Concours Centrale-Supélec, France

Session 2025, filière PC

Physique 1

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie A, I : mesure de la célérité de la lumière par Rømer
- Partie A, II : perturbations séculaires de l'orbite de Mercure
- Partie A, III : propagation de la lumière dans un fluide en mouvement
- Partie B, I : le chant des dunes
- Partie B, II : ondes acoustiques et entraînement par l'eau

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/pc/2025/physique1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Physique 1

PC

4 heures — Calculatrice autorisée

2025

Vitesses mécaniques et célérités des ondes

Bien qu'exprimées dans les mêmes unités, les notions de *vitesse* et de *célérité* sont bien distinctes. Dans tout le sujet, on appellera *vitesse* (notée $\vec{v}$ ou $\vec{V}$ par exemple) la grandeur cinématique associée au déplacement d'un point ou d'un objet *matériel*, tandis qu'on parlera de *célérité* (notée c_0, c_a, ...) pour les grandeurs associées à la propagation des ondes (lumineuses, acoustiques, vagues, ...). Dans toute la suite on retiendra que les célérités d'ondes sont des *grandeurs positives* tandis que les vitesses des objets sont des grandeurs vectorielles, chaque composante étant elle-même une *grandeur algébrique*.

Ce sujet est divisé en deux problèmes **totalement indépendants**, dans lesquelles les notions de vitesse et célérité interviennent dans des contextes distincts.

Dans le problème **Partie A** la célérité des ondes est c_0, celle de la lumière dans le vide et, dans l'approximation non relativiste de la mécanique, les vitesses des objets vérifient $\|\vec{v}\| \ll c_0$.

Dans le problème **Partie B** c'est la célérité c_a des ondes acoustiques (dans des milieux solides, liquides, gaz) qui est étudiée. On rappelle ici que, dans l'approximation acoustique, les vitesses des molécules du fluide vérifient $\|\vec{v}\| \ll c_a$.

On notera $\mathrm{i}^2 = -1$; la base cartésienne associée au repère $(Oxyz)$ sera notée $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Pour un point du plan (Oxy) on utilisera aussi les coordonnées polaires (r, θ) associées au repère mobile $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. Toutes les valeurs numériques nécessaires sont regroupées dans un tableau unique en fin d'énoncé, ainsi qu'un formulaire mathématique.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par un numéro de question souligné. Il est alors demandé d'expliciter clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Partie A – Mécanique et célérité de la lumière

Ce problème **Partie A** étudie trois situations **indépendantes entre elles** explorant les liens entre la célérité c_0 de la lumière (et des ondes électromagnétiques dans le vide) et les vitesses d'objets matériels :

- la partie **I** présente une méthode astronomique de *mesure de la célérité de la lumière dans le vide* c_0, bien avant bien sûr que celle-ci ne soit définie conventionnellement, par comparaison aux vitesses relatives des planètes ;
- la partie **II** étudie une manifestation d'une *correction relativiste* aux lois de la mécanique céleste : les écarts de trajectoire de la planète Mercure aux lois de Kepler du mouvement gravitationnel ;
- enfin, la partie **III** s'intéresse à la propagation des ondes *lumineuses* dans un fluide transparent et entraîné ; il s'agit d'une expérience de physique fondamentale datant de la fin du XIX$^{\mathrm{e}}$ siècle, peu avant la transition entre mécanique classique et relativiste.

I – La mesure de la célérité de la lumière par Rømer

On étudie d'abord un point E qui émet périodiquement un signal lumineux isotrope aux instants $t_k = kT$, où T est la période d'émission et $k \in \mathbb{N}$. Ce signal se propage avec la célérité c_0 puis est reçu au point R qui est en mouvement rectiligne à la vitesse $\vec{v}$ et s'éloigne ainsi de E (figure 1). On note t'_k et t'_{k+1} les instants de réception des signaux émis à t_k et t_{k+1} et d_k la distance $\mathrm{R}_k\mathrm{E}$ à l'instant t'_k.

Q1. Exprimer la distance $d_{k+1} = \mathrm{R}_{k+1}\mathrm{E}$ en fonction de d_k, c_0, T et des instants t'_k et t'_{k+1}. En déduire que la réception des signaux par R est périodique de période T' et exprimer T' en fonction de T, v et c_0. Connaissez-vous le nom usuellement donné à l'effet ainsi mis en évidence ?

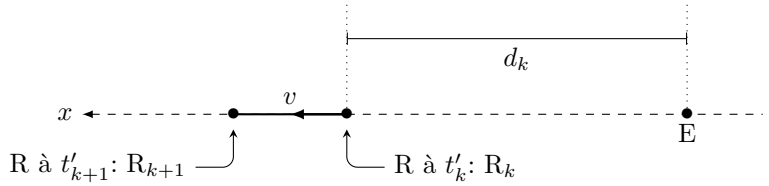


Figure 1 – Réception d'un signal périodique par un récepteur en éloignement longitudinal

On considère maintenant un point E qui émet périodiquement un signal lumineux isotrope aux mêmes instants $t_k = kT$; le signal est reçu au point R en mouvement à la vitesse variable $\vec{v}$. Comme $c_0 \gg \|\vec{v}\|$ on pourra admettre qu'entre la réception des k-ième et $k+1$-ième signaux le déplacement de R est quasiment rectiligne et uniforme (figure 2). Les instants de réception sont notés t'_k et t'_{k+1} et on aura donc $\overrightarrow{R_k R_{k+1}} \simeq \vec{v}\,(t'_{k+1} - t'_k)$. On choisira l'axe (Ox) de sorte que $\overrightarrow{R_k E} = -d_k\,\vec{u}_x$.

