Concours Centrale-Supélec, France

Session 2026, filière PC

Physique 1

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie A, I : évolution du rayon d'une goutte sphérique
- Partie A, II : température de la goutte
- Partie A, III et IV : effets radiatifs et mesure du taux d'humidité
- Partie B : spin coating
- Partie C : mesure de l'épaisseur d'une bulle par interférométrie

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/pc/2026/physique1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Physique 1

PC

4 heures

Calculatrice autorisée

2026

Autour des gouttes et des bulles

Le problème propose d'analyser trois phénomènes physiques autour des gouttes et des bulles. La première partie concerne le mécanisme d'évaporation d'une goutte d'eau. La deuxième partie traite de la technique d'enduction centrifuge qui permet de réaliser des films minces d'épaisseur contrôlée sur des substrats. Enfin, la troisième partie propose d'analyser une technique optique de suivi temporel de l'épaisseur d'une bulle. Ces 3 parties sont totalement indépendantes.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Elles sont repérées par un soulignement de leur numéro. Il est alors demandé d'expliciter clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Un formulaire, des données numériques ainsi que les définitions de quelques fonctions Python sont regroupés en fin d'énoncé.

Partie A – Évaporation d'une goutte d'eau

On envisage une goutte d'eau de masse volumique μ_{eau}, placée dans une atmosphère humide. La pesanteur n'est ici pas prise en compte donc la goutte est sphérique, de rayon initial $r_{\text{g0}} = 1$ mm. L'eau de la goutte s'évapore progressivement ce qui fait varier dans le temps le rayon $r_{\text{g}}(t)$ de la goutte. On suppose que les molécules d'eau dans l'air sont transportées loin de la goutte par un mécanisme de diffusion, et on note D le coefficient de diffusion de l'eau dans l'air. L'air, de masse molaire M_{air}, et la vapeur d'eau, de masse molaire M_{eau}, suivent la loi des gaz parfaits et on note R la constante des gaz parfaits.

À la surface de la goutte, l'eau liquide de la goutte est à l'équilibre avec la vapeur d'eau qui l'entoure. Loin de la goutte, la température de l'air ambiant vaut $T_\infty = 20$ °C et la pression partielle en eau est égale à $p_\infty(T_\infty)$. On définit l'humidité relative $\mathcal{R}_H$ par le rapport de la pression partielle en eau $p_\infty(T_\infty)$ sur la pression de vapeur saturante $p_{\text{sat}}(T_\infty)$ loin de la goutte, à la température T_∞ :

$$\mathcal{R}_H = \frac{p_\infty(T_\infty)}{p_{\text{sat}}(T_\infty)} \leqslant 1 \tag{1}$$

I – Évolution du rayon d'une goutte sphérique

On suppose dans cette partie que la transformation de la goutte se fait de façon isotherme : la température T_{g} de la goutte reste égale à la température T_∞ de l'air ambiant, homogène : $T_{\text{g}} = T_\infty = T = 293{,}15$ K.

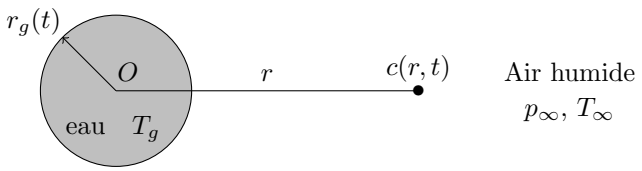


Figure 1 – Évaporation d'une goutte d'eau sphérique.

Q1. Rappeler la définition de la pression de vapeur saturante. Préciser sa variation avec la température.

Q2. Justifier que le flux diffusif des molécules d'eau est à symétrie sphérique et que la concentration en masse de vapeur d'eau dans l'air $c(\vec{r}, t)$ ne dépend que du rayon r et du temps t.

Q3. Énoncer la loi de Fick reliant la concentration en masse de vapeur d'eau $c(r,t)$ et le vecteur densité de courant diffusif de masse $\vec{j}_{\mathrm{m}}$. Citer les unités de chaque grandeur.

Q4. Établir une relation entre la concentration $c(r,t)$ et la pression partielle en vapeur d'eau $p(r,t)$. Préciser alors les conditions aux limites vérifiées par $c(r,t)$ en fonction notamment des pressions p_{sat} et p_∞.

On se place dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires, c'est-à-dire que la source du phénomène diffusif évolue de façon beaucoup plus lente que la durée d'établissement d'un régime stationnaire de la grandeur qui diffuse. On admet que, dans cette approximation, $\vec{j}_{\mathrm{m}}$ est à flux conservatif en l'absence de création ou de disparition de molécules d'eau.

Q5. Donner un critère quantitatif qui permettrait de confirmer la validité de cette approximation. *Nous vérifierons le respect de ce critère à la question* ***Q9****.*

Q6. Dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires, montrer que le flux de masse d'eau ϕ_{m} sortant de la goutte a pour expression :

$$\phi_{\mathrm{m}} = 4\pi r_{\mathrm{g}} \frac{M_{\mathrm{eau}} D p_{\mathrm{sat}}(T)}{RT}(1-\mathcal{R}_H) \tag{2}$$

Q7. Exprimer de deux manières la variation de masse de la goutte d'eau entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$. En déduire l'équation d'évolution du rayon $r_{\mathrm{g}}(t)$ de la goutte :

$$r_{\mathrm{g}}(t)\frac{\mathrm{d}r_{\mathrm{g}}(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{M_{\mathrm{eau}} D p_{\mathrm{sat}}(T)}{\mu_{\mathrm{eau}} RT}(1-\mathcal{R}_H) \tag{3}$$

Q8. Déterminer la loi d'évolution du rayon de la goutte $r_{\mathrm{g}}(t)$. Faire apparaitre le temps t_0 d'évaporation de la goutte.

