massique dans la tuyère sous la forme

$$D_m = C_2 S(x) f(\alpha)$$

où $f(\alpha)$ est une fonction de α seul, à déterminer, et C_2 une constante à exprimer en fonction de P_0, μ_0 et γ.

Q 34. Justifier que l'on a nécessairement $\alpha \in [0, 1]$. Après avoir indiqué les limites, étudier la fonction $f(\alpha)$ et préciser sa particularité en $\alpha_M = \left(\dfrac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = 0{,}528$.

La tuyère doit avoir une forme adaptée aux conditions d'utilisation.

Q 35. Expliquer en quoi la valeur du rapport $\dfrac{P_1}{P_0}$ influence sa géométrie et associer, parmi les formes proposées sur la figure 4, celles correspondant aux différents cas possibles.

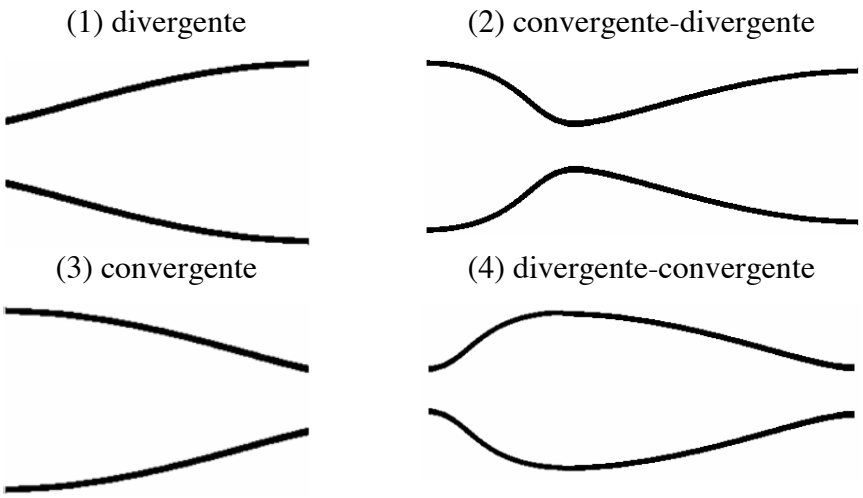


Figure 4 Les quatre géométries différentes des tuyères

Q 36. Afin d'éviter une trop forte détente des gaz après la sortie de la tuyère (ce qui peut conduire à la génération d'une onde de choc), on cherche à avoir une pression P_1 proche de la pression extérieure. Le choix d'une tuyère de Laval pour le moteur NERVA est-il le plus judicieux ?

II.C.2) La vitesse des gaz dans la tuyère

On se place dans la situation d'une propagation unidimensionnelle (selon $\vec{e}_x$). Dans un premier temps, on cherche à établir la célérité des ondes acoustiques dans un fluide supposé parfait et soumis aux seules forces de pression. Celui-ci est caractérisé à l'équilibre par des valeurs uniformes P_0 de la pression et μ_0 de la masse volumique. Du point de vue thermodynamique, ses évolutions sont considérées comme isentropiques, auxquelles correspond le coefficient de compressibilité χ_s. Le passage d'une onde sonore crée une perturbation et le fluide se déplace en de petits mouvements autour de l'équilibre, les champs de pression et de masse volumique devenant : $P(x,t) = P_0 + p(x,t)$ et $\mu(x,t) = \mu_0 + \tilde{\mu}(x,t)$.

Q 37. Qu'appelle-t-on approximation acoustique ? Quel est l'ordre de grandeur de la surpression p pour des ondes acoustiques dans l'air ?

Q 38. Écrire et linéariser les équations locales de la mécanique des fluides et l'équation traduisant l'hypothèse thermodynamique effectuée. Établir l'équation de propagation des ondes acoustiques pour la surpression. Exprimer la célérité c de ces ondes en fonction de χ_s et μ_0.

Q 39. Dans le modèle du gaz parfait, établir la loi de variation de la célérité avec la température. Calculer c_0 dans le dihydrogène en sortie du cœur de réacteur.

On définit le nombre de Mach $M = \dfrac{v}{c}$ avec v la vitesse et c la célérité des ondes acoustiques. Un écoulement est dit subsonique pour $M < 1$ et supersonique pour $M > 1$.

Q 40. Préciser la nature subsonique ou supersonique de l'écoulement de dihydrogène en sortie du cœur de réacteur.

Q 41. À partir de la relation établie à la question 32 et en tenant compte du caractère isentropique de l'évolution, établir une relation entre la température et la vitesse dans la tuyère. À quelle loi de conservation peut-on associer cette relation ? Justifier alors l'expression :

$$\mathrm{d}T = -\frac{\gamma-1}{\gamma r} v^2 \frac{\mathrm{d}v}{v}.$$

BY-NC-SA

Q 42. En déduire la température en sortie de tuyère T_1 ainsi que la nature subsonique ou supersonique de l'écoulement.