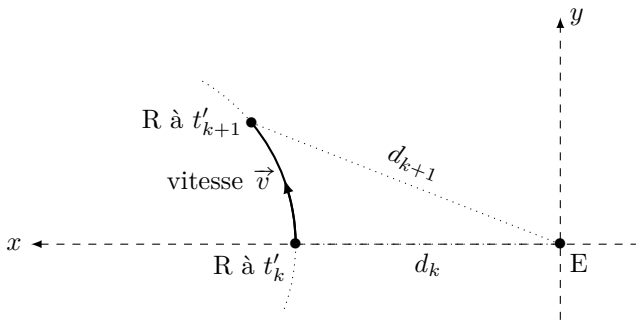


Figure 2 – Réception d'un signal périodique par un récepteur en mouvement arbitraire

Q2. Exprimer $d_{k+1} = \|\overrightarrow{R_{k+1}E}\|$ en fonction de d_k, des composantes v_x et v_y de $\vec{v}$ et de l'intervalle de temps entre réceptions, $T' = t'_{k+1} - t'_k$.

Q3. En déduire l'expression approchée, au premier ordre en v/c_0 :

$$T' = \frac{T}{1 - v_x/c_0}$$

Dans cette relation, la composante v_x peut être qualifiée de *vitesse d'éloignement*.

L'astronome danois Rømer proposa à la fin du XVII$^{\text{e}}$ siècle la première détermination de la célérité c_0 de la lumière en mesurant la période des occultations de l'astre Io, qui est de tous les satellites de Jupiter le plus proche de sa planète ; il a donc une rotation rapide autour de celle-ci, avec une période de l'ordre de 43 heures.

Jupiter est une planète assez éloignée du Soleil et par suite sa position change peu pendant une durée aussi courte ; la période de rotation de Io autour de Jupiter est aussi bien sûr constante. Cependant, les moments où l'on *observe* les apparitions successives de Io (correspondant à des fins d'éclipes) dans son mouvement autour de Jupiter changent lentement au cours du temps, du fait des variations de la distance de la Terre à Jupiter, c'est-à-dire essentiellement du fait de la rotation terrestre.

Ainsi, ces occultations se produisent un peu plus tôt ou un peu plus tard que si la distance de la Terre à Jupiter restait fixe. Le phénomène est bien sûr lié à la propagation des ondes lumineuses de Jupiter à la Terre, et c'est ce qui a permis la mesure de c_0.

Le tableau 1 résume les observations de Rømer, c'est-à-dire la mesure de la durée moyenne τ séparant deux apparitions consécutives de Io durant l'année 1676. Au moyen de mesures ultérieures menées pendant huit ans, Rømer finit par conclure que la période τ de ces apparitions varie *annuellement* avec une valeur moyenne $\tau_m = 42{,}46$ heures et une amplitude totale de variation $\Delta\tau = \tau_{\max} - \tau_{\min}$ égale à 22 minutes.

Début des mesures	13 mai	13 juin	7 août	14 août	23 août
Valeur de τ (heures)	42,45	42,54	42,50	42,48	42,63

Tableau 1 – Les premières mesures de Rømer

Q4. On admettra que la Terre et Jupiter ont des orbites circulaires et coplanaires, héliocentriques, parcourues dans le même sens. Les données en fin d'énoncé en donnent certaines propriétés. Exprimer puis calculer la période T_{J} de révolution de Jupiter autour du Soleil.

On poursuit l'étude dans un référentiel qui accompagne Jupiter dans sa rotation autour du Soleil de sorte que l'axe Soleil–Jupiter est fixe, confondu avec l'axe (Ox). À l'échelle des mesures réalisées par Rømer, on considérera que le point E d'émission de lumière lors de l'apparition de Io derrière l'ombre de Jupiter est confondu avec le point J qui modélise la position de Jupiter.

Q5. Montrer que dans ce référentiel le mouvement de la Terre est circulaire uniforme de vitesse $\|\vec{v}\| = v \simeq 27\,\text{km/s}$. Quelles sont les valeurs extrêmes et moyenne de la vitesse d'éloignement de la Terre par rapport à E ?

Q6. En écrivant que la variation temporelle est directement liée au temps nécessaire à la lumière pour traverser la distance entre Jupiter et la Terre, montrer que $\Delta\tau \simeq \dfrac{T_0 v}{\pi c_0}$; en déduire l'estimation proposée par Rømer pour c_0 ; commenter.

La recherche d'un référentiel galiléen pour l'étude des mouvements des astres a mené à en proposer deux. Le *référentiel héliocentrique*, noté $(\mathcal{R}_H)$, a son origine au centre du Soleil et ses trois axes pointent vers des directions réputées fixes, définies par des étoiles lointaines. Le référentiel de Copernic, noté $(\mathcal{R}_K)$, a son origine au barycentre du système solaire et pointe vers les mêmes directions fixes.

Les lois de la gravitation de Newton, postérieures (1687) à la mesure de Rømer, ainsi que la mesure précise (bien postérieure) du rayon de la trajectoire de Io autour de Jupiter (voir les données en fin d'énoncé) permettent de comparer les masses des différents constituants du système solaire, donc aussi les positions des centres des référentiels de Copernic $(\mathcal{R}_K)$ et héliocentrique $(\mathcal{R}_H)$. Dans cette comparaison, on ne tiendra compte dans ce qui suit que de la seule planète Jupiter, la plus massive du système solaire.

