Concours Centrale-Supélec, France

Session 2025, filière PC

Physique 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie A (I à IV) : l'accélérateur linéaire, refroidissement et cavité résonante
- Partie A (V et VI) : électron dans la cavité et couplage des cavités
- Partie B : l'ondulateur

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/pc/2025/physique2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Physique 2

PC

4 heures Calculatrice autorisée

2025

Laser à électrons libres

Les lasers à électrons libres à rayons X (XFEL) produisent des rayons X cohérents en accélérant des électrons à travers des ondulateurs, qui sont des systèmes permettant de moduler spatialement le champ magnétique. Ces lasers génèrent des impulsions lumineuses ultra-brèves, de l'ordre de la femtoseconde (10^{-15} s), permettant d'étudier des dynamiques atomiques et moléculaires à des échelles temporelle et spatiale très fines, et très intenses. Il existe une dizaine de XFEL à travers le monde. Dans ce sujet, nous nous intéressons plus particulièrement au XFEL européen, installé près de Hambourg en Allemagne, qui a commencé à fonctionner en 2017.

Un laser à électrons libres est schématiquement constitué de trois éléments schématisés à figure 1 :

- un canon à électrons, qui sert à générer un faisceau d'électrons ;
- un accélérateur linéaire, qui accélère les électrons à une vitesse très proche de la vitesse de la lumière ;
- un ondulateur, dans lequel un champ magnétique oscillant spatialement dévie les électrons.

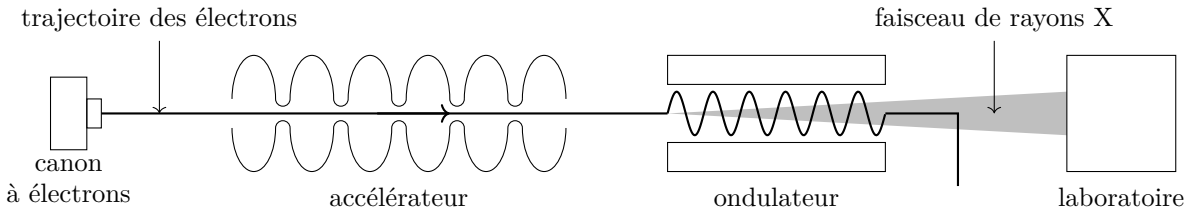


Figure 1 – Schéma d'un laser à électrons libres

Dans un laser à électrons libres les électrons ont une vitesse très proche de la vitesse de la lumière, un traitement rigoureux de leur mouvement nécessite alors de recourir aux concepts de relativité restreinte. Il est cependant possible d'obtenir des résultats approchés en adaptant simplement les équations de la mécanique classique. **La version adaptée des théorèmes est présentée dans la partie « Données et formulaire » située en fin de sujet. Au cours de cette épreuve, dans les questions portant sur l'étude du mouvement de l'électron dans le laser à électrons libres, il est suggéré aux candidats de n'utiliser que les théorèmes rappelés en fin de sujet, et de ne pas chercher à en formuler d'autres.**

Le problème comporte deux parties indépendantes. Le formulaire et les données sont regroupés en fin d'énoncé. Un document réponse est à rendre avec la copie.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par leur numéro souligné. Il est alors demandé d'expliciter clairement la démarche, les choix, et de les illustrer par un schéma le cas échéant. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Partie A – L'accélérateur linéaire

Dans un laser à électrons libres l'enjeu est d'accélérer des électrons à des vitesses très proches de la vitesse de la lumière en utilisant des champs électriques. Ces derniers sont générés dans des dispositifs appelées cellules TESLA dont une photographie est montrée à la figure 2. L'accélérateur du XFEL est constitué d'un grand nombre de ces cellules accélératrices. Dans cette partie, nous étudions successivement : le refroidissement d'une cellule TESLA, le champ électromagnétique dans une cellule ainsi que la dynamique d'un électron en son sein.



Figure 2 – Photographie montrant une cellule TESLA du XFEL européen. *Source : wikipedia.*

I – Puissance dissipée dans la cellule TESLA

La cellule TESLA est plongée dans un bain d'hélium liquide à la température de 2,0 K pour que ses parois soient maintenues dans un état supraconducteur. Pour des raisons qui seront explicitées plus loin, tout se passe comme si une certaine puissance thermique était générée à l'intérieur de la cellule. Cette puissance est transmise vers l'extérieur et vaporise l'hélium liquide qu'il est donc nécessaire de remplacer en permanence.

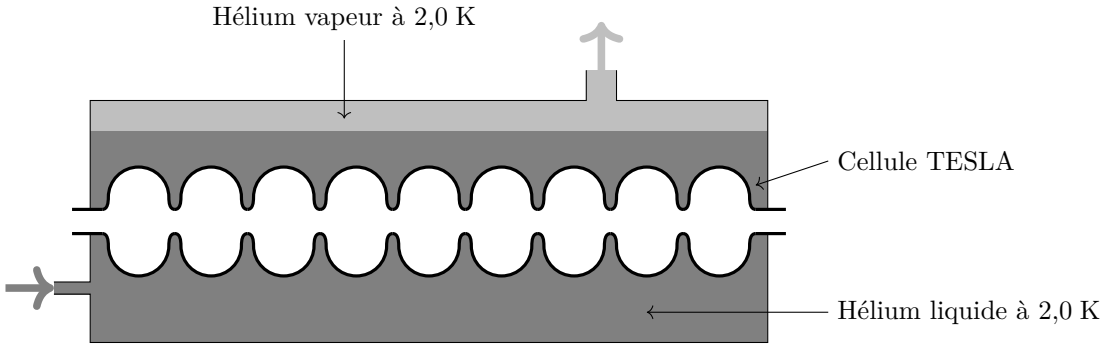


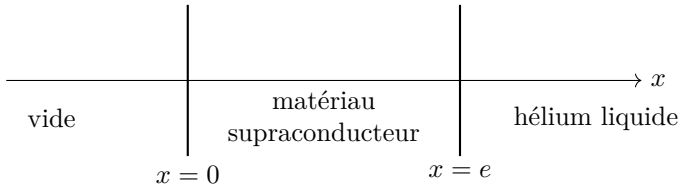
Figure 3 – Schéma d'une cellule TESLA dans son bain d'hélium liquide. L'injection d'hélium liquide et l'évacuation de l'hélium vapeur sont indiquées par des flèches épaisses.

L'hélium entre à l'état liquide, à une température de 2,0 K et il sort à l'état gazeux à la même température. La pression est constante dans tout le volume d'hélium, égale à 31 kPa.

Q1. Le débit massique d'hélium liquide nécessaire pour maintenir un volume constant d'hélium liquide est de 2×10^{-4} kg·s^{-1} [1]. En déduire la puissance dissipée dans les parois de la cellule.

II – Température de la paroi interne de la cavité

La puissance thermique générée à l'intérieur de la cellule TESLA conduit à une élévation locale de la température de la paroi. Le but de cette section est d'estimer la température de la face interne de la cellule. En raison de la faible épaisseur de la paroi, on adopte une géométrie simple : cartésienne unidimensionnelle selon l'axe (Ox). On considère que la paroi s'étend entre $x = 0$ et $x = e$, avec $e = 2{,}8$ mm. Du vide se trouve dans le demi-espace $x < 0$, tandis que de l'hélium liquide se trouve dans la partie de l'espace telle que $x > e$. On note T_s la température de la paroi en $x = e$. Il n'y a pas de puissance volumique dissipée dans le matériau. On note κ la conductivité thermique du matériau supraconducteur.