Dans la tuyère, les évolutions de la section $S(x)$ et de la vitesse $v(x)$ sont liées par la relation d'Hugoniot, admise :

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = (M^2 - 1)\frac{\mathrm{d}v}{v}$$

où M est le nombre de Mach.

Q 43. Au vu de la nature subsonique ou supersonique de l'écoulement à l'entrée et à la sortie de la tuyère, justifier que seule la tuyère de Laval permet une augmentation continue de la vitesse. Préciser la condition nécessaire sur le nombre de Mach M_c au niveau du col pour un fonctionnement optimal de celle-ci.

II.C.3) Les dimensions de la tuyère

Connaissant le nombre de Mach au col et à la sortie de la tuyère, il est possible de déterminer les diamètres de celle-ci en ces points.

Q 44. Déduire de la question 41 la relation

$$T(1 + C_3 M^2) = C_4$$

où l'on exprimera les constantes C_3 et C_4 en fonction de γ et T_0.

Q 45. Déterminer les diamètres de la tuyère au col et à la sortie. Commenter vos résultats à l'aide de la figure 2.

Q 46. La pression en sortie de tuyère semble-t-elle respecter la condition évoquée à la question 36 ? Le dihydrogène subit-il un changement d'état à la sortie ?

• • • FIN • • •

BY-NC-SA

Numéro de place

Numéro d'inscription

Signature

Nom

Prénom

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Épreuve : Physique 2 PC

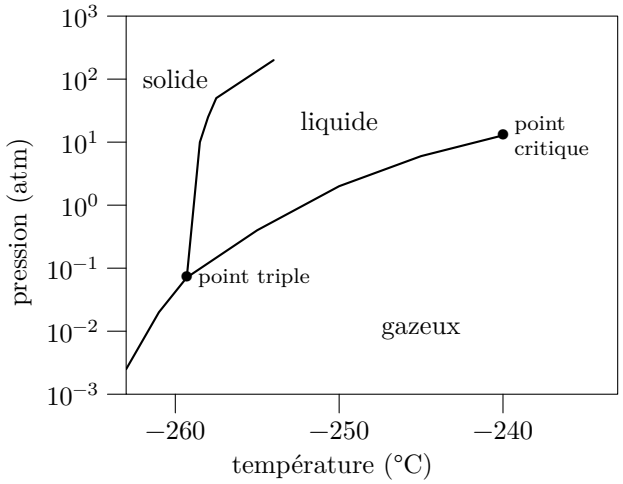
Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Feuille /

Données

Masse du Soleil	$M_S = 2{,}00 \times 10^{30}$ kg
Demi-grand axe de l'orbite de la Terre	$a_T = 150 \times 10^6$ km
Demi-grand axe de l'orbite de Mars	$a_M = 228 \times 10^6$ km
Constante gravitationnelle	$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ SI
Champ de pesanteur terrestre	$g = 9{,}81$ m·s^{-2}
Période de révolution de la Terre	$T_T = 365$ jours
Période de révolution de Mars	$T_M = 687$ jours
Pression de vapeur saturante de H_2 à $T_{\text{vap}} = -253$ °C	$P_{\text{vap}} = 1{,}00 \times 10^5$ Pa
Enthalpie molaire de vaporisation	$\Delta H_{\text{vap}} = 0{,}900$ kJ·mol^{-1}
Masse volumique de LH_2 (hydrogène liquide)	$\mu_{LH_2} = 71{,}0$ kg·m^{-3}
Masse molaire du dihydrogène	$M_{H_2} = 2{,}00$ g·mol^{-1}
Rapport des capacités c_P/c_V du dihydrogène gazeux	$\gamma = 1{,}4$
Constante des gaz parfaits	$R = 8{,}31$ J·K^{-1}·mol^{-1}
Constante spécifique du dihydrogène	$r = R/M_{H_2} = 4{,}16$ kJ·K^{-1}·kg^{-1}
Capacité thermique massique à pression constante de l'hydrogène gazeux	$c_p = r\gamma/(\gamma - 1)$

Diagramme (P, T) du dihydrogène



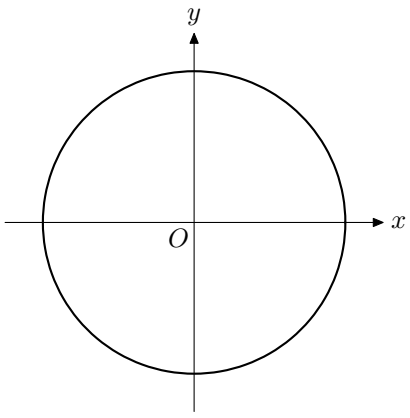
Ne rien écrire **dans la partie barrée**