Q7. Estimer le rapport des masses $M_\odot$ du Soleil et M_J de Jupiter puis commenter, numériquement, l'écart entre les centres de ces deux référentiels $(\mathcal{R}_H)$ et $(\mathcal{R}_K)$.

II – Les perturbations séculaires de l'orbite de Mercure

II.1 – La trajectoire de Mercure selon les lois de Kepler

Mercure est la planète la plus proche du Soleil ; de plus, sa trajectoire est fortement excentrique, caractérisée par des distances minimale et maximale au Soleil nettement distinctes (cf. données en fin d'énoncé). Notant (Oxy) le plan de la trajectoire parcourue dans le sens direct, O le centre du référentiel galiléen d'étude, le mouvement de Mercure sera (cf. figure 3) assimilé à celui d'un point matériel M décrit en coordonnées polaires (r, θ).

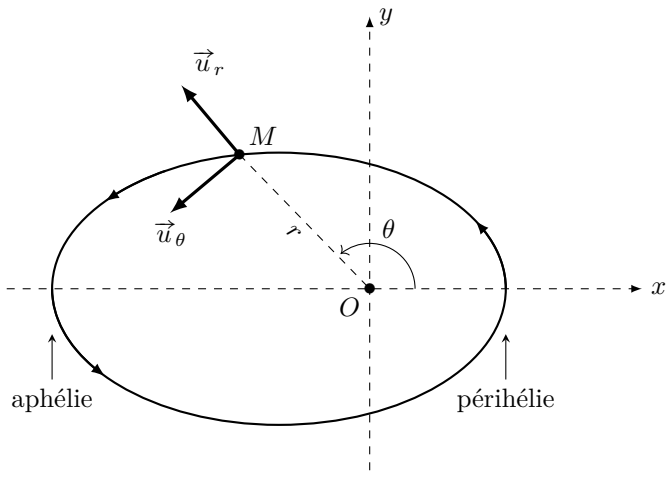


Figure 3 – Trajectoire de Mercure selon les lois de Kepler

Q8. On admet alors l'expression $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$ de l'équation de la trajectoire, où p et e sont des constantes positives. Exprimer puis calculer les paramètres p et e de la trajectoire de Mercure en fonction des données r_max et r_min.

Q9. Exprimer l'accélération de M sous la forme $\vec{a} = -\dfrac{K}{r^2}\vec{u}_r$ et exprimer la constante K. Montrer que $r^2\dot{\theta} = \mathcal{C}_a$; préciser le nom et le signe de la constante $\mathcal{C}_a$.

Q10. On note $\vec{v}$ la vitesse de M ; sur un tour, c'est une fonction $\vec{v}(\theta)$ de l'angle θ. Montrer que le mouvement est caractérisé par $\dfrac{d\vec{v}}{d\theta} = \dfrac{1}{H}\dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}$ où H est une constante positive que l'on précisera.

Q11. En déduire qu'on peut, sans perdre de généralité, choisir un vecteur constant $\vec{e}$ de norme e et dirigé selon (Oy) de sorte que $H\vec{v} = \vec{u}_\theta + \vec{e}$ puis vérifier que la projection de cette relation sur $\vec{u}_\theta$ permet de retrouver l'équation de la trajectoire, avec $p = \dfrac{\mathcal{C}_a^2}{K}$.

II.2 – Correction relativiste pour la trajectoire de Mercure

La trajectoire de Mercure est en fait perturbée par les autres planètes du système solaire. Cependant, on sait depuis le XIX$^{\text{e}}$ siècle que, même après correction de ces influences gravitationnelles, l'axe des absides (la droite qui joint le périhélie et l'aphélie de la trajectoire de Mercure) tourne très lentement dans le sens direct et dans le plan de sa trajectoire de $\alpha = 42''$ (secondes d'arc) par siècle. Il n'est possible de rendre compte de ce phénomène que dans le cadre de la mécanique relativiste. Nous adopterons ici une expression corrigée de l'accélération utilisée ci-dessus :

$$\vec{a} = -\frac{K}{r^2}\left[1 + \gamma\frac{v_\theta^2}{c_0^2}\right]\vec{u}_r$$

où γ est une constante qui reste à évaluer, $v_\theta = \vec{v}\cdot\vec{u}_\theta$ est la composante orthoradiale de la vitesse et c_0 est la célérité de la lumière dans le vide. On notera qu'il s'agit toujours d'un problème à force centrale, avec en particulier la constante des aires $\mathcal{C}_a$.

Q12. Proposer, dans le cas de Mercure, une estimation numérique du rapport v_θ/c_0. En déduire une estimation de l'effet relativiste sur la rotation de Mercure, cumulé au bout d'un siècle. On pourra supposer que γ reste de l'ordre de grandeur de l'unité.

Pour tenir compte de ce qui précède, on cherche une solution des équations du mouvement avec correction relativiste sous la forme :

$$\vec{v} = \frac{K}{\mathcal{C}_a}\left[\vec{u}_\theta + \vec{e}(t)\right]$$

et on cherche à caractériser les variations lentes du vecteur $\vec{e}(t)$, appelé *vecteur excentricité* sous l'action du *supplément d'accélération* relativiste $\vec{a}_{\text{rel}} = -\dfrac{\gamma K}{r^2}\dfrac{v_\theta^2}{c_0^2}\vec{u}_r$, qu'on remplacera dans tout ce qui suit par sa valeur *moyenne* au cours d'une période T du mouvement *keplerien* (non perturbé).