Q9. *Application numérique :* La goutte a initialement un rayon $r_{g0} = 1$ mm. Calculer sa durée de vie t_0 dans le cas d'une atmosphère sèche ($\mathcal{R}_H = 0$). Discuter alors de la validité de l'approximation des régimes quasi-stationnaires utilisée dans cette partie.

II – Température de la goutte

II.1 – Mise en équation

L'évaporation de la goutte d'eau est un changement d'état liquide-gaz, ce qui conduit à une modification de la température T_{g} de la goutte par rapport à la température T_∞ de l'air loin de la goutte. On suppose que les transferts thermiques entre l'air ambiant et la goutte sont purement diffusifs et suivent la loi de Fourier, avec λ_{air} la conductivité thermique de l'air. On se place toujours en régime quasi-stationnaire.

Q10. Montrer qu'on peut supposer la température dans la goutte uniforme.

Q11. L'évaporation est-elle une transformation exothermique ou endothermique ? La température de la goutte est-elle plus grande ou plus petite que T_∞ ?

Q12. Montrer que le flux thermique reçu par la goutte s'écrit $\phi_{\mathrm{th,d}} = (T_\infty - T_{\mathrm{g}})/R_{\mathrm{th,d}}$. On exprimera $R_{\mathrm{th,d}}$ en fonction de la conductivité thermique λ_{air} de l'atmosphère et du rayon r_{g} de la goutte. Préciser l'unité dans le Système International de $R_{\mathrm{th,d}}$.

Q13. Dans la situation où la température de la goutte est différente de la température ambiante T_∞, l'expression du flux de masse (2) établi à la question **Q6** est légèrement modifiée :

$$\phi_{\mathrm{m}} = 4\pi r_{\mathrm{g}} \frac{M_{\mathrm{eau}} D}{R}\left(\frac{p_{\mathrm{sat}}(T_{\mathrm{g}})}{T_{\mathrm{g}}} - \frac{p_\infty(T_\infty)}{T_\infty}\right) \tag{4}$$

À partir d'un bilan d'énergie appliqué à la goutte, démontrer la relation suivante :

$$T_\infty - T_{\mathrm{g}} = \frac{\Delta h_{\mathrm{vap}} M_{\mathrm{eau}} D p_{\mathrm{sat}}(T_\infty)}{\lambda_{\mathrm{air}} R T_\infty}\left(\frac{p_{\mathrm{sat}}(T_{\mathrm{g}})}{T_{\mathrm{g}}}\frac{T_\infty}{p_{\mathrm{sat}}(T_\infty)} - \mathcal{R}_H\right) \tag{5}$$

où Δh_{vap} est l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau, M_{eau} la masse molaire de l'eau, D le coefficient de diffusion moléculaire de l'eau dans l'air, λ_{air} la conductivité thermique de l'air, $\mathcal{R}_H = p_\infty(T_\infty)/p_{\mathrm{sat}}(T_\infty)$ l'humidité relative et R la constante des gaz parfaits.

II.2 – Résolution numérique

Pour déterminer la température de la goutte, il faut pouvoir résoudre l'équation (5), ce qui nécessite de connaitre le lien explicite entre la pression de vapeur saturante de l'eau et la température. La relation de Clausius-Clapeyron fournit, en supposant l'enthalpie massique de vaporisation Δh_{vap} indépendante de la température, une relation entre les pressions de vapeur saturante à deux températures différentes :

$$\frac{p_{\text{sat}}(T_{\text{g}})}{p_{\text{sat}}(T_\infty)} = \exp\left[\frac{\Delta h_{\text{vap}} M_{\text{eau}}}{R}\left(\frac{1}{T_\infty} - \frac{1}{T_{\text{g}}}\right)\right] \tag{6}$$

Afin de résoudre l'équation (5) et obtenir la température T_{g} de la goutte, on écrit le programme Python présenté en figure 2. Celui-ci utilise la fonction `bisect` de la bibliothèque `scipy.optimize`.

```
import numpy as np
from scipy.optimize import bisect

# Constantes :
R = 8.314 # constante des gaz parfaits (en J/K/mol)
D = 2.4e-5 # coefficient de diffusion moléculaire (en m**2/s)
Lambda = 2.6e-2 # coefficient de diffusion thermique (en W/m/K)
Dhv = 2.4e6 # enthalpie massique de vaporisation (en J/K/kg)
M = 18e-3 # masse molaire de l'eau (en kg/mol)
Ps = 2.34e3 # pression de vapeur saturante loin de la goutte (en Pa)
Tinf = 273+20 # température loin de la goutte (en K)
RH = 0.0 # taux d'humidité (compris entre 0 et 1)
# Deux constantes intermédiaires :
C1 = Dhv*D*M*Ps/(Lambda*R*Tinf)
C2 = Dhv*M/R

# à compléter :
def f(x):
  return

a = # borne inférieure à compléter
b = # borne supérieure à compléter

tolerance = 1e-2
racine = bisect(f, a, b, xtol=tolerance)
print("Tg = ", racine, "K")
```

Figure 2 – Programme.

Q14. Compléter la fonction `f(x)` et proposer des valeurs pour les bornes de l'intervalle dans lequel on recherche la racine de `f(x)`.

Le programme fournit : `Tg = 277.74403381347656 K`, ce qui donne un écart de température de 15 °C entre la goutte et l'air ambiant loin de la goutte.

II.3 – Résolution approchée

Une résolution analytique peut être menée en modélisant de façon affine la relation entre la concentration en masse de vapeur saturante et la température :

$$c_{\text{sat}}(T) = c_{\text{sat}}(T_\infty)\left[1 - \alpha(T_\infty - T)\right] \tag{7}$$

où α est une constante.

Q15. Déterminer l'expression de α en fonction de $p_{\text{sat}}(T_\infty)$, $p_{\text{sat}}(T_{\text{fus}})$, T_∞ et T_{fus} la température de fusion de l'eau à la pression atmosphérique. Faire l'application numérique.

