Concours Centrale-Supélec, France

Session 2002, filière PSI

Mathématiques 2

Ce que traite le sujet

- Partie I : matrices tridiagonales
- Partie II : fonctions splines cubiques
- Partie III : un exemple de structure euclidienne

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/psi/2002/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

MATHÉMATIQUES II

Les deux premières parties de ce problème se proposent d'étudier deux types d'approximation d'une fonction sur un segment, et de les comparer. La troisième partie munit l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n d'une structure euclidienne et étudie certaines propriétés des polynômes interpolateurs de Lagrange relativement à cette structure. La troisième partie est indépendante des deux premières.

Partie I - Matrices tridiagonales

Notations : pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, on note :

$$M_n[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_3 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \alpha_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$A_n = M_n[2, 4, \ldots, 4, 2] \; ; \qquad (\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = 4, \; \alpha_n = 2)$$

$$B_n = M_n[2, 4, \ldots, 4] \; ; \qquad (\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 4)$$

$$C_n = M_n[4, \ldots, 4] \; ; \qquad (\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 4)$$

I.A - Méthode du pivot

Dans cette section on pose

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix}$$

et on se propose de résoudre le système $(\mathscr{S}_n)$ $A_{n+1}X = B$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, par la méthode du pivot de Gauss **sans échange de lignes**.

Filière PSI

I.A.1) Cas $n = 2$.

Résoudre par cette méthode le système $(\mathscr{S}_2)$.
On remarquera en particulier que les pivots successifs valent :

$$p_0 = 2 \ ; \ p_1 = \frac{7}{2} \ ; \ p_2 = \frac{12}{7}.$$

I.A.2) On revient au cas général.

a) Écrire une procédure de résolution du système

$$A_{n+1}X = B,$$

suivant l'algorithme du pivot de Gauss sans échange de lignes.

b) On note $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ la suite des pivots. Vérifier que :

$$\begin{cases} p_0 = 2 \\ \forall k \in \{0, \ldots, n-2\}, \quad p_{k+1} = 4 - \dfrac{1}{p_k} \\ p_n = 2 - \dfrac{1}{p_{n-1}} \end{cases}$$

c) Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 4 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

d) En déduire que $(\forall k \in \{0, \ldots, n-1\})$ $(2 \leq p_k \leq 2 + \sqrt{3})$ et que A_{n+1} est inversible.

I.B - Calculs explicites

Notation : pour toute matrice M, on note $det\ M$ son déterminant.

I.B.1) On pose $c_0 = 1$, $c_1 = 4$, $c_2 = 15$ et pour tout $n \geq 3$, $c_n = det\ C_n$, $b_n = det\ B_n$, $a_n = det\ A_n$. Montrer que la suite $(c_n)_{n \geq 3}$ vérifie une relation de récurrence simple ; en déduire $(c_n)_{n \geq 3}$ puis $(b_n)_{n \geq 3}$ et $(a_n)_{n \geq 3}$.

I.B.2) En déduire que A_n est inversible.

I.B.3) Calculer explicitement les valeurs propres de A_3 et C_3.

I.B.4) **Localisation des valeurs propres**.

a) Soit λ un réel tel que :

$$|\lambda - \alpha_1| > 1$$

$$|\lambda - \alpha_n| > 1$$

et, $\forall k \in \{2, 3, \ldots n-1\} \quad |\lambda - \alpha_k| > 2$.

Montrer qu'alors $M_n[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] - \lambda I$ est inversible.

b) En déduire que les valeurs propres de $M_n[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ appartiennent à la réunion des intervalles

$$[\alpha_1 - 1, \alpha_1 + 1] \cup \left(\bigcup_{k=2}^{n-1} [\alpha_k - 2, \alpha_k + 2] \right) \cup [\alpha_n - 1, \alpha_n + 1]$$

et que A_n , B_n et C_n sont inversibles.

Partie II - Fonctions splines cubiques

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $h = \frac{1}{n}$ et pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, $x_k = \frac{k}{n}$.

On note S l'ensemble des fonctions (dites splines cubiques) de classe C^2 sur $[0, 1]$ telles que : $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$ la restriction de s à $[x_i, x_{i+1}]$ est polynomiale de degré ≤ 3 .

II.A - Montrer que l'application :

$$S \to \mathbb{R}^{n+3}$$

$$s \mapsto \left(s(0), s'(0), s''(0), s_d^{(3)}(0), s_d^{(3)}\left(\frac{1}{n}\right), \; s_d^{(3)}\left(\frac{2}{n}\right), \ldots, s_d^{(3)}\left(\frac{n-1}{n}\right) \right)$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.

On rappelle que, si $x \in \mathbb{R}$, $s_d^{(3)}(x) = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{s''(x+t) - s''(x)}{t}$ désigne la dérivée à droite d'ordre 3 en x .

Quelle est la dimension de l'espace vectoriel S ?

II.B - f est une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$.