Q13. Montrer que cette moyenne se met sous la forme $\langle\vec{a}_{\text{rel}}\rangle = A\gamma\dfrac{K}{\mathcal{C}_a}\vec{u}_z \wedge \vec{e}$ et expliciter la constante A en fonction des données ; on pourra dans la suite admettre que $A = 2{,}2\cdot10^{-14}$ SI.

Q14. Établir une relation de la forme $\dfrac{d\vec{e}}{dt} = \vec{\Omega}\wedge\vec{e}$; ce résultat est-il compatible avec la lente rotation signalée plus haut de l'axe des absides de $42''$ d'arc par siècle ? Le cas échéant, proposer une valeur numérique du coefficient γ. Dans le cadre de la théorie de la relativité générale d'Einstein, γ est un entier.

III – Propagation de la lumière dans un fluide en mouvement

III.1 – L'entraînement des ondes lumineuses dans l'eau

En 1851, Fizeau réalise une expérience d'interférence dans un dispositif présentant deux tubes contenant de l'eau en mouvement, en sens inverse. La figure 4 en présente le principe : dans deux tubes la célérité de lumière est respectivement dans le même sens et en sens inverse de la vitesse v de l'eau, liquide transparent d'indice n. La source de lumière utilisée est monochromatique, de longueur d'onde λ_0 (dans le vide).

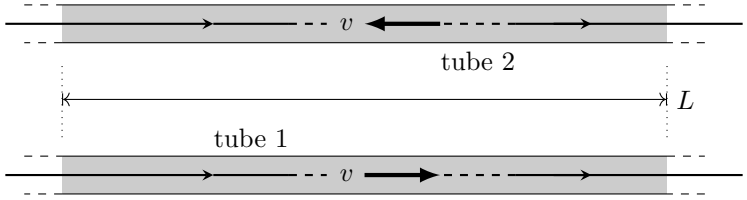


Figure 4 – Le principe de l'expérience de Fizeau

On notera respectivement c_0, c_1 et c_2 les célérités (vitesses de phase) de la propagation de la lumière dans le vide et dans les deux tubes, de même longueur L. On notera aussi $\Delta c = c_1 - c_2$ et $c_m = \sqrt{c_1 c_2}$ la célérité « moyenne » ; comme $|\Delta c| \ll c_m$ on peut aussi écrire $c_m \simeq \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$.

Q15. Exprimer la différence de temps de parcours $\Delta t = t_2 - t_1$ de la longueur L par la lumière dans les deux tubes. En déduire la différence de phase $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ acquise du fait de la propagation dans ces deux tubes en fonction de L, λ_0, c_0, c_m et Δc.

Le but de l'expérience était de distinguer entre plusieurs modèles théoriques de l'époque :

- le modèle *sans entraînement* de la lumière par l'eau, avec $\Delta c = 0$ et $c_m = c_0/n$;
- le modèle d'*entraînement total* de la lumière par l'eau, avec $\Delta c = 2v$ et $c_m = c_0/n$;
- le modèle d'*entraînement partiel* de la lumière, proposé par Fresnel en 1819, avec un raisonnement assez complexe aboutissant à $\Delta c = 2v\left[1 - 1/n^2\right]$ et $c_m = c_0/n$.

Si le dispositif est inséré au sein d'un système interférentiel, il sera possible de distinguer entre les différents modèles théoriques seulement si le déplacement de ΔN franges d'interférence (par rapport à une situation où l'eau est immobile) dépasse une valeur seuil $\Delta N_{\min}$ qui dépend de l'expérience. On supposera que la différence de marche au point d'observation ne dépend que de $\Delta\varphi$ calculé en **Q15**.

Q16. Quel est le déplacement ΔN dans un modèle *sans entraînement* ?

Q17. Dans le cadre du modèle d'*entraînement partiel*, montrer que la longueur minimale des tubes nécessaire au succès de l'expérience est :

$$L > L_{\min} = \Delta N_{\min} \frac{\lambda_0 c_0}{2v(n^2-1)}.$$

Faire et commenter l'application numérique si $n = 1{,}33$, $\lambda_0 = 550\,\text{nm}$, $v = 7\,\text{m/s}$ et $\Delta N_{\min} = 0{,}75$. Une telle longueur suffira-t-elle pour valider ou invalider le modèle d'*entraînement total* ?

III.2 – Le modèle classique des vitesses d'entraînement

On peut expliciter partiellement les modèles proposés dans un cadre mécanique. La célérité des ondes lumineuses relativement au référentiel $\mathcal{R}'$ *lié à l'eau* est $\vec{c}_{\text{ol}/\mathcal{R}'} = (c_0/n)\vec{u}_x$ tandis que la vitesse d'entraînement de ce référentiel relativement au référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$ est $\vec{v}_e = \pm v\vec{u}_x$ selon le tube étudié. Les célérités cherchées $\vec{c}_1$ et $\vec{c}_2$ sont alors les vitesses de la lumière relativement à $\mathcal{R}$, telles qu'elles se déduisent des lois de composition des vitesses.

Q18. Rappeler la loi de composition des vitesses de la mécanique classique. En déduire c_1 et c_2 puis Δc et c_m ; quel modèle retrouve-t-on ainsi ?

Les mesures de Fizeau ont conclu à la validité du modèle d'entraînement partiel de Fresnel.