Q16. Montrer alors que l'écart de température de la goutte par rapport à l'atmosphère loin de la goutte est égal à :

$$T_\infty - T_{\text{g}} = \frac{K}{1 + K\alpha}\left(1 - \mathcal{R}_H\right) \tag{8}$$

avec K une constante à déterminer en fonction des données de l'énoncé.

Q17. En déduire une valeur numérique de l'écart $T_\infty - T_g$ pour une atmosphère sèche ($\mathcal{R}_H = 0$). Commenter.

Q18. En prenant en compte la différence de température de la goutte avec l'air au loin, déterminer la nouvelle valeur du temps d'évaporation t_0' de la goutte et comparer à la valeur de t_0 trouvée à la question **Q9**.

III – Effets radiatifs

Nous avons jusqu'ici négligé les transferts thermiques par rayonnement mais la différence de température entre la goutte et l'atmosphère entraîne un flux thermique radiatif reçu par la goutte donné par la loi de Stefan : $\phi_{th,rad} = \sigma\varepsilon\left(T_\infty^4 - T_g^4\right) S_{goutte}$ où σ est la constante de Stefan, $\varepsilon = 0{,}96$ est l'émissivité de l'eau et S_{goutte} est la surface de la goutte.

Q19. Sachant que $|T_\infty - T_g|/T_\infty \ll 1$, montrer qu'on peut écrire le flux thermique radiatif sous la forme : $\phi_{th,rad} = (T_\infty - T_g)/R_{rad}$ où R_{rad} est la résistance radiative qui s'exprime en fonction de σ, ε, T_∞ et r_g le rayon de la goutte.

Q20. Établir une condition sur le rayon de la goutte pour que le flux thermique diffusif $\phi_{th,d}$, calculé à la question **Q12**, soit prédominant par rapport au flux thermique radiatif $\phi_{th,rad}$.

IV – Application : mesure du taux d'humidité

La mesure et le contrôle de l'humidité de l'air présentent un enjeu important en météorologie, en santé publique ou dans la conservation des œuvres d'art. Le psychromètre (*psuchron* signifiant froid en grec) est un appareil développé à la fin du 18è siècle pour mesurer le taux d'humidité à partir de la différence de température issue de la vaporisation d'une goutte.

Deux thermomètres sont placés côte à côte et plongés dans un courant d'air contrôlé de vitesse U. Le premier thermomètre, dit thermomètre humide, a son capteur recouvert de coton humide et mesure la température T_{hum} de l'eau qui s'évapore. Le second thermomètre, dit thermomètre sec, sert simplement à mesurer la température ambiante T_{sec}.

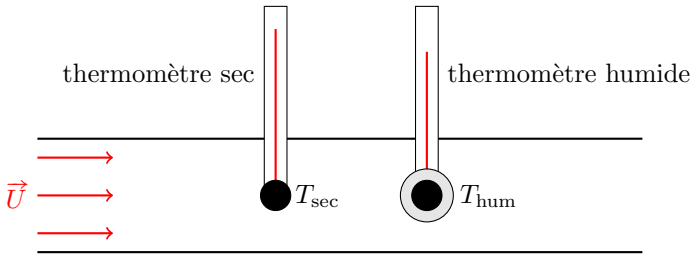


Figure 3 – Psychromètre.

L'équation psychrométrique relie la différence des pressions partielles en vapeur d'eau dans l'air $\Delta p = p_\infty(T_\infty) - p_{sat}(T_g)$ et la différence des températures $\Delta T = T_\infty - T_g$:

$$\Delta p = -\mathcal{A}\, p_{atm} \Delta T \tag{9}$$

avec $\mathcal{A}$ le coefficient psychrométrique et p_{atm} la pression atmosphérique.

Q21. Exprimer l'humidité relative $\mathcal{R}_H = p_\infty(T_\infty)/p_{sat}(T_\infty)$ en fonction de $p_{sat}(T_g)$, $p_{sat}(T_\infty)$, $\mathcal{A}$, p_{atm} et ΔT.

On peut alors déterminer l'humidité relative à partir de la mesure de la température des deux thermomètres à condition de connaître le coefficient psychrométrique $\mathcal{A}$, les pressions de vapeur saturante étant déterminées par une loi empirique analogue à celle de Clausius-Clapeyron (6).

Pour prendre en compte la ventilation, le flux massique d'évaporation ϕ_{vent} s'écrit :

$$\phi_{vent} = f_{ev}\, \phi_m \tag{10}$$

où ϕ_m est le flux massique purement diffusif (équation (2)) et $f_{ev} > 1$ est le coefficient de ventilation (ou nombre de Sherwood), croissant avec la vitesse U de l'écoulement de l'air autour de la goutte.

De manière analogue, le flux thermique convectif $\phi_{th,conv}$ reçu par la goutte s'écrit

$$\phi_{th,conv} = f_h\, \phi_{th,d} \tag{11}$$

avec $\phi_{th,d}$ le flux thermique purement diffusif (question **Q12**) et $f_h > 1$ le coefficient thermique de ventilation.

Dans la suite, on considérera que les deux coefficients de ventilation sont égaux : $f_{ev} = f_h$.

Q22. À l'aide des résultats précédents, établir une expression du coefficient psychrométrique $\mathcal{A}$. On introduira la température moyenne $\overline{T}$.

Partie B – Spin coating

Pour déposer des films minces sur un substrat solide, la technique d'enduction centrifuge (*spin coating* en anglais) est souvent employée car elle permet de contrôler précisément l'épaisseur du film et d'obtenir des couches minces allant d'une dizaine de nanomètres à plusieurs micromètres d'épaisseur.

Le fonctionnement de la machine de spin coating est illustré sur la figure 4. La solution à étaler est déposée sur le substrat, une plaque de silicium par exemple, elle-même maintenue sur un support via un effet ventouse créé par une pompe à vide (étape 1). Le support est fixé à une tournette qui est mise en rotation autour d'un axe vertical suivant une séquence pré-réglée : accélération angulaire du substrat (étape 2) pour atteindre une vitesse angulaire de consigne ω, provoquant l'étalement rapide de la goutte et son amincissement (étape 3). La tournette décélère ensuite après une durée de régime stationnaire choisie, et s'arrête. Le solvant de la solution s'évapore finalement, ce qui amincit davantage le film déposé sur le substrat (étape 4).