Q2. En raisonnant sur un élément de volume que l'on décrira précisément, établir l'équation de la diffusion dans le matériau supraconducteur en régime stationnaire.

En conséquence de la puissance thermique générée dans la cellule TESLA, il existe flux thermique dans le matériau orienté depuis le vide vers l'hélium liquide. On le modélise en considérant un vecteur densité de flux thermique non nul, uniforme et stationnaire entre $x = 0$ et $x = e$: $\vec{j} = j_0 \vec{e_x}$ avec $j_0 = 30$ Wm^{-2}.

Q3. Établir l'expression de la température dans la paroi en fonction de x, κ, j_0, e et T_s.

Il existe une résistance thermique à l'interface entre le matériau supraconducteur et l'hélium liquide, en $x = e$, que l'on modélise par une relation linéaire entre le vecteur densité de courant et la différence de température entre la surface du matériau supraconducteur T_s et la température de l'hélium liquide T_f :

$$j_0 = h\,(T_s - T_f)$$

où h est une constante réelle positive, qui dépend en particulier de l'état de surface du matériau supraconducteur.

Q4. Établir l'expression de la température du matériau supraconducteur en $x = 0$ en fonction de e, κ, h, j_0 et T_f. Faire l'application numérique pour les deux cas suivants :

- cas 1 : un matériau supraconducteur de mauvaise qualité (beaucoup d'impuretés chimiques et de défauts cristallographiques), avec un mauvais état de la surface en contact avec l'hélium (rugosité importante, nombreux défauts, impuretés chimiques) : $\kappa = 2{,}0\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ et $h = 1{,}0 \times 10^2\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$;
- cas 2 : un matériau supraconducteur de bonne qualité (peu d'impuretés chimiques et bonne qualité cristallographique), avec un bon état de la surface en contact avec l'hélium (lisse, pas impuretés chimiques) : $\kappa = 28\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ et $h = 2{,}4 \times 10^3\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$.

III – La cavité électromagnétique résonante

Dans cette partie, on s'intéresse au le champ électromagnétique régnant à l'intérieur de la cellule TESLA. Pour limiter la taille de l'accélérateur il n'est pas envisageable d'utiliser des champs électriques statiques. Afin de générer des champs de grande amplitude on exploite plutôt les résonances de la cellule TESLA qui se comporte comme une cavité. Dans cette section on étudie les modes propres du champ électromagnétique dans une cavité résonante.

On modélise une cavité électromagnétique résonante par une coquille cylindrique d'axe (Oz), de rayon intérieur R, d'épaisseur e, de dimension infinie dans la direction (Oz). La coquille cylindrique est constituée par un matériau supraconducteur. Du vide se trouve dans la cavité.

Soit M un point quelconque situé dans le vide à l'intérieur de la cavité, que l'on repère avec les coordonnées cylindriques. On admet que le champ électrique au point M s'écrit sous la forme :

$$\vec{E}(M,t) = E(r,t)\vec{e_z}$$

et le champ magnétique s'écrit sous la forme :

$$\vec{B}(M,t) = B(r,t)\vec{e_\theta}.$$

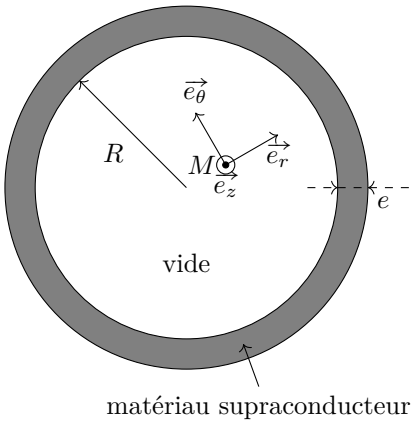


Figure 4

Q5. Montrer que E dans le vide vérifie l'équation suivante :

$$\Delta\, E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0.$$

On cherche le champ électrique sous la forme d'une onde stationnaire :

$$E(r,t) = E_0\xi(t)\psi(r),$$

où E_0 est une constante homogène à un champ électrique et les fonctions ξ et ψ sont sans dimension.

Q6. Montrer que la fonction ξ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} - A\xi = 0,$$

et que la fonction ψ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}r} - \frac{A}{c^2}\psi = 0,$$

où A est une constante réelle. Justifier que A est strictement négative.

Pour la suite, on introduit ω la pulsation de l'onde électromagnétique telle que $A = -\omega^2$ et on introduit le vecteur d'onde $\vec{k}$ dont le module vérifie $k = \frac{\omega}{c}$ dans le vide. On admet que ξ et ψ s'écrivent sous la forme :

$$\xi(t) = -\sin(\omega t) \qquad \text{et} \qquad \psi(r) = J_0(kr)\ ;$$

où J_0 est une fonction de Bessel d'ordre 1. La courbe représentative de $J_0(x)$ en fonction de la variable x est donnée dans la partie « Données et formulaire ». On admet enfin que le matériau supraconducteur impose un nœud pour le champ électrique : le champ électrique s'annule donc en $r = R$.

Q7. Exprimer les trois plus petites pulsations ω_1, ω_2 et ω_3 que peut prendre le champ électrique dans cette cavité résonante en fonction de R, x_{01}, x_{02}, x_{03} et c ; où x_{01}, x_{02} et x_{03} sont les trois premières valeurs de x pour lesquelles la fonction J_0 s'annule.

Q8. Pour les cavités utilisées dans le laser à électrons libres européen $\omega_1 = 2\pi \times 1{,}3\ 10^9$ rad.s^{-1}. En déduire la valeur numérique de R.

Q9. Exprimer le champ magnétique dans la cavité pour la pulsation ω_1, en fonction de la fonction J_1, E_0, c, r, ω_1, t, où J_1 est la dérivée de la fonction J_0. On suppose que le champ magnétique a une valeur moyenne temporelle nulle.

Q10. On veut $E_0 = 50$ MV$\cdot$m^{-1} pour la pulsation ω_1. En déduire l'amplitude du champ magnétique en $r = R$. On pourra se servir de la courbe de la fonction J_1, disponible dans le formulaire, pour estimer la valeur de $J_1(x)$ pour une valeur de x donnée.

Ainsi, il existe un champ magnétique qui varie au cours du temps à la frontière entre le vide et la paroi de la cavité. Ce champ magnétique variable induit des courants à la surface de la cavité supraconductrice. Le matériau supraconducteur présente une très petite résistance surfacique qui dissipe une partie de ces courants : c'est l'origine de la puissance thermique générée dans la cellule, dont les effets ont été étudiés aux questions **Q1** à **Q4**.

IV – Choix du matériau supraconducteur

Il est indispensable de maintenir le caractère supraconducteur de la paroi de la cavité. En effet, en cas de perte de cette caractéristique la résistivité du matériau augmenterait brutalement tout comme les pertes par effet Joule des courants induits dans les parois. Cela conduirait, dans le meilleur des cas, à une diminution de l'amplitude du champ électrique accélérateur, et dans le pire des cas, à une destruction de la cavité à cause d'un échauffement trop violent.

Il existe deux causes de pertes de la supraconductivité :

- si la température du matériau dépasse une température critique T_c ;
- si le matériau est soumis à un champ magnétique dépassant un champ magnétique critique B_c.