III.3 – Le modèle relativiste pour les ondes lumineuses dans l'eau

À partir de 1905, un modèle nouveau se substitue au précédent : celui de la relativité restreinte. Dans ce cadre, et toutes les vitesses étant des grandeurs algébriques dirigées par (Ox), la loi de composition des vitesses prend la forme (admise ici) :

$$v_{M/\mathcal{R}} = \frac{v_e + v_{M/\mathcal{R}'}}{1 + \dfrac{v_e \cdot v_{M/\mathcal{R}'}}{c_0^2}}$$

si on note $v_{M/\mathcal{R}}$ (resp. $v_{M/\mathcal{R}'}$) la vitesse de M relativement au référentiel $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}'$) et v_e la vitesse d'entraînement de $\mathcal{R}'$ relativement à $\mathcal{R}$.

Q19. Écrire et commenter l'expression de $v_{M/\mathcal{R}'}$ en fonction de $v_{M/\mathcal{R}}$ et v_e. Que devient la loi d'addition relativiste si $v_{M/\mathcal{R}} = \pm c_0$? Commenter.

Q20. On considère maintenant que $v_{M/\mathcal{R}'} = c_0/n$ tandis que $v_e = \pm v$ avec $v \ll c_0$. Déterminer les vitesses c_1 et c_2 correspondantes dans $\mathcal{R}$.

Q21. En déduire les expressions de Δc et c_m. Est-il possible, dans l'expérience de Fizeau, de distinguer le modèle relativiste du modèle d'entraînement partiel de Fresnel ?

Partie B – Mécanique et célérité des ondes acoustiques

Ce problème **Partie B** étudie deux situations totalement **indépendantes entre elles** illustrant les liens entre la célérité c_a des ondes acoustiques dans divers substrats et les vitesses d'objets matériels :

- la partie **I** décrit le lien entre la vitesse d'avalanche des grains de sable des dunes et les ondes sonores émises à cette occasion : le *chant des dunes* ;
- la partie **II** s'intéresse à la propagation des ondes *acoustiques* dans un fluide globalement *entraîné* (comme par exemple l'eau d'un courant marin océanique).

I – Le chant des dunes

Le phénomène étudié ici est connu depuis très longtemps : il s'agit de l'émission d'ondes acoustiques dans l'air qui surmonte les dunes de sable lors de micro–avalanches, c'est le *chant des dunes*. Des observations scientifiques réalisées depuis la fin du XIX^{e} siècle fournissent les résultats suivante : la fréquence du son émis va de 60 Hz (désert) à 1 kHz (plages) ; le chant produit lors d'écoulements disparaît lorsque le sable est humide ou mélangé avec des poussières.

Une première interprétation est alors proposée, liant le son entendu à la résonance des ondes acoustiques *au sein des grains de sable* formant des cavités résonantes de la dimension d du diamètre des grains de sable eux-mêmes. On cherche à confronter ce modèle à quelques mesures récentes de fréquences moyennes de chant et de diamètres moyens des grains de sable (table 2, extrait de la thèse de S. Dagois–Bohy, 2010).

Dune	fréquence f, Hz	diamètre d, μm
Al Wagan (Oman)	80 ± 3	200 ± 70
Dumont (USA)	83 ± 7	174 ± 50
Eureka (USA)	90 ± 15	165 ± 50
Mar de dunas (Chili)	97 ± 4	168 ± 40
Omega 1 (Maroc)	100 ± 5	155 ± 20

Tableau 2 – Caractéristiques du chant de quelques dunes

Q22. Rappeler la relation liant la fréquence fondamentale f_1 d'oscillation d'une corde vibrante fixée aux deux extrémités d'une cavité de longueur d en fonction de la célérité c_a de l'onde. Sachant que la célérité des ondes acoustiques dans un solide (comme le sable) est nettement supérieure à sa célérité dans l'air ($\simeq 350\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ à 30°C), que penser de ce premier modèle ?

Une autre interprétation de ce phénomène a été proposée au *Laboratoire Matière et Systèmes Complexes* de l'université Paris–Cité. Dans ce cadre une partie de l'écoulement des grains de sable de la dune « a une vitesse homogène, comme un bloc solide ». On décrira la dune de sable comme un empilement compact de sphères de diamètre d, alignées en formant un angle α avec l'horizontale (figure 5, à gauche) et dont les grains de la couche supérieure sont susceptibles de glisser vers le bas.