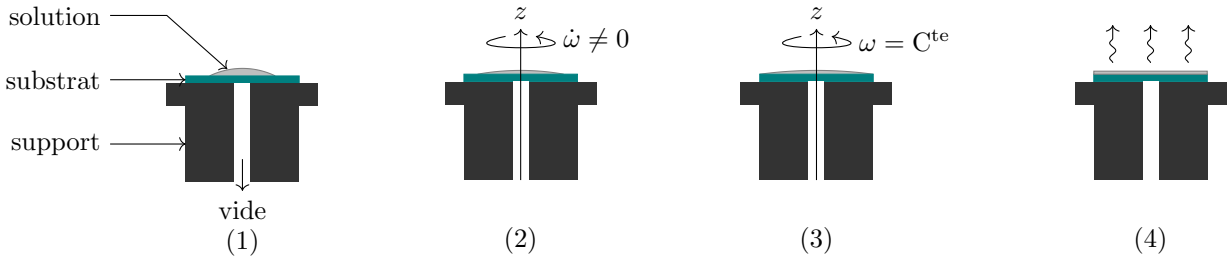


Figure 4 – Étapes de la procédure d'enduction centrifuge.

On cherche dans cette partie à décrire le processus d'étalement de la goutte liquide sur le substrat pendant la phase de rotation stationnaire, et à déterminer une loi d'évolution de la hauteur de la couche liquide ainsi que celle du rayon de la goutte.

Pour toutes les applications numériques de cette partie, on s'appuiera sur les données d'une expérience de micro-photolithographie dans le domaine des semi-conducteurs. La goutte est composée d'un liquide organique de masse volumique $\mu = 1{,}06$ g·cm^{-3} et de viscosité dynamique $\eta = 3{,}6 \times 10^{-2}$ Pa·s. Le support tourne, en régime stationnaire, à la vitesse angulaire $\omega = 2\,000$ tours par minute pendant une durée $T = 30$ s.

I – Équation de Stokes

Initialement, la goutte liquide est déposée au centre du substrat, de rayon $R_{\max} = 10$ cm. La goutte possède une symétrie de révolution autour de l'axe de rotation du plateau (Oz). Sa hauteur initiale au centre est notée $h(r = 0, t = 0) = h_0 = 0{,}5$ mm et son rayon initial est $R_0 = 5$ mm. On suppose la goutte initialement très aplatie : $h_0 \ll R_0$ et on admet que l'interface entre la goutte et l'air reste de pente très faible. À la date $t = 0$, le plateau est mis en rotation uniforme autour de l'axe (Oz) à une vitesse angulaire ω.

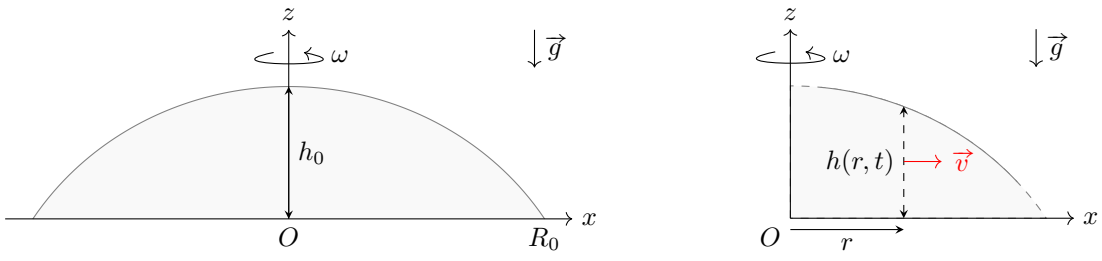


Figure 5 – Goutte liquide sur le substrat.

L'écoulement de la goutte est étudié dans le référentiel lié au plateau tournant. On paramètre le problème en coordonnées cylindriques en définissant le champ des vitesses dans la goutte sous la forme $\vec{v}(\vec{r}, t) = v_r(r, \theta, z, t)\vec{e}_r + v_\theta(r, \theta, z, t)\vec{e}_\theta + v_z(r, \theta, z, t)\vec{e}_z$.

Q23. Interpréter chacun des termes présents dans l'équation de Navier-Stokes, rappelée en annexe à la fin de l'énoncé. On précisera les différentes forces volumiques $\overrightarrow{f}_{\text{vol}}$ à considérer dans le référentiel lié au plateau tournant.

Q24. Montrer par une analyse en ordre de grandeur et une application numérique que le terme centrifuge est prépondérant par rapport au terme de Coriolis.

Q25. Justifier alors que la vitesse ne possède pas de composante orthoradiale : $v_\theta = 0$ et que la norme de la vitesse ne dépend pas de θ.

Q26. En exploitant l'incompressibilité de l'écoulement, montrer que celui-ci est principalement radial : $\overrightarrow{v}(\overrightarrow{r}, t) \simeq v_r(r, z, t)\overrightarrow{e}_r$.

Q27. Comparer par ordre de grandeur chacun des termes diffusifs présents dans $(\Delta \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{e}_r$. Montrer que l'un d'entre eux est dominant.

Q28. Rappeler la définition du nombre de Reynolds. L'évaluer numériquement et en déduire une simplification dans l'équation de Navier-Stokes.

Q29. Justifier que l'écoulement est quasi-stationnaire.

Étant donné la petitesse de la goutte, on pourra supposer que la pression y est uniforme. De plus, les effets de la pesanteur seront négligés dans la suite de cette Partie B.

Q30. En déduire l'équation différentielle suivante vérifiée par v_r :

$$\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = -\frac{\mu\omega^2 r}{\eta} \tag{12}$$

Q31. Préciser la condition à la limite en $z = 0$. Justifier que la condition en $z = h(r, t)$ est $\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial z}\right)_{z=h} = 0$.