Les valeurs numériques de T_c et de B_c dépendent de chaque matériau. Le tableau 1 donne les valeurs numériques pour différents matériaux.

matériau (symbole)	T_c (K)	B_c (mT)
Plomb (Pb)	7.1	80
Niobium (Nb)	9.2	200
YBaCuO ($Y_{1.2}Ba_{0.8}CuO_4$)	93	10

Tableau 1

Q11. En utilisant les applications numériques des questions **Q4** et **Q10**, indiquer le matériau qui vous semble le plus adapté pour les parois de la cavité supraconductrice.

V – Mouvement d'un électron dans la cavité résonante

Nous allons maintenant étudier la dynamique d'un électron dans la cavité résonante.

Q12. Dans les cavités résonantes de l'accélérateur du laser à électrons libres, les électrons évoluent dans des champs électriques de l'ordre de 10 $\mathrm{MV \cdot m^{-1}}$. Vérifier que le poids est alors bien négligeable devant la force électrique.

Dans toute la suite du sujet, on négligera alors le poids devant la force électrique.

Pour décrire le mouvement d'une particule dont la vitesse du même ordre que la vitesse c de lumière dans le vide il faut recourir à la relativité restreinte en introduisant le facteur de Lorentz :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

où v est la norme de la vitesse de la particule.

Q13. Montrer que, lorsque v est proche de c, on peut écrire :

$$1 - \frac{v}{c} = \frac{1}{2\gamma^2}.$$

Dans le cadre de la relativité restreinte, l'énergie cinétique d'une particule est $E_c = (\gamma - 1)\, mc^2$, avec γ le facteur introduit à la question précédente.

Q14. Montrer que l'on retrouve l'expression classique de l'énergie cinétique lorsque v est petit devant c.

On donne dans le tableau 2 les valeurs de γ et $1 - \frac{v}{c}$ pour des électrons à des valeurs d'énergie cinétique E_c typiques de celles d'un XFEL.

Q15. Calculer numériquement les valeurs manquantes (il n'est pas nécessaire de recopier tout le tableau).

E_c (eV)	1×10^8	1×10^9	5×10^9	1×10^{10}	2×10^{10}
γ	2×10^2	2×10^3	1×10^4	2×10^4	
$1 - \frac{v}{c}$	$1{,}3 \times 10^{-5}$	$1{,}3 \times 10^{-7}$	$5{,}3 \times 10^{-9}$	$1{,}3 \times 10^{-9}$	

Tableau 2 – Valeurs numériques des grandeurs cinétiques pour un électron dans la cavité résonnante.

On constate ainsi que dans un laser à électrons libres, et en particulier dans l'accélérateur, les électrons ont une vitesse très proche de celle de la vitesse de la lumière dans le vide.

De façon plus réaliste que précédemment la cavité est désormais supposée finie selon l'axe z : deux plaques de matériaux supraconducteurs se trouvent en $z = -\frac{H}{2}$ et $z = +\frac{H}{2}$. Deux petites ouvertures sur l'axe (Oz) permettent à des particules d'entrer et de sortir de la cavité. Le champ électromagnétique est nul à l'extérieur. Par ailleurs, on admet que le champ électrique le long de l'axe (Oz) s'écrit :

$$\vec{E}(r = 0,\ t) = -E_0 \sin(\omega_1 t)\, \vec{e_z}$$

avec $\omega_1 = 2\pi \times 1{,}3\ 10^9$ rad.s^{-1} et $E_0 = 50$ $\mathrm{MV \cdot m^{-1}}$, comme vu précédemment.

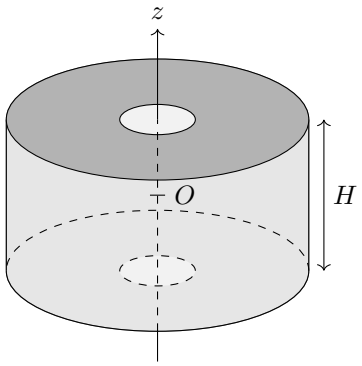


Figure 5

Avant d'entrer dans la cavité les électrons sont accélérés à une vitesse très proche de c tel que l'on considérera $\vec{v}(t = 0) = c\, \vec{e_z}$, conformément à la discussion menée dans les questions précédentes. On considère un électron qui entre dans la cavité à $t = 0$ en $r = 0$, $z = -\frac{H}{2}$. Sous l'influence du champ électrique il est accéléré et son énergie cinétique varie. Néanmoins cette augmentation est suffisamment faible pour que l'on puisse continuer à considérer que sa vitesse reste constante et égale à c. Par contre, son énergie cinétique varie. Au terme de sa traversée de la cavité l'électron sort par l'ouverture en $z = \frac{H}{2}$ à $t = \frac{T_1}{2}$, où T_1 est la période temporelle du champ électrique.

Q16. Déterminer la valeur numérique de H.

Q17. En utilisant le théorème de la puissance cinétique adapté à la relativité restreinte donné dans la section « Données et formulaire », exprimer la variation d'énergie cinétique de l'électron lors de son passage dans la cavité en fonction de E_0, ω_1, c et e. Faire l'application numérique.

Pour l'accélérateur linéaire du XFEL, l'énergie cinétique des électrons passe de 1 GeV à 10 GeV.

Q18. Combien faut-il de cavités pour obtenir un tel changement d'énergie ? En déduire une estimation de la longueur de l'accélérateur linéaire du XFEL.

VI – Couplage des cavités

Dans les faits et comme il peut être vu sur la figure 2, dans une cellule TESLA les cavités sont regroupées par neuf pour augmenter l'énergie cinétique de l'électron jusqu'aux valeurs voulues. La partie supérieure de la figure 7 en montre un schéma en coupe. Dans toute cette section on note (Oz) l'axe de symétrie de la cellule TESLA comme indiqué sur la figure 7.

Un champ électrique stationnaire est mis en place dans l'ensemble de la cellule afin de relier les neuf cavités. Pour caractériser ce champ, il est nécessaire d'établir la relation de dispersion des ondes électromagnétiques dans la cellule. Pour cela, on adopte une analogie électrocinétique. Chaque cavité est modélisée par un circuit LC. L'ouverture qui permet le passage des électrons d'une cavité à l'autre introduit un couplage : une variation du champ électrique dans une cavité entraîne une modification de celui dans ses voisines. Ce couplage est modélisé par un condensateur de capacité C_c entre deux circuits LC consécutifs.

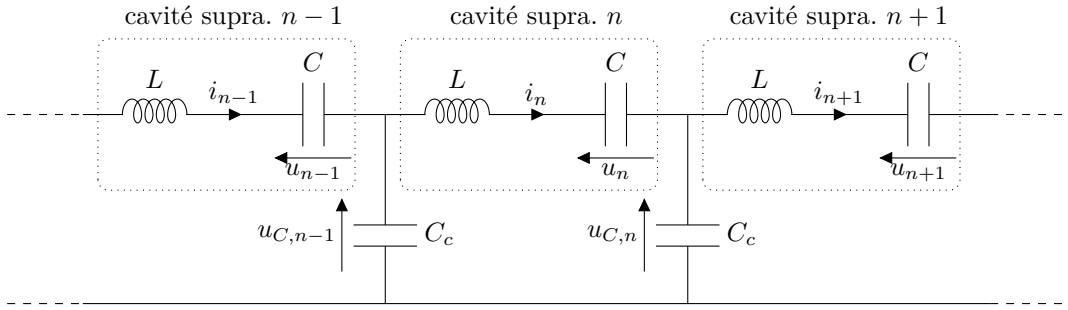


Figure 6 – Représentation schématique de l'analogie électrocinétique, *supra.* est une abréviation pour *supraconductrice.*

L'intensité i_k est l'analogue du champ électrique dans la cavité numéro k. On note H la longueur d'une cavité.