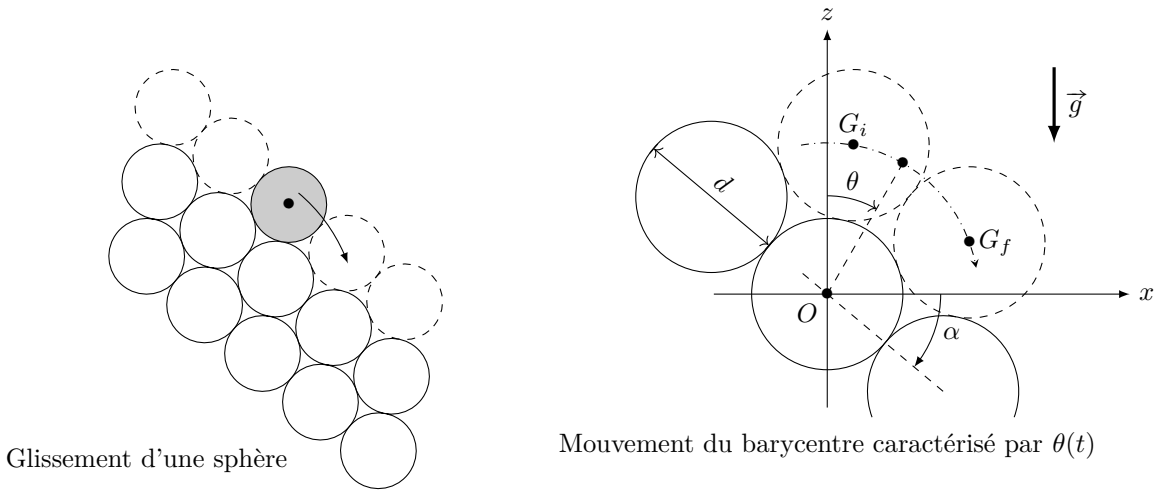


Figure 5 – Modèle de glissement d'une bille sur une couche de sable

On étudie (figure 5, à droite) le mouvement de glissement sans aucun frottement d'un grain de sable sphérique, homogène de masse m, dont le barycentre passe de la position initiale G_i à la position finale G_f ; il reste en permanence au contact des grains, supposés fixes, de la couche inférieure.

Q23. Exprimer en fonction de m, g, d et θ l'énergie potentielle de pesanteur du grain mobile. Montrer qu'il existe une valeur minimale $\alpha_{\min}$ de α qui empêche la position initiale de former un équilibre stable.

Q24. On ne suppose pas forcément que $\alpha > \alpha_{\min}$ mais, sous l'influence par exemple du vent, le grain étudié débute en G_i un mouvement de translation circulaire de centre O avec la vitesse v_i. En l'absence de tout frottement, déterminer sa vitesse v_f lorsque le centre du grain parvient en G_f en fonction de v_i, g, d et α. On pourra remarquer que $\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin(a)\sin(b)$.

Q25. Avant de recommencer à tourner autour du grain suivant, l'arrivée en G_f se traduit par un choc avec dissipation d'une fraction ϵ de l'énergie cinétique ; ainsi la translation circulaire suivante recommence avec $v_i'^2 = (1-\epsilon)v_f^2$. Expliciter $v_i'^2$ en fonction de v_i^2, ϵ, g, d et α et en déduire que la vitesse d'un grain tend vers une limite $v_{\lim}$ telle que $v_{\lim}^2 = \kappa g d$ où on exprimera la grandeur $\kappa > 0$ en fonction de α et ϵ.

On suppose enfin que le mouvement des grains pendant la totalité de l'avalanche se fait à vitesse quasiment constante v telle que $v^2 = \kappa g d$. Les grains de sable heurtent alors périodiquement la couche sur laquelle ils glissent et émettent le son identifié comme le chant de la dune.

Q26. Expliciter la fréquence f de l'émission sonore par l'avalanche des chocs des grains de sable. Les données de la table 2 sont elles compatibles avec ce modèle ? Si oui, estimer la constante κ. Selon vous, ce modèle reste-il pertinent dans le cas du chant des plages ?

II – Propagation des ondes acoustiques et entraînement par l'eau

On s'intéresse dans cette partie **II** à la propagation d'ondes acoustiques dans l'eau, en présence du champ de pesanteur d'intensité $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ et d'un éventuel mouvement d'ensemble de l'eau (circulation dans une canalisation, courant marin…) de vitesse uniforme et constante $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$. Ainsi, la pression et la vitesse dans l'eau seront caractérisées, en notations complexes, par :

$$p(\vec{r},t) = p_{\text{st}}(z) + p_1 \exp\left[\mathrm{i}\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right] \qquad \vec{v}(\vec{r},t) = v_0\vec{u}_x + \vec{v}_1 \exp\left[\mathrm{i}\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right]$$

où $p_{\text{st}}(z)$ désigne la répartition statique de pression (en l'absence d'onde) avec, à la surface libre $z = 0$ de l'eau, $p_{\text{st}}(0) = p_0 = 1\,\text{bar}$; on se limitera à $|p_1| \ll p_{\text{st}}(z)$ et $\|\vec{v}_1\| \ll v_0 \ll c_a$ où c_a désignera la célérité de l'onde ainsi étudiée. On rappelle l'équation dynamique de Navier–Stokes qui lie les évolutions de la pression p, de la vitesse $\vec{v}$ et de la masse volumique ρ en fonction de la viscosité dynamique de l'eau η :

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}\right] = -\overrightarrow{\text{grad}}\,p + \rho\vec{g} + \eta\,\Delta\vec{v}.$$

Q27. En déduire l'expression de dp_{st}/dz puis une forme simplifiée de l'équation de Navier–Stokes.

Dans toute la suite on pourra noter les expressions complexes de la pression $p(\vec{r},t) = p_{\text{st}}(z) + \underline{p}$, de la masse volumique $\rho(\vec{r},t) = \rho_0 + \underline{\rho}$ et de la vitesse $\vec{v}(\vec{r},t) = v_0\vec{u}_x + \underline{\vec{v}}$. Dans ces expressions, $p_{\text{st}}(z)$, ρ_0 et $v_0\vec{u}_x$ désignent les valeurs moyennes en l'absence d'onde tandis que $\underline{p}$, $\underline{\rho}$ et $\underline{\vec{v}}$ désignent les (petites) fluctuations de ces grandeurs dues à l'onde.

II.1 – Propagation et atténuation des ondes acoustiques

Q28. Rappeler la définition de la compressibilité χ de l'eau en en déduire le lien entre les fluctuations $\underline{p}$ de la pression et $\underline{\rho}$ de la masse volumique, en se limitant au premier ordre.