Q32. Exprimer le champ de vitesse v_r.

Q33. En déduire le débit volumique $Q(r, t)$ sortant d'un cylindre de rayon r et de hauteur $h(r, t)$:

$$Q(r, t) = \frac{2\pi\mu\omega^2 r^2}{3\eta} h(r, t)^3 \tag{13}$$

II – Bilan de masse

On définit un système ouvert représenté sur la figure 6, composé du liquide compris entre la surface du cylindre de rayon r et de hauteur $h(r, t)$ et la surface du cylindre de rayon $r + \mathrm{d}r$ et de hauteur $h(r + \mathrm{d}r, t)$.

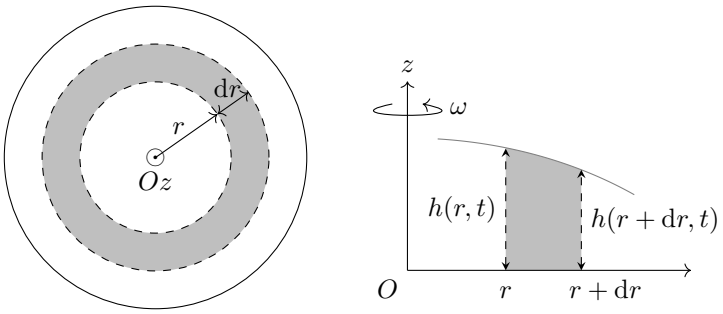


Figure 6 – Bilan de masse. Vue de dessus et vue de profil.

Q34. Exprimer la variation $\mathrm{d}^2 m(r, t)$ de la masse du système ouvert entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$.

Q35. Exprimer la quantité de masse $\delta m_e(r, t)$ entrant dans le système ouvert par la surface en r ainsi que la quantité de masse $\delta m_e(r + \mathrm{d}r, t)$ entrant par la surface en $r + \mathrm{d}r$ entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$. En déduire la quantité de masse $\delta^2 m_e$ qui entre dans le système ouvert entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$. On exprimera les résultats en fonction de μ, $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}t$ et du débit volumique $Q(r, t)$.

Q36. Démontrer l'équation-bilan vérifiée par $h(r, t)$:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\mu\omega^2}{\eta}\left[\frac{2}{3}h^3 + rh^2\frac{\partial h}{\partial r}\right] \tag{14}$$

III – Loi d'évolution de $h(t)$ et $r(t)$

On adopte un modèle simplifié pour la forme de la goutte : elle possède initialement une forme cylindrique, avec une hauteur h_0 et un rayon R_0. Au cours de son étalement, elle conserve sa forme cylindrique de sorte que la hauteur $h(t)$ est uniforme et le rayon vaut $r(t)$, comme représenté sur la figure 7.

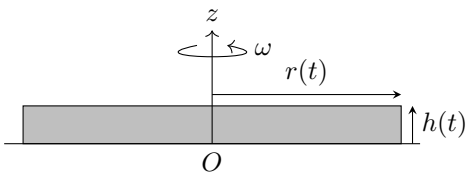


Figure 7 – Modèle d'une goutte cylindrique.

Q37. En déduire la loi d'évolution de la hauteur $h(t)$ de la goutte au cours du temps. On introduira un temps caractéristique τ.

Q38. Déterminer le rayon de la goutte $r(t)$.

Q39. *Application numérique :* Calculer τ. Quelle est l'épaisseur du film au bout de $T = 30$ secondes ?

Partie C – Mesure de l'épaisseur d'une bulle par interférométrie

Lorsqu'on injecte à l'aide d'une seringue de l'air sous la surface d'un bain d'huile de silicone très visqueuse ($\eta = 2\,300$ Pa·s), on parvient à former une bulle quasiment hémisphérique, comme le montre la figure 8. La gravité provoque un drainage du liquide présent dans le film de la bulle, ce qui tend à l'amincir à son sommet et à l'élargir à sa base. La durée de vie de la bulle étant de quelques minutes, il est possible d'étudier par une méthode optique l'épaisseur de la bulle en fonction du temps et de la position angulaire θ sur la bulle.

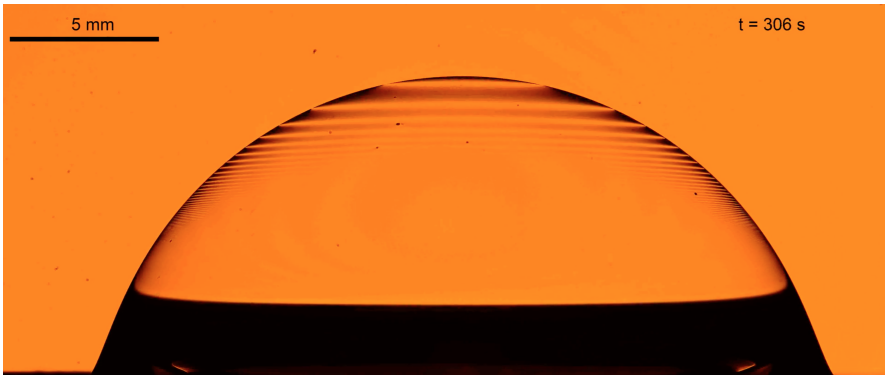


Figure 8 – Photographie de la bulle d'huile de silicone, éclairée par une lampe à vapeur de sodium à l'arrière. La photographie a été prise 306 secondes après la formation de la bulle [1].

Des chercheurs de l'université de Boston ont réalisé une expérience de mesure interférométrique de l'épaisseur du film d'une bulle [1]. Elle est éclairée avec un faisceau de lumière parallèle issu d'une lampe à vapeur de sodium, de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 589{,}3$ nm. La lumière traverse alors l'avant et l'arrière de la bulle avant d'atteindre une caméra placée dans l'alignement de la source et de la bulle.