Q19. Établir la relation entre i_{n-1}, i_n, i_{n+1}, leurs dérivées et L, C ainsi que C_c.

Q20. Montrer que dans cette chaîne d'oscillateurs harmoniques les pulsations Ω dépendent des vecteurs d'onde k selon la relation de dispersion :

$$\Omega^2 = \Omega_a^2 \left(1 - \beta \cos\left(kH\right)\right)$$

avec

$$\Omega_a^2 = \frac{1}{\Gamma L} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{2\Gamma}{C_c} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\Gamma} = \frac{1}{C} + \frac{2}{C_c}.$$

Afin de vérifier que cette relation de dispersion établie à partir d'une équivalence avec un circuit électrique est également valable pour la chaîne de cavités supraconductrices on utilise les données de simulations présentées dans l'article [3]. Les simulations ont été réalisées avec un code dédié qui a permis de calculer le champ électromagnétique en tout point de la cellule. Les auteurs de la publication ont montré que la cellule des neuf cavités présente neuf modes propres pour le champ électromagnétique, dont les fréquences sont données dans le tableau 3.

On rappelle que l'axe (Oz) est confondu avec l'axe de la cellule TESLA. La figure 7 montre l'évolution de $E_z = \vec{E}.\vec{e_z}$ en fonction de z pour trois de ces modes propres. On peut considérer qu'il y a un nœud de champ électrique aux deux extrémités de la cellule.

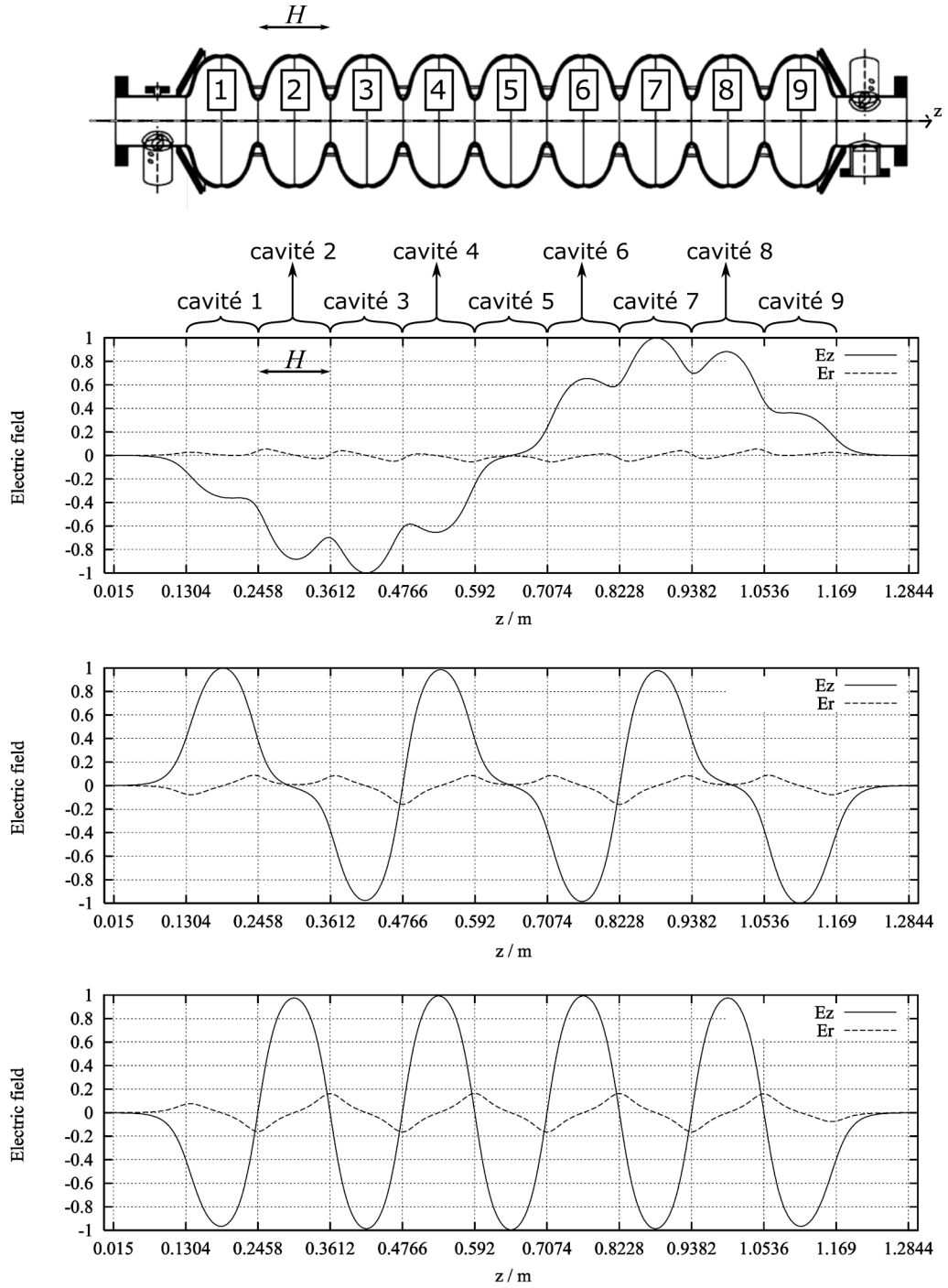


Figure 7 – Figure en haut : schéma en coupe d'une cellule TESLA (d'après [2]), constituée de neuf cavités supraconductrices couplées ; l'axe z est indiqué sur ce schéma. Chaque cavité est numérotée de 1 à 9. Les trois courbes en dessous montrent l'évolution du champ électrique en fonction de z pour trois modes propres de la cavité. Les courbes en traits pleins sont les courbes qui nous intéressent : elles montrent la composante selon z du champ électrique. Les courbes en pointillées ne nous intéressent pas ici. La position de chaque cavité est indiqué sur les courbes à l'aide de leur numéro. D'après [3].

mode	fréquence de résonance (GHz)	mode	fréquence de résonance (GHz)
1	1,2756	6	1,2924
2	1,2776	7	1,2955
3	1,2807	8	1,2976
4	1,2845	9	1,2983
5	1,2885		

Tableau 3 – Fréquences de résonance des premiers modes des ondes stationnaires.

Q21. Afin de mieux comprendre ces résultats, on étudie, **uniquement dans cette question**, une corde vibrante de longueur L, fixée à ses deux extrémités. Sans justification, représenter l'allure de la corde pour les quatre premiers modes propres d'oscillation de la corde. Notons f_i la fréquence du mode propre numéro i. La suite des valeurs f_i est-elle croissante ou décroissante ?

Q22. Par analogie, à partir de la question précédente, indiquer à quelles fréquences de résonance correspondent les trois modes propres du champ électrique présentés à la figure 7. On pourra raisonner par analogie avec la corde vibrante étudiée à la question précédente. Soient k le vecteur d'onde de l'onde stationnaire et H la longueur d'une cavité supraconductrice dans la direction z, que vaut le produit kH ?

Sur la figure 1 présentée sur le document réponse, on a tracé le carré de la fréquence de résonance en fonction de la grandeur $-\cos(kH)$ pour quatre autres modes propres.

Q23. Ajouter sur ce graphique les trois points correspondant aux trois modes propres étudiés à la question précédente. La relation de dispersion donnée par l'équation **Q20** est-elle validée ? Si oui, que vaut le coefficient de couplage β pour la structure étudiée dans ces simulations ?