Dans l'eau, l'intensité acoustique (des sonars par exemple) est mesurée par $I_{\text{dB}} = 20\log_{10}\dfrac{|\underline{p}|}{p_{\text{ref}}}$ où $p_{\text{ref}} = 1\,\mu\text{Pa}$; les sonars les plus puissants atteignent (exceptionnellement) $I_{\text{dB}} = 240\,\text{dB}$, dépassant ainsi les chants des baleines qui atteignent au maximum $I_{\text{dB}} = 180\,\text{dB}$.

On s'intéresse d'abord à la propagation des ondes acoustiques dans un fluide parfait ($\eta = 0$) en l'absence de courant d'ensemble ($v_0 = 0$).

Q29. Établir les deux équations linéarisées $\rho_0\omega\underline{\vec{v}} = \vec{k}\,\underline{p}$ et $\vec{k}\cdot\underline{\vec{v}} = \chi\omega\underline{p}$. En déduire la célérité c_a des ondes acoustiques dans l'eau et faire l'application numérique.

Q30. Dans le cas des ondes émises lors du chant d'une baleine près de la surface libre de l'eau, estimer et commenter les amplitudes des ondes de masse volumique $|\underline{\rho}|$ et de vitesse $|\underline{\vec{v}}|$.

On cherche maintenant à connaître l'effet de la prise en compte de la viscosité de l'eau sur la propagation des ondes acoustiques. On exprime à cet effet l'équation de dispersion donnant $\vec{k}^2$ en fonction de ω, c_a et d'autres caractéristiques du fluide ($\vec{k}^2$ peut être une fonction complexe). En l'absence de viscosité, $\vec{k}^2 = f_0(\omega, c_a)$.

Q31. Montrer que $\vec{k}^2 = \dfrac{f_0(\omega, c_a)}{1 + \mathrm{i}\dfrac{\omega}{\omega_c}}$ et exprimer ω_c en fonction de η et χ. Proposer une interprétation simple de la grandeur ω_c et commenter sa valeur numérique.

Q32. On lit dans la littérature technique que l'atténuation des ondes acoustiques dans l'eau est faible dans le domaine audio basse fréquence ; à plus haute fréquence et pour les ultrasons elle s'exprime par un coefficient d'atténuation β qui s'exprime en décibel par kilomètre. Justifier cette affirmation puis exprimer le coefficient β en fonction notamment de la viscosité de l'eau, avant de proposer un application numérique pour deux domaines de fréquences dont vous justifierez le choix. Comparer aux mesures effectuées dans l'atlantique pour lesquelles $\beta \sim 0{,}12\,\mathrm{dB/km}$ aux fréquences audio, et conclure.

II.2 – Entraînement de l'onde acoustique par un courant d'ensemble

On revient ici à l'étude des ondes acoustiques dans un fluide parfait ($\eta = 0$) mais on tient compte de la vitesse d'ensemble de l'eau, uniforme et constante $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$; l'onde se propage dans une direction caractérisée par le vecteur d'onde réel $\vec{k} = k\vec{u}$ où $k > 0$ et $\vec{u}$ est un vecteur unitaire. La vitesse des courants océaniques en particulier vérifie $|v_1| \ll v_0 \ll c_a$.

Q33. Proposer un ordre de grandeur pour v_0, en kilomètre par heure. Expliciter ensuite $\mathrm{div}\,(\rho\vec{v})$ et $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}$ avec $\vec{v} = \vec{v}_0 + \underline{\vec{v}}$ et $\rho = \rho_0 + \underline{\rho}$ en vous limitant aux termes du premier ordre en $\underline{\rho}$ et $\underline{\vec{v}}$.

Q34. Montrer les deux équations $\rho_0 \underline{\vec{v}}(\omega - \Omega) = \underline{p}\,\vec{k}$ et $\vec{k}\cdot\underline{\vec{v}} = (\omega - \Omega)\underline{p}\,\chi$ et expliciter la grandeur Ω en fonction de v_0, k et $\vec{u}\cdot\vec{u}_x = \cos\theta$.

Q35. En déduire la célérité c'_a des ondes acoustiques en fonction de v_0, $\cos\theta$ et de la valeur c_a obtenue dans l'eau au repos. Peut-on parler de loi de composition des vitesses ?

Données numériques

Grandeur	notation	valeur	unité
Accélération de la pesanteur au sol	g	9,8	$\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$
Célérité de la lumière dans le vide	c_0	$3{,}00{\cdot}10^{8}$	$\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$
Compressibilité isentropique de l'eau	χ	$4{,}10{\cdot}10^{-10}$	$\mathrm{Pa^{-1}}$
Constante de la gravitation universelle	$\mathcal{G}$	$6{,}67{\cdot}10^{-11}$	$\mathrm{m^3{\cdot}s^{-2}{\cdot}kg^{-1}}$
Distance moyenne Jupiter–Soleil	d_{JS}	$7{,}78{\cdot}10^{11}$	m
Distance moyenne Jupiter–Io	d_{JI}	$4{,}22{\cdot}10^{8}$	m
Distance minimale de Mercure au Soleil	$r_{\min}$	$4{,}60{\cdot}10^{10}$	m
Distance maximale de Mercure au Soleil	$r_{\max}$	$6{,}98{\cdot}10^{10}$	m
Jour (solaire moyen)	24 h	86 400	s
Masse du Soleil	$M_\odot$	$1{,}99{\cdot}10^{30}$	kg
Masse volumique moyenne de l'eau	ρ_0	$1{,}00{\cdot}10^{3}$	$\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$
Période de révolution terrestre (année)	T_0	365	jour
Rayon moyen du Soleil	R_{S}	$6{,}96{\cdot}10^{8}$	m
Rayon moyen de Jupiter	R_{J}	$6{,}99{\cdot}10^{7}$	m
Seconde d'arc	$1''$	$4{,}85{\cdot}10^{-6}$	rad
Unité astronomique (distance Terre–Soleil)	a_0	$1{,}49{\cdot}10^{11}$	m
Viscosité dynamique de l'eau	η	$1{,}20{\cdot}10^{-3}$	Pa·s