Formulaire

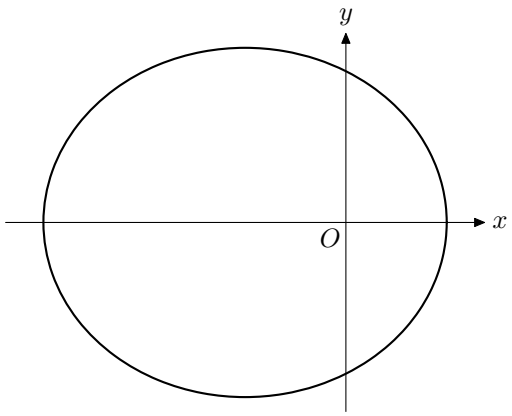
L'équation polaire d'une conique d'axe focal (Ox), de paramètre p et d'excentricité e s'écrit

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

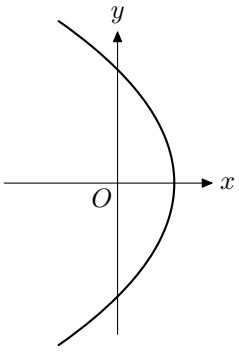
La nature de la courbe dépend de l'excentricité. On distingue 4 cas.



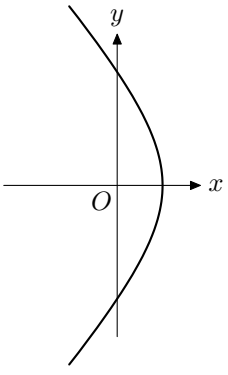
$e = 0$, la courbe est un cercle



$0 < e < 1$, la courbe est une ellipse



$e = 1$, la courbe est une parabole