On choisit d'exciter une onde stationnaire sur le mode propre numéro 9, de fréquence $f_9 = 1{,}2983$ GHz dans le tableau 3. L'origine du temps est choisie de manière à ce que la partie temporelle du champ électromagnétique s'écrive sous la forme $\sin(2\pi f_9 t)$. Sur la figure 2 du docuemnt réponse, quatre cavités de la cellule TESLA sont représentées à différents instants, indiqués au-dessus de chaque schéma (T_0 représente la période temporelle du champ électromagnétique). La position d'un électron est indiquée par un point noir : cet électron avance dans la cellule au cours du temps, il traverse deux cavités lors d'une période du champ électromagnétique.

Q24. Compléter cette figure en traçant l'évolution de la composante du champ électrique selon l'axe (Oz) en fonction de z sur les graphiques en dessous des cellules TESLA. Indiquer ensuite à l'aide d'un vecteur, la force électrique subie par l'électron, sur chaque schéma.

Partie B – L'ondulateur

Après avoir été accélérés, les électrons abordent l'ondulateur qui est l'élément central du laser à électrons libres. Dans cette structure les électrons sont déviés par des champs magnétiques et suivent une trajectoire périodique dans l'espace : ils sont donc accélérés. Une particule chargée accélérée émet un rayonnement, ici sous forme d'impulsions ultracourtes de rayons X. Sur le dessin d'illustration de la figure 8, les électro-aimants de l'ondulateur sont schématisés par leur moment magnétique équivalent. Ils génèrent un champ magnétique oscillant dans l'espace. La trajectoire des électrons dans ce champ magnétique et le faisceau de rayons X émis sont également représentés sur la figure 8

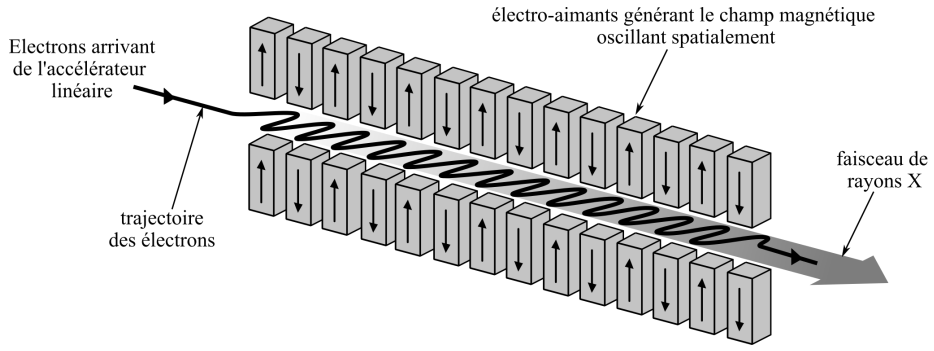


Figure 8 – Représentation schématique du fonctionnement de l'ondulateur.

I – Trajectoire des électrons

En première approximation on considère que les champs magnétiques périodiques générés par les aimants peuvent s'écrire $\vec{B} = B_0 \cos(k_u z)\vec{e_y}$ avec $k_u = \frac{2\pi}{\lambda_u}$ où λ_u est la périodicité spatiale du champ. L'électron pénètre dans l'ondulateur en O à l'instant $t = 0$ avec la vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e_z}$. Dans ce qui suit on étudie le mouvement d'un électron dont la vitesse est très proche de la vitesse de la lumière : $\gamma \gg 1$.

Q25. Montrer que l'énergie cinétique de l'électron reste constante au cours du mouvement dans l'ondulateur. En déduire que la constante de Lorentz γ et que la norme de la vitesse de l'électron restent constantes.

Q26. Établir le système d'équations régissant mouvement de l'électron dans l'ondulateur. On négligera le poids devant la force magnétique.

La vitesse selon z oscille autour d'une valeur v_m : on a $\dot{z} = v_m + \delta v_z$ avec δv_z une fonction périodique dans le temps, petite devant v_m. On commence par négliger δv_z devant v_m, ce qui permet d'écrire $z(t) = v_m t$ et $\dot{z} = v_m$. **Attention :** $\ddot{z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta v_z) \neq 0$.

Q27. Montrer que :

$$x(t) = K\frac{1}{\gamma k_u}\left(1 - \cos\left(v_m k_u t\right)\right)$$

et donner l'expression de K en fonction des paramètres du problème.

Q28. En considérant que $\frac{K}{\gamma} \ll 1$, utiliser un développement à l'ordre 1 en $\frac{K^2}{\gamma^2}$ puis montrer que :

$$\dot{z}(t) = v_0\left(1 - \frac{K^2}{4\gamma^2}\right) + \frac{K^2 v_0}{4\gamma^2}\cos\left(2v_m k_u t\right).$$

Q29. Exprimer alors v_m en fonction de c, K et γ uniquement, en utilisant la relation démontrée à la question **Q13**.

Le coefficient K qui apparaît dans les calculs est un paramètre important pour caractériser les lasers à électrons libres. Pour l'ondulateur SASE 1 du XFEL européen, on a $K = 2$ et $\lambda_u = 4{,}0$ cm.

Q30. En déduire la valeur numérique de la norme du champ magnétique. On pourra prendre $v_m = c$ pour cette application numérique. Commenter.

II – Rayonnement émis

Comme indiqué plus tôt, l'électron accéléré dans l'ondulateur émet une onde électromagnétique. Les ondes électromagnétiques qu'il émet au fur et à mesure de sa trajectoire dans l'ondulateur peuvent interférer. Nous allons étudier le résultat de ces interférences dans cette section.

À l'instant t_1, l'électron se trouve en $z = z_1$ lorsqu'il émet alors une onde électromagnétique. Sur le schéma de la figure 9, l'électron est représenté par un point, sa trajectoire est indiquée en pointillées, et l'onde qu'il est en train d'émettre est représentée très schématiquement en trait fin continu.

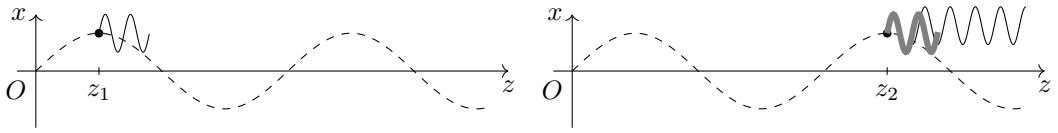


Figure 9 – Représentation schématique de l'émission du rayonnement par l'électron à t_1 et t_2.

À l'instant t_2, l'électron a parcouru une période de sa trajectoire sinusoïdale (voir la figure 9 à droite) : il se trouve en $z_2 = z_1 + \lambda_u$ et rayonne alors une nouvelle onde électromagnétique. Cette onde qui est émise en $t = t_2$ doit interférer constructivement avec l'onde qui a été émise par le même électron en $t = t_1$. Sur le schéma à droite de la figure 9 l'onde émise à l'instant t_1, qui s'est propagée, est dessinée en trait fin noir. L'onde qui est en train d'être émise à $t = t_2$ est représentée en trait épais gris.

Pour modéliser le système, on considère un ensemble de N sources situées le long de l'axe (Oz) (avec $x = 0$), comme représenté sur la figure 10.