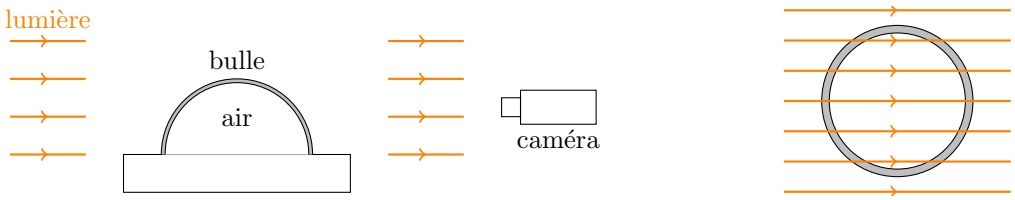


Figure 9 – Schéma de l'expérience, vue de profil et vue en coupe sur le dessus.

Sur la figure 8, on observe la présence de franges d'interférences très fines et contrastées sur le pourtour de la bulle. Dans la mesure où le rayon de la bulle $r_0 = 12$ mm est très grand devant l'épaisseur de la bulle $h(\theta, t)$ (voir figure

12a), on peut modéliser localement le film comme une lame liquide à faces parallèles où les deux interfaces air-huile se comportent comme des miroirs réfléchissants. Une onde incidente subit alors de multiples divisions d'amplitude et les ondes transmises par le film interfèrent alors (voir figure 10).

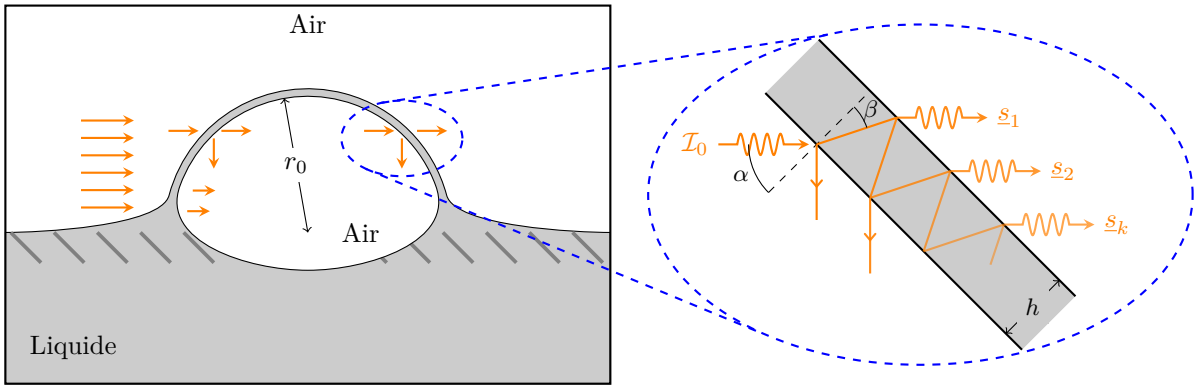


Figure 10 – Lame liquide à faces parallèles.

L'indice de l'huile est $n = 1{,}4$ et on assimile l'air entourant la bulle au vide : $n_{\text{air}} = 1$. On note respectivement r et t les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude du champ électrique (supposés réels, positifs et inférieurs à 1). La conservation de l'énergie impose la relation $r^2 + t^2 = 1$.

On ne peut pas mesurer l'épaisseur du film directement avec les rayons rasants arrivant avec un angle d'incidence $\alpha = 90°$ sur la bulle car la lumière ne passe pas à travers le film. On mesure alors l'intensité lumineuse le long d'un arc de cercle de rayon $99{,}5\ \% \times r_0$. Pour tous les points sur cet arc, l'angle d'incidence des rayons incidents vaut $\alpha = 84{,}2°$. On éclaire alors une lame liquide à faces parallèles avec une onde plane monochromatique sous une unique incidence α. L'angle de réfraction dans la lame liquide est noté β. L'onde se propage dans la lame liquide et produit à chaque aller-retour un rayon émergent. Les rayons émergents sont tous parallèles entre eux et la caméra enregistre l'intensité lumineuse due à l'interférence de ces rayons à l'infini.

I – Intensité transmise par la bulle

Q40. Proposer un montage expérimental permettant de réaliser un faisceau de lumière parallèle à partir d'une source spectrale étendue, d'un diaphragme et de lentilles.

Q41. Évaluer numériquement l'angle de réfraction β de la lumière dans le film de la bulle. La lumière pénètre-t-elle toujours dans la goutte ? En déduire l'angle d'émergence des rayons après leur transmission.

Chaque onde émergente s'écrit en notation complexe $\underline{s}_k(\vec{r}, t) = S_k \exp\left[\mathrm{i}(\omega t - \varphi_k(\vec{r}))\right] = \underline{S}_k(\vec{r}) \exp(\mathrm{i}\omega t)$ où $\underline{S}_k(\vec{r}) = S_k \exp(-\mathrm{i}\varphi_k(\vec{r}))$ est l'amplitude complexe de l'onde émergente ayant subi $2(k-1)$ réflexions dans la lame liquide à faces parallèles (voir figure 10). On prendra comme référence le rayon incident d'intensité $\mathcal{I}_0$: $\underline{S}_0(\vec{r}) = s_0$.

Q42. Exprimer le déphasage à l'infini φ entre deux rayons émergents successifs $\varphi = \varphi_{k+1} - \varphi_k$ en fonction de n, h, β et λ.