$e > 1$, la courbe est une hyperbole

Questions 7 et 10

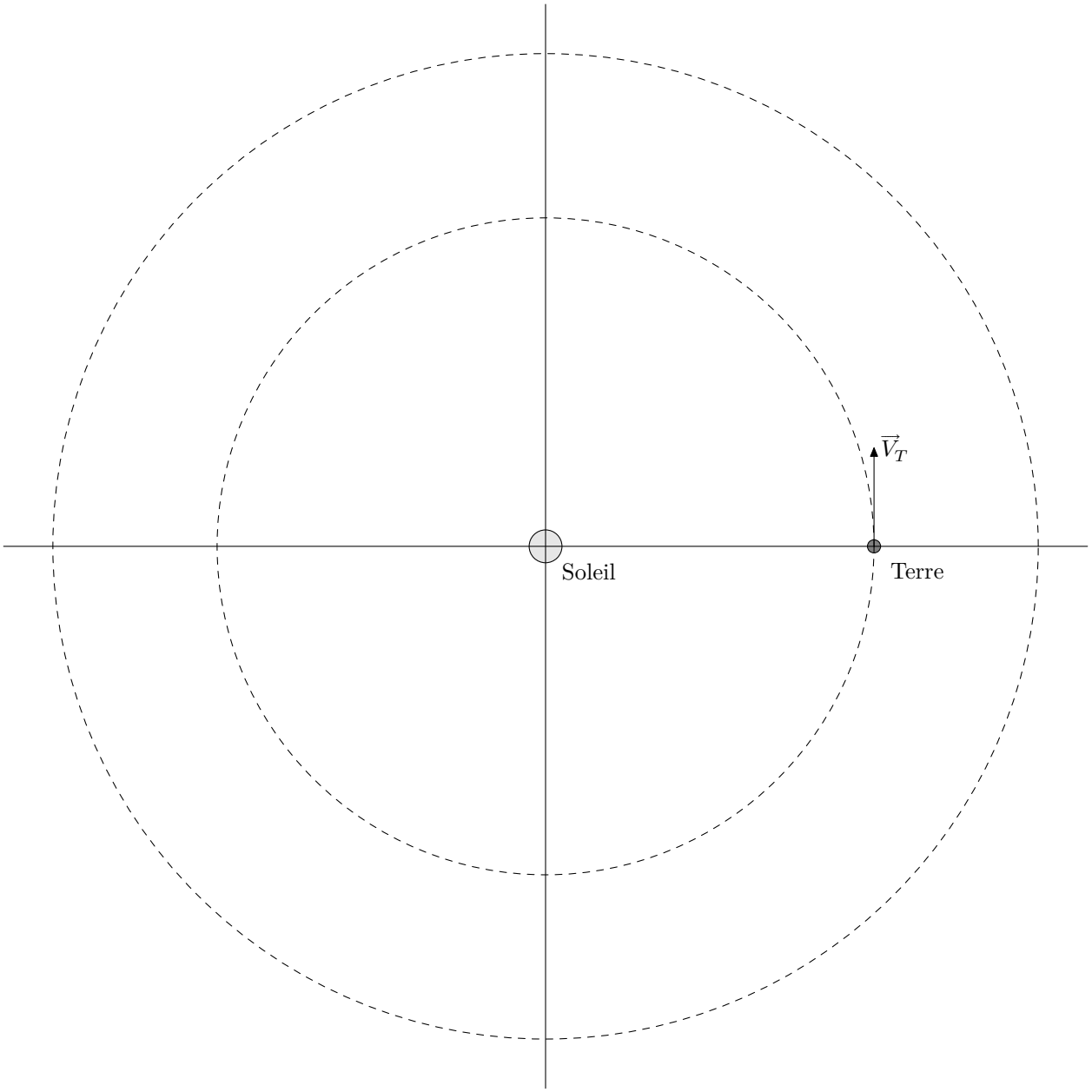


Figure A

Questions 14 et 16

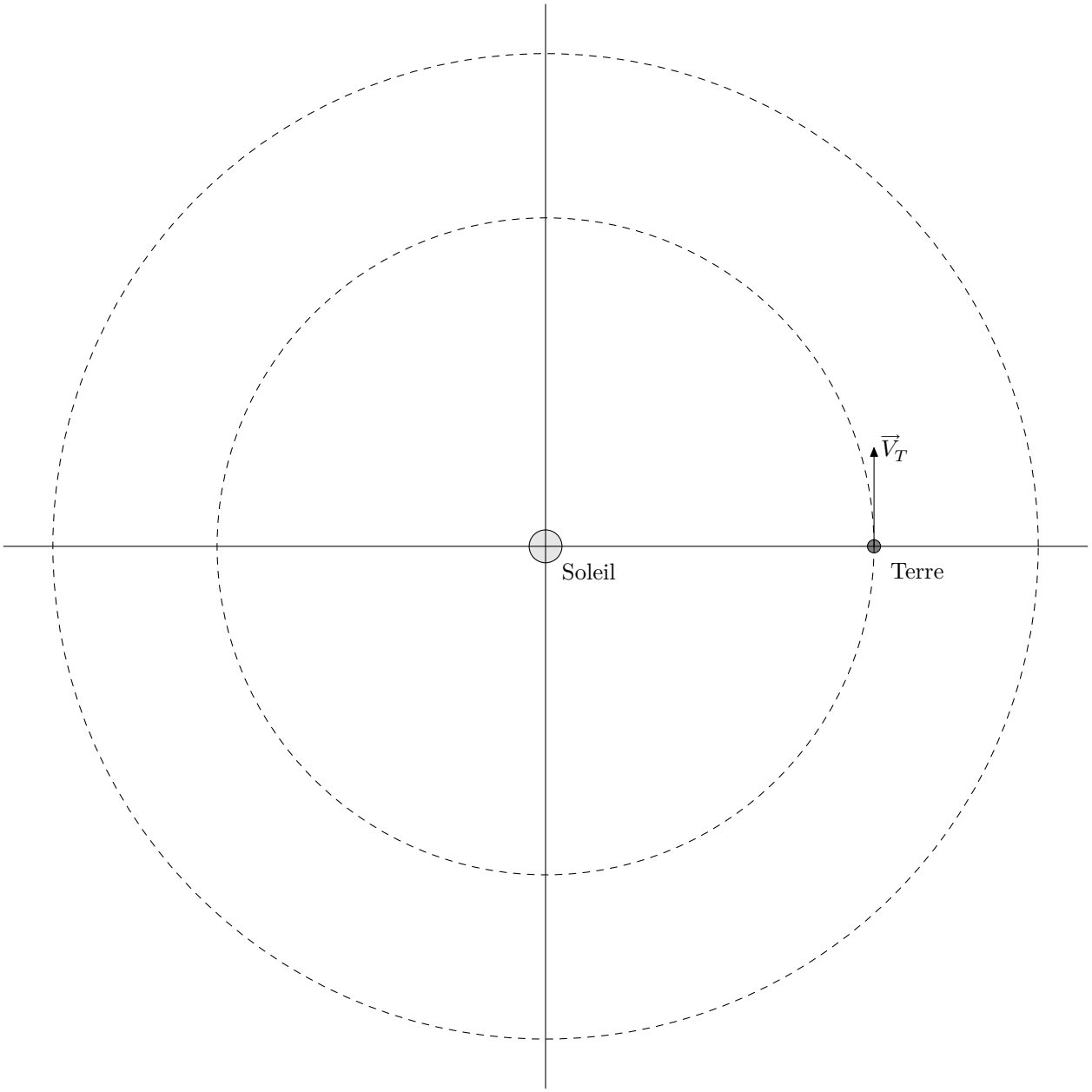


Figure B

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Description et paramétrage du mouvement d'un point
- Calcul infinitésimal du physicien : dérivées et différentielles
- Fonctions usuelles et lecture des graphes

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/pc