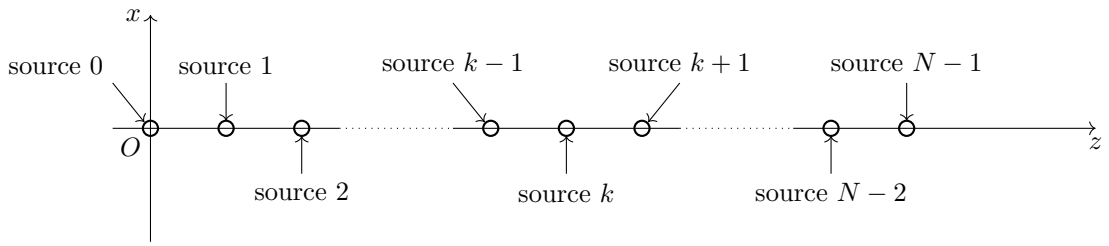


Figure 10

La p-ème source, qui se trouve en $z_p = p\lambda_u$ émet une onde électromagnétique vers les z croissants que l'on écrit sous la forme :

$$s_p(z,t) = S_0 \cos\left(\alpha \times \left(t - p\frac{\lambda_u}{v_m}\right) - k \times (z - p\lambda_u)\right)$$

où S_0, α et k sont respectivement l'amplitude, la pulsation et le vecteur d'onde de l'onde électromagnétique, et v_m est la vitesse moyenne de l'électron selon la direction z, trouvée à la question **Q29**.

Q31. Justifier l'expression de s_p.

On place un détecteur en un point M situé sur l'axe (Oz) en un point de coordonnée $z > N\lambda_u$. Ce détecteur reçoit l'ensemble des ondes électromagnétiques émises par les sources. On introduit $s_N(t)$ le signal total reçu par le détecteur :

$$s_{\text{tot},N}(t) = \sum_{p=0}^{N-1} s_p(z,t).$$

Q32. Montrer que l'amplitude de $s_{\text{tot},N}$ s'écrit sous la forme :

$$S_{0,N} = S_0 \left| \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\left(\frac{1}{v_m} - \frac{1}{c}\right)\alpha\lambda_u\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_m} - \frac{1}{c}\right)\alpha\lambda_u\right)} \right|.$$

Q33. Montrer que l'amplitude de $s_{\text{tot},N}$ est maximale pour les fréquences F_q telles que :

$$F_q = \frac{c}{\lambda_u} \frac{2\gamma^2}{1 + \frac{K^2}{2}} q$$

où q est un entier naturel non nul.

Pour l'ondulateur SASE1 du XFEL européen, on a $K = 2$ et $\lambda_u = 4{,}0$ cm et les électrons ont une énergie cinétique égale à 17,5 GeV, ce qui correspond à $\gamma = 3{,}4 \times 10^4$.

Q34. En déduire la longueur d'onde correspondant à la plus petite fréquence d'interférences constructives F_1.

La figure 11 montre l'allure de $S_{0,N}$ en fonction de F. Le tracé a été fait pour $N = 6$.

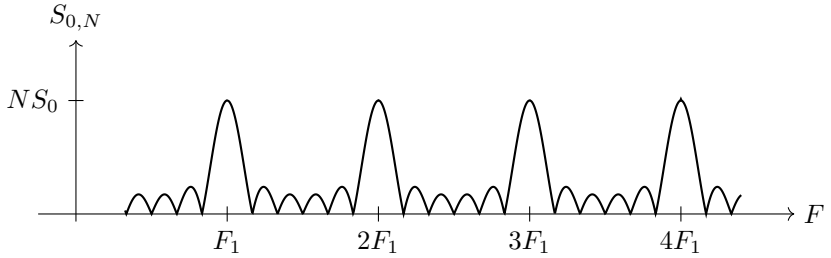


Figure 11

On admet que la largeur à mi-hauteur des pics principaux (ceux centrées autour des fréquences multiples de F_1) est égale à :

$$\Delta F = \frac{F_1}{N}.$$

Pour l'ondulateur SASE1 du XFEL européen, dans les mêmes conditions qu'à la question précédente ($K = 2$, $\lambda_u = 4{,}0$ cm, $\gamma = 3{,}4 \times 10^4$), $\frac{\Delta F}{F_1} = 1{,}5 \times 10^{-3}$.

Q35. En déduire la valeur de N. Commenter, en sachant que la longueur totale de l'ondulateur SASE1 du XFEL européen est de 175 m.

Dans cette partie, nous avons montré que F_1 augmente avec γ^2. On justifie donc *a posteriori* le fait de chercher à accroître le facteur γ autant que possible dans l'accélérateur linéaire.

III – Influence de l'onde émise sur le mouvement des électrons

Dans la partie précédente nous avons montré qu'un électron qui traverse l'ondulateur émet une série d'impulsions à la fréquence :

$$F_1 = \frac{c}{\lambda_u} \frac{2\gamma^2}{1 + \frac{K^2}{2}}. \tag{1}$$

On aimerait exploiter ces impulsions de rayons X pour faire des mesures. Or, le flux d'électrons qui traverse l'ondulateur est continu et chaque électron émet son propre train d'impulsions. Ces trains d'impulsions ne sont pas en phase, ce qui fait qu'un observateur reçoit les rayons X en continu et non par des impulsions.

Le but de cette dernière partie d'étudier l'influence de l'onde électromagnétique émise par les électrons sur eux-mêmes. Pour étudier le mouvement des électrons dans l'ondulateur en prenant en compte l'onde électromagnétique qu'ils émettent, on peut montrer qu'il faut résoudre les deux équations différentielles couplées suivantes, portant sur les fonctions φ et η :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = 2k_u c\eta \\ \dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{C^2}{2k_u c} \sin\varphi \end{cases} \tag{2}$$

où C est une constante dépendant des paramètres de l'ondulateur. La signification physique des fonctions φ et η n'est pas importante. On donne les conditions initiales suivantes : $\varphi(t = 0) = \varphi_0$ et $\eta(t = 0) = \eta_0$. Un traitement rigoureux du problème nécessite de recourir à des simulations numériques.

La méthode d'Euler est la procédure numérique la plus simple pour résoudre des équations différentielles du premier ordre avec une condition initiale. On veut résoudre le système d'équations 2 entre $t = 0$ et $t = t_f$ avec un pas de calcul δt, ce qui donne $N = \delta t / t_f$ points de calcul. Le schéma d'Euler explicite permet d'obtenir deux suites de valeurs (φ_i) et (η_i) qui approximent respectivement les fonctions $\varphi(t)$ et $\eta(t)$.

Q36. Établir les relations de récurrence permettant d'obtenir les valeurs de φ_i et η_i.

À l'aide de méthodes numériques, on simule ainsi le mouvement des électrons dans l'ondulateur en prenant en compte leur interaction avec l'onde électromagnétique. Le schéma de la figure 12 montre la trajectoire des électrons dans l'ondulateur.

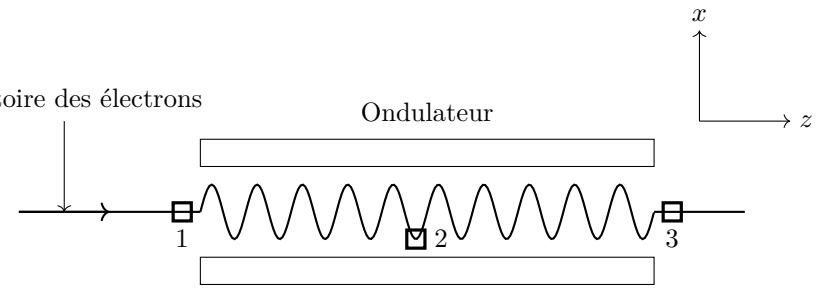


Figure 12

Le graphique numéroté 1 sur le schéma de la figure 13 montre la répartition spatiale des électrons à l'entrée de l'ondulateur. Chaque point représente un électron et les électrons se déplacent dans la direction des z croissants : on part d'un état où les électrons sont répartis uniformément au voisinage de l'axe de propagation. Le graphique numéroté 2 montre la distribution des électrons au milieu de l'ondulateur, et le graphique numéroté 3 leur distribution en sortie de l'ondulateur. Sur les trois graphiques, λ_1 est la

longueur d'onde de l'onde électromagnétique générée par les électrons : $\lambda_1 = \frac{c}{F_1}$, où F_1 est donné par la relation (1).