Q43. Exprimer l'amplitude complexe $\underline{s}_k(\vec{r}, t)$ du rayon k en un point M à l'infini, en fonction de l'amplitude $\underline{s}_1$ du rayon 1 transmis, du déphasage φ et du facteur de réflexion en amplitude r. En déduire l'expression de l'amplitude complexe de l'onde transmise :

$$\underline{s} = \sum_{k=1}^{\infty} \underline{s}_k = \frac{\underline{s}_1}{1 - r^2 \exp(-\mathrm{i}\varphi)} \tag{15}$$

Q44. On considère qu'il existe une infinité de rayons émergents. Montrer que l'intensité lumineuse transmise $\mathcal{I} = \underline{s} \times \underline{s}^*$, où $\underline{s}^*$ est le complexe conjugué de $\underline{s}$, s'exprime ainsi :

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{I}_0}{1 + m \sin^2(\varphi/2)} \tag{16}$$

avec $\mathcal{I}_0$ l'intensité lumineuse incidente et m le facteur de finesse qu'on exprimera en fonction de r^2.

II – Analyse des images

On représente sur la figure 11 la courbe représentative de l'intensité transmise en fonction du déphasage φ.

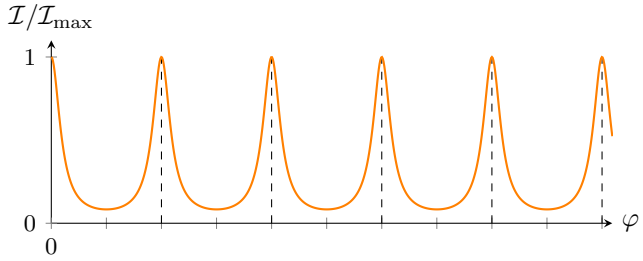


Figure 11 – Fonction de transmission du film. Le tracé est réalisé avec $m = 11$.

Q45. Déterminer les valeurs de φ pour lesquelles l'intensité transmise maximale. On notera $\mathcal{I}_{\max}$ ce maximum. Commenter.

Q46. En déduire l'expression des épaisseurs h du film de la bulle pour lesquelles on observe des franges brillantes, ainsi que la valeur numérique de l'écart d'épaisseur Δh de la lame entre deux franges brillantes.

Q47. Définir et exprimer le contraste $\mathcal{C}$ des franges d'interférences en fonction du coefficient de réflexion r.

Q48. Au voisinage de $\varphi = 0$, déterminer les valeurs de φ telles que $\mathcal{I}(\varphi) = \mathcal{I}_{\max}/2$. En déduire la largeur à mi-hauteur $\Delta\varphi_{1/2}$ du pic de transmission en fonction du facteur de finesse m qu'on supposera grand devant 1.

À partir de la forme hémisphérique de la bulle, la dynamique du drainage peut être analysée en utilisant les coordonnées sphériques (r_0, θ, ϕ) représentées sur la figure 12a.

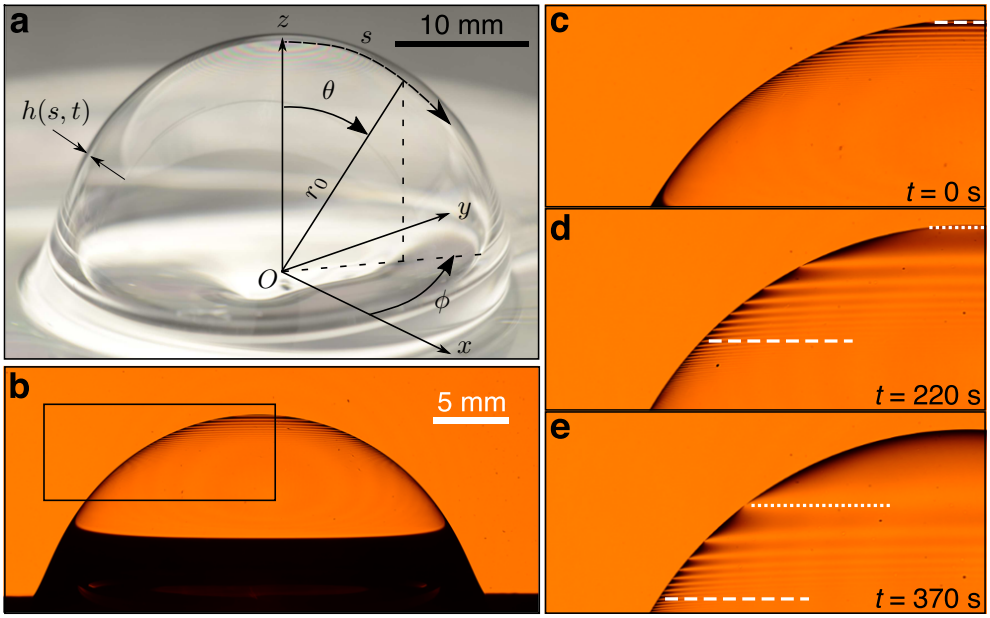


Figure 12 – Drainage de la bulle à la surface d'un bain d'huile. Ici, le rayon de la bulle est $r_0 = 12$ mm et sa viscosité est $\eta = 2\,300$ Pa·s [1].

Quand on forme la bulle à la surface de l'huile, celle-ci piège un film très fin de liquide d'épaisseur $h(s,t)$ qui varie avec la longueur de l'arc $s = r_0\theta$ et avec le temps t. Sur la figure 12b, on observe l'apparition de franges brillantes et sombres lorsque la bulle est éclairée avec une lumière monochromatique. À $t = 0$ s (figure 12c), on repère une frange brillante apparaissant au sommet de la bulle ; elle est marquée par la ligne blanche tiretée. À $t = 220$ s (figure 12d), cette frange a glissé vers la base de la bulle tandis que la dernière frange brillante observable dans cette expérience apparait au sommet avec une épaisseur minimale ; elle est repérée par la ligne blanche pointillée. À $t = 370$ s (figure 12e), les deux franges marquées sont descendues et un film noir apparait au sommet, là où l'épaisseur du film est quasi nulle : la bulle est sur le point d'éclater.

La figure 13 présente le graphique du coefficient de réflexion de l'intensité lumineuse, noté $R = r^2$, en fonction de l'angle d'incidence α, pour une lumière non polarisée.