II.B.1) Soit $(m_0, m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

a) Montrer qu'il existe une unique fonction g définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

(i) $\forall i \in \{1, \ldots n\}$ la restriction de g à $[x_{i-1}, x_i]$ est polynomiale de degré ≤ 3 ,

(ii) $\forall i \in \{0, \ldots n\}$ $g(x_i) = f(x_i)$,

(iii) $g''(0) = m_0$; $\lim\limits_{\substack{x \to x_i \\ x \leq x_i}} g''(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_i \\ x \geq x_i}} g''(x) = m_i$; $g''(1) = m_n$.

b) Établir que pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $x \in [x_{i-1}, x_i]$ on a :

$$g(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h} + u_i(x - x_{i-1}) + v_i$$

où u_i et v_i sont des réels que l'on exprimera en fonction de m_{i-1}, m_i, h, $f(x_{i-1})$ et $f(x_i)$.

II.B.2) Montrer que :

$$\begin{cases} g \in S \\ g'(0) = f'(0) \\ g'(1) = f'(1) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad A_{n+1}M = B,$$

où $M = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$, $A_{n+1} = M_{n+1}[2, 4, \ldots, 4, 2]$ selon les notations de la partie I, et B est une matrice colonne dépendant des $f(x_i)$, $(i \in \{0, \ldots, n-1\})$, $f'(0)$, $f'(1)$ et h.

II.B.3) En déduire qu'il existe une et une seule fonction spline cubique $g \in S$ vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} \forall i \in \{0, \ldots, n\},\ g(x_i) = f(x_i) \\ g'(0) = f'(0)\ ;\ g'(1) = f'(1) \end{cases}.$$

II.B.4) Retrouver la valeur de la dimension de S.

On peut montrer et on **admettra** ici que si f est de classe C^4 sur $[0, 1]$,

$$\|f - g\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| \leq \frac{13}{8n^4}\left\|f^{(4)}\right\|_\infty$$

II.C - Interpolation de Lagrange-Sylvester

II.C.1) Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$. Montrer qu'il existe une unique fonction polynomiale h, de degré $\leq n+2$ telle que :

$$\begin{cases} \forall i \in \{0, \ldots, n\},\ h(x_i) = f(x_i) \\ h'(0) = f'(0)\ ;\ h'(1) = f'(1) \end{cases}$$

II.C.2) On peut montrer, et on **admettra** ici que, si f est de classe C^{n+3} sur $[0, 1]$:

$$\|f - h\|_\infty \leq \frac{\left\|f^{(n+3)}\right\|_\infty}{(n+3)\,!} \|M_n\|_\infty \text{ où } M_n(x) = x(x-1)\prod_{k=0}^{n}\left(x - \frac{k}{n}\right).$$

Comparer les deux méthodes d'approximation précédentes (splines cubiques et Lagrange-Sylvester) du double point de vue de la simplicité et de la précision, d'abord pour $n = 1$, puis pour $n \geq 2$.

Partie III - Un exemple de structure euclidienne

III.A - On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour P, $Q \in E$, on pose :

$$(P|Q) = \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i)$$

III.A.1) Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire euclidien sur E. On notera $\|P\|_2$ la norme du polynôme P associée au produit scalaire précédent.

III.A.2) Montrer qu'il existe une unique famille $(L_0, L_1, ..., L_n)$ de E telle que :

$$\forall (i, j) \in \{0, ..., n\}^2 \qquad L_i(j) = \delta_{i,j}$$

où la fonction δ désigne le symbole de Kronecker :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Vérifier que la famille $(L_0, L_1, ..., L_n)$ est une base orthonormée de E. Elle sera notée $\mathscr{B}$. Que peut-on dire du degré du polynôme $X^n + (-1)^{n+1} n!\, L_0$?

III.A.3) Déterminer les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ d'un vecteur N de E orthogonal (au sens du produit scalaire précédemment défini) à l'hyperplan H de E formé des polynômes de degré $\leq n - 1$.

Si $P \in E$, on note

$$d(P, H) = \inf_{Q \in H} \|P - Q\|_2$$

la distance du polynôme P à l'hyperplan H.

Montrer que $d(X^n, H) = n!\; d(L_0, H)$.

III.A.4) En remarquant que : $(1+X)^{2n} = (1+X)^n(1+X)^n$, exprimer

$$\sum_{p=0}^{n} (C_n^p)^2$$

à l'aide d'un seul coefficient binômial.

III.A.5) En déduire la valeur de $d(X^n, H)$.

III.B - Étude d'un endomorphisme de E

On note

$$\Pi(X) = \prod_{i=0}^{n} (X - i)$$

et on fixe un polynôme M_0 dans E.

On considère l'application φ de E dans E, qui à tout P de E associe le reste de la division euclidienne de $P \times M_0$ par Π.

III.B.1) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

III.B.2) Exprimer $\varphi(L_i)$ en fonction de L_i. En déduire que φ est un endomorphisme autoadjoint de E.

III.B.3) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur M_0 pour que φ soit un automorphisme orthogonal de E. Quelle est alors sa nature géométrique ?

III.B.4) On note $\mathscr{B}_E(0, 1) = \{P \in E \ ; \ \|P\|_2 \leq 1\}$.

Exprimer

$$\min_{P \in \mathscr{B}_{E(0,1)}} (\varphi(P)|P) \quad \text{et} \quad \max_{P \in \mathscr{B}_{E(0,1)}} (\varphi(P)|P)$$

à l'aide des $M_0(i)$.

••• FIN •••

Prepa Help

prepahelp.com · classes préparatoires, Maroc et France

Travailler les chapitres de ce su

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bou

éaire

ismes **prepahelp.com/#essai**

Une question sur le concours ou sur

écrire sur WhatsApp

- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/psi