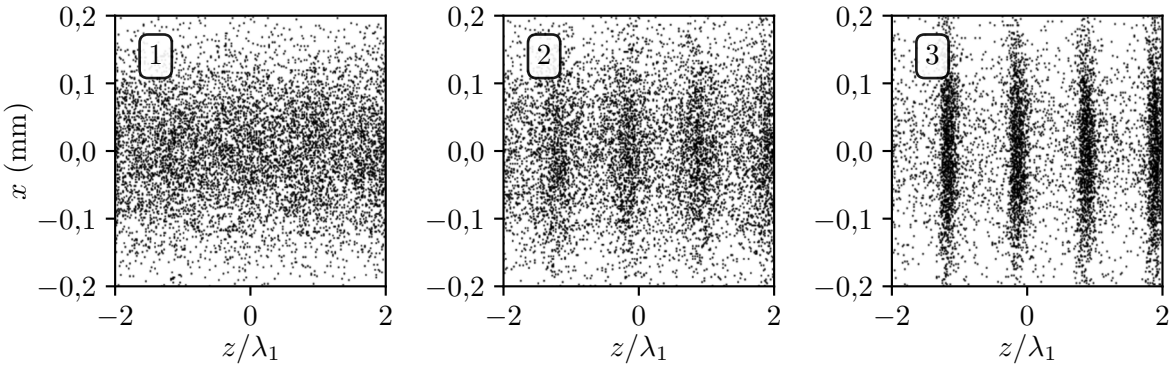


Figure 13

Q37. Décrire, en quelques phrases, la manière dont la distribution d'électrons évolue lors de la traversée de l'ondulateur, sous l'influence de l'onde électromagnétique émise.

Q38. Expliquer pourquoi ce changement de répartition spatiale des électrons permet de résoudre le problème qui a été introduit en début de cette partie.

Données et formulaire

Données numériques

enthalpie de vaporisation de l'hélium à 2,0 K	$\Delta_{\text{vap}}h = 23{,}4\ \text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$
accélération de la pesanteur	$g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$
charge élémentaire	$e = 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C}$
vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3{,}00 \times 10^{8}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
masse de l'électron	$m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg}$

Formulaire

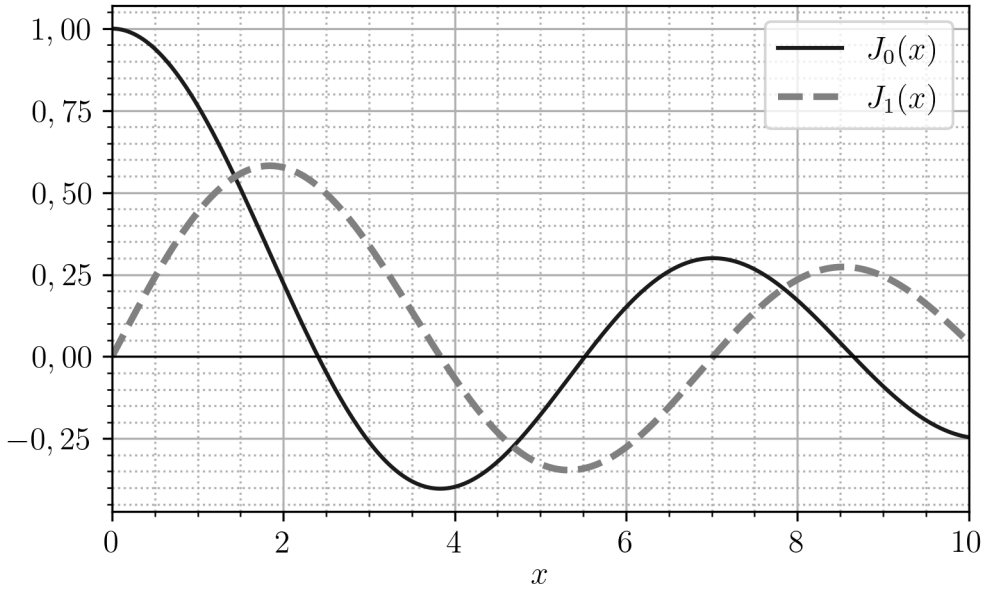
- $1\ \text{eV} = 1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J}$
- $\cos(2u) = 1 - 2\sin^2(u)$
- $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\,\vec{A}\right) - \vec{\Delta}\,\vec{A}$
- opérateur rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_z}$$

- opérateur laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

– Courbes représentatives des fonctions de Bessel J_0 et J_1.



Les trois plus petites racines positives de la fonction J_0 sont $x_{01} = 2{,}405$, $x_{02} = 5{,}520$ et $x_{03} = 8{,}654$. La fonction J_1 est la dérivée de la fonction J_0 :

$$J_1(x) = \frac{\mathrm{d}J_0}{\mathrm{d}x}.$$

Quelques résultats de relativité adaptés au problème étudié

Soit une particule chargée, de masse m, de charge q, se déplaçant dans une région où règne un champ électrique $\vec{E}$. On étudie le mouvement de la particule dans un référentiel donné, supposé galiléen, avec O un point fixe de ce référentiel. Notons $\vec{v}$ son vecteur vitesse, v sa norme dans ce référentiel et $\overrightarrow{F_e}$ la force électrique (dont l'expression est la même que celle utilisée en mécanique classique).

– On introduit le facteur relativiste de Lorentz γ de l'électron dans ce référentiel : $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

– L'énergie cinétique E_c de l'électron dans le référentiel d'étude s'écrit, dans le cadre de la relativité restreinte : $E_c = (\gamma - 1)\, mc^2$

– Dans ce référentiel, la deuxième loi de Newton appliquée à la particule s'écrit : $\frac{\mathrm{d}\gamma m\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F_e}$.

– Le théorème de la puissance cinétique s'écrit : $\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F_e}.\vec{v}$.

– Le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre deux points A et B de la trajectoire de la particule s'écrit : $\Delta E_c = \int_A^B \overrightarrow{F_e}.\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$.

Considérons maintenant une particule chargée notée M, de masse m, de charge q, se déplaçant dans une région où règne un champ électrique $\vec{B}$. On étudie le mouvement de la particule dans un référentiel donné, supposé galiléen, avec O un point fixe de ce référentiel. Notons $\vec{v}$ sa vitesse, E_c son énergie cinétique, γ son facteur de Lorentz dans ce référentiel, et $\overrightarrow{F_m}$ la force magnétique (dont l'expression est la même que celle utilisée en mécanique classique).

– la deuxième loi de Newton appliquée à la particule s'écrit $\frac{\mathrm{d}\gamma m\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F_m}$;

– le théorème de la puissance cinétique s'écrit $\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F_m}.\vec{v}$.

Références

[1] H Lierl, B Petersen et A Zolotov. « Conceptual layout of the european x-fel linear accelerator cryogenic supply ». In : *Proceedings of LINAC*. 2004, p. 225-227.