Suite arithmético–géométrique

Si $u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$ où $|\alpha| < 1$, la suite réelle $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tend, pour $n \to \infty$, vers la limite $u_\infty = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$, quelle que soit la valeur initiale u_0.

Quelques intégrales trigonométriques

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0 \qquad \int_0^{2\pi} \cos^3\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^3\theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \pi$$

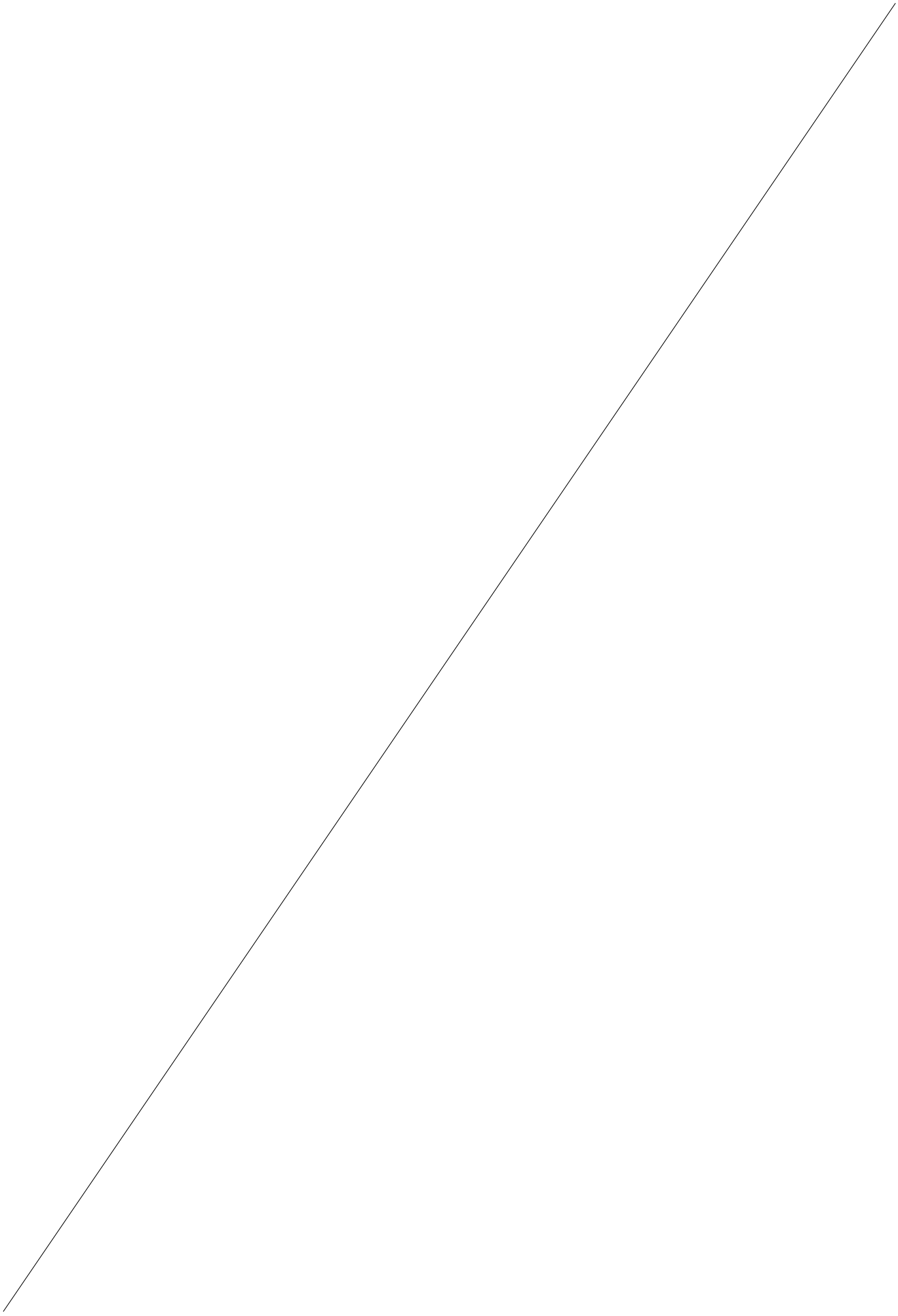
Analyse vectorielle en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{u}_z \qquad \mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\left(\vec{A}{\cdot}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{B} = A_x\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + A_y\frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + A_z\frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \qquad \mathrm{div}\left(F\vec{A}\right) = F\,\mathrm{div}\,\vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F \cdot \vec{A}$$

◇ Fin ◇

P055 - 29 avril 2025 - 11:27:30



Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Description et paramétrage du mouvement d'un point
- Modèle scalaire des ondes lumineuses
- Propagation d'un signal

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/pc