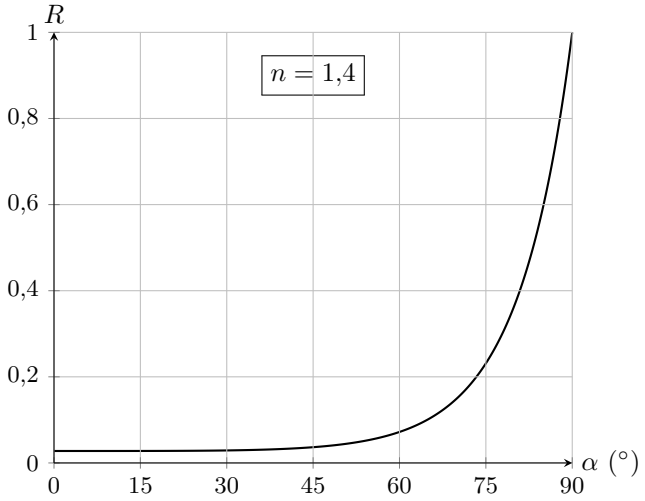


Figure 13 – Coefficient de réflexion en intensité $R = r^2$ en fonction de l'angle d'incidence α, pour une lumière non polarisée.

Q49. En vous appuyant sur vos réponses précédentes et les figures 12 et 13, expliquer précisément les observations faites lors de cette expérience : position, aspect des franges. Proposer un protocole permettant de déterminer l'épaisseur du film au cours du temps, pour tous les angles de colatitude θ.

Q50. Le tableau 1 présente la position angulaire des franges brillantes sur le pourtour de la bulle, à la date $t = 220$ s (voir la figure 12d). Au sommet, on observe la dernière frange brillante apparaitre.
Montrer que la relation entre l'épaisseur h du film et l'angle θ peut être modélisée par la loi :

$$h(\theta) = h_0 \cos^{-\ell}(\theta) \tag{17}$$

avec le nombre $\ell > 0$ à déterminer.

Numéro de la frange brillante	θ (°)
1	0
2	28,4
3	35,2
4	39,3
5	42,0
6	44,1
7	45,8
8	47,2
9	48,3

Tableau 1 – Position angulaire des franges brillantes à la date $t = 220$ s [1]. À cette date, on voit apparaitre au sommet la dernière frange brillante avant l'éclatement de la bulle.

Données et formulaire

Données numériques (Partie A)

Coefficient de diffusion de l'eau dans l'air	$D = 2{,}4 \times 10^{-5}$ m^2·s^{-1}
Conductivité thermique de l'air	$\lambda_{\text{air}} = 2{,}6 \times 10^{-2}$ W·m^{-1}·K^{-1}
Conductivité thermique de l'eau liquide	$\lambda_{\text{eau}} = 0{,}61$ W·m^{-1}·K^{-1}
Capacité thermique massique de l'eau liquide	$c_{\text{eau}} = 4{,}2 \times 10^{3}$ J·K^{-1}·kg^{-1}
Enthalpie massique de vaporisation de l'eau ($p = p_{\text{atm}}$)	$\Delta h_{\text{vap}} = 2{,}4 \times 10^{6}$ J·kg^{-1}
Masse molaire de l'eau	$M_{\text{eau}} = 18$ g·mol^{-1}
Masse molaire de l'air	$M_{\text{air}} = 29$ g·mol^{-1}
Constante des gaz parfaits	$R = 8{,}314$ J·K^{-1}·mol^{-1}
Pression de vapeur saturante de l'eau	
– à $T_{\text{fus}} = 273{,}15$ K :	$p_{\text{sat}} = 6{,}1 \times 10^{2}$ Pa
– à $T_{\infty} = 293{,}15$ K :	$p_{\text{sat}} = 2{,}3 \times 10^{3}$ Pa
Masse volumique de l'eau	$\mu_{\text{eau}} = 1{,}0 \times 10^{3}$ kg·m^{-3}
Masse volumique de l'air	$\mu_{\text{air}} = 1{,}2$ kg·m^{-3}
Constante de Stefan	$\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}$ W·m^{-2}·K^{-4}
Pression atmosphérique	$p_{\text{atm}} = 1{,}013$ bar

Formulaire

– Gradient en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{e}_\phi$$

– Équation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien en écoulement incompressible :

$$\mu\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right] = \vec{f}_{\text{vol}} - \overrightarrow{\text{grad}}\, p + \eta\,\Delta\vec{v}$$

– Divergence en coordonnées cylindriques :

$$\text{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

– Laplacien d'un champ de vecteurs $\vec{A}$ en coordonnées cylindriques, projeté selon $\vec{e}_r$:

$$(\Delta\vec{A})\cdot\vec{e}_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_r}{\partial r}\right) - \frac{A_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2}$$

– Laplacien d'une fonction scalaire $f(r,t)$ en coordonnées cylindriques :

$$\Delta f(r,t) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

– Linéarisation de $x \mapsto \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos(x)}{2}$$

Fonctions Python (Partie A)

– `np.exp(a)` crée un tableau de même forme que `a` dont les éléments sont les exponentielles des éléments de `a`.

– `bisect(f,a,b,xtol=tolerance)` détermine la racine de la fonction `f(x)` dans un intervalle compris entre `x=a` et `x=b`, avec une tolérance `xtol` pour la précision de la racine.

Références

[1] Casey Bartlett et al. « Universal non-monotonic drainage in large bare viscous bubbles ». In : *Nature Communications* 14.1 (2023), p. 877.

[2] Marie Corpart. « Évaporation de gouttes sur des fibres ». Thèse de doctorat. Université Paris-Saclay, déc. 2022. URL : https://theses.hal.science/tel-04124399.

◇ Fin ◇

P092 - 19 mai 2026 - 12:17:34

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PC chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Calcul infinitésimal du physicien : dérivées et différentielles
- Bases de Python : expressions, types, instructions, fonctions
- Grandeurs, unités, analyse dimensionnelle et ordres de grandeur
- Modèle scalaire des ondes lumineuses
- Optique géométrique et formation des images

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/pc