[2] Massimo Altarelli, Reinhard Brinkmann et Majed Chergui. « The European X-ray free-electron laser. Technical design report ». In : (2007).

[3] R Wanzenberg. « Monopole, Dipole and quadrupole Passbands of the TESLA-cell Cavity ». In : (2001).

◇ Fin ◇

P077 - 30 avril 2025 - 14:23:09

Numéro de place

Numéro d inscription

Signature

Nom

Prénom

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Épreuve : Physique 2 PC

Ne rien porter sur cette feuille avant d avoir complètement rempli l'entête

Feuille /

Document réponse

Les candidats doivent rendre ce document réponse avec leur copie, même s'ils ne l'ont pas utilisé

Ne rien écrire dans la partie barrée

Question Q23

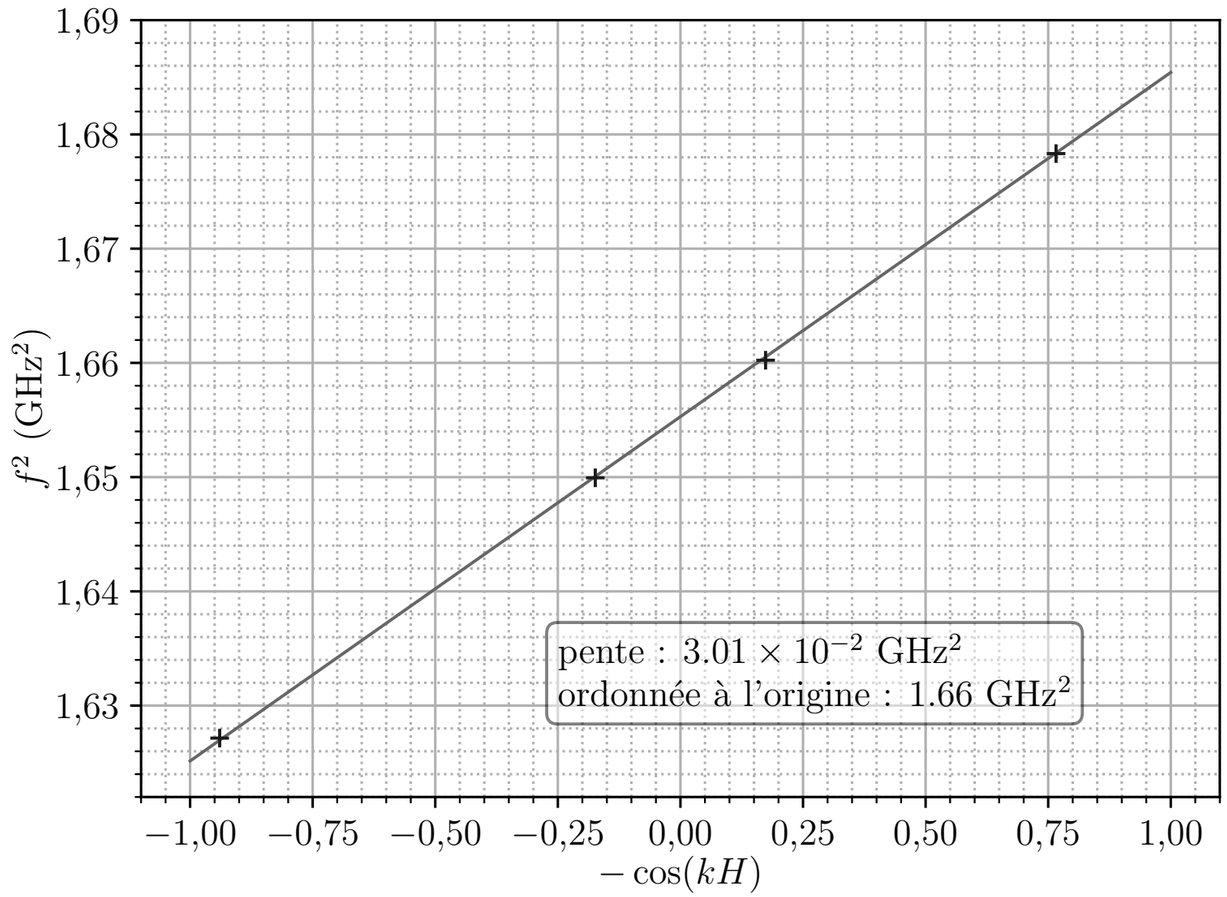
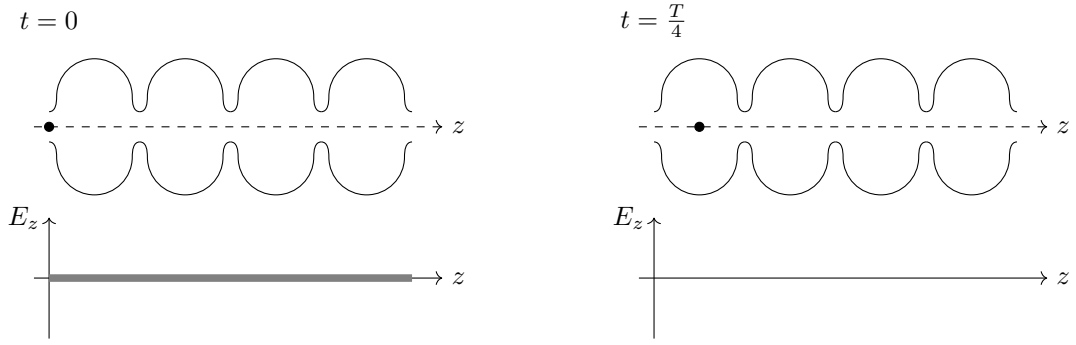
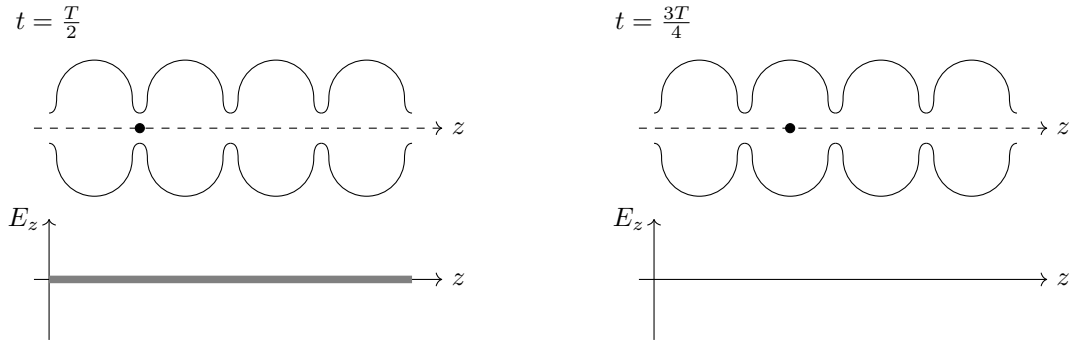


FIGURE 1 – Étude de la relation de dispersion des ondes électromagnétiques dans une cellule TESLA.

Question Q24



Le champ électrique est nul ici.



Le champ électrique est nul ici.

FIGURE 2 – Cavités TESLA à différents instants.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Équations différentielles linéaires du second ordre
- Calcul infinitésimal du physicien : dérivées et différentielles
- Circuits électriques dans l'ARQS
- Superposition d'ondes lumineuses, trous d'Young et réseau
- Équations différentielles linéaires du premier ordre

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/pc