Concours Centrale-Supélec, France

Session 2003, filière PSI

Mathématiques 2

Ce que traite le sujet

- Partie I : généralités sur P(E) et P_n
- Partie II : étude de N(E) et N_n
- Partie III : relation entre P_n et N_n

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie recomposée du sujet officiel, sans retouche de son contenu ; la mise en page diffère de l'original.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/psi/2003/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

MATHÉMATIQUES II Filière PSI

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On considère un espace euclidien E de dimension n. On note $\langle x|y\rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y et $x \mapsto \|x\|$ la norme associée.
Pour $u \in L(E)$, on note $u^\star$ son adjoint, χ_u son polynôme caractéristique et $\mathrm{Sp}\,(u)$ l'ensemble de ses valeurs propres. On note π_u le générateur de l'idéal des polynômes annulateurs de u dont le coefficient de plus haut degré est égal à 1.
π_u est appelé polynôme minimal de u.
L'endomorphisme u de E est dit antisymétrique lorsque $u^\star = -u$.
On note $S(E)$, $A(E)$ et $O(E)$ les sous-ensembles de $L(E)$ formés respectivement des endomorphismes symétriques, antisymétriques, orthogonaux.
Si F est un sous-espace de E stable par u, on note $u_{|F}$ l'endomorphisme de F induit par u.
On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des endomorphismes u de E tels que $u^\star$ soit un polynôme en u et $\mathcal{N}(E)$ l'ensemble des endomorphismes u de E qui commutent avec leur adjoint, donc :

$$\mathcal{P}(E) = \{u \in L(E) \mid u^\star \in \mathbb{R}[u]\},\ \mathcal{N}(E) = \{u \in L(E) \mid (u^\star \circ u = u \circ u^\star)\}.$$

Le but du problème est d'étudier et comparer les deux ensembles $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{N}(E)$.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille n et S_n, A_n et O_n les sous-ensembles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formés respectivement des matrices symétriques, antisymétriques, orthogonales.
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note χ_A son polynôme caractéristique et π_A son polynôme minimal, c'est-à-dire le polynôme minimal de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. On note ${}^tA$ la transposée de A.
Deux matrices A et B sont dites orthogonalement semblables lorsqu'il existe $P \in O_n$ tel que $B = P^{-1}AP$.
On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tA$ peut s'exprimer comme un polynôme en A, donc :

$$\mathcal{P}_n = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA \in \mathbb{R}[A]\right\}, \text{ et de manière analogue}$$
$$\mathcal{N}_n = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = A{}^tA\right\}.$$

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I - Généralités $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}_n$

I.A -

I.A.1) Soient A et B les deux matrices d'un même endomorphisme de E rapporté à deux bases orthonormales. Montrer que A et B sont orthogonalement semblables.

I.A.2) Soit u un endomorphisme de E et A sa matrice sur $\mathcal{B}$, une base orthonormale de E. Établir un rapport entre l'appartenance de u à $\mathcal{P}(E)$ (resp. $\mathcal{N}(E)$) et l'appartenance de A à $\mathcal{P}_n$ (resp. $\mathcal{N}_n$).

Dans la suite du problème, on pourra exploiter ce rapport pour répondre à certaines questions.

I.A.3) Montrer que $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{N}(E)$ et que $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{N}_n$.

I.B -

I.B.1) Vérifier que $S(E) \subset \mathcal{P}(E)$ et $A(E) \subset \mathcal{P}(E)$.

I.B.2) Quelles sont les matrices triangulaires supérieures qui appartiennent à $\mathcal{P}_n$?
En déduire que si $n \geqslant 2$, on a $\mathcal{P}(E) \neq L(E)$.

I.B.3) Soit $u \in L(E)$ admettant, sur une certaine base $\mathcal{B}$ de E, une matrice triangulaire supérieure. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}'$ de E, telle que les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ soient triangulaires supérieures.
Montrer que la matrice de u dans $\mathcal{B}'$ est triangulaire supérieure.
En déduire les éléments $u \in \mathcal{P}(E)$ qui sont trigonalisables.

I.B.4) On suppose que u est un automorphisme de E ; montrer que u admet un polynôme annulateur P tel que $P(0) \neq 0$. En déduire que u^{-1} peut s'écrire comme un polynôme en u.
En déduire que $O(E) \subset \mathcal{P}(E)$.

I.C -

I.C.1) Montrer que si $A \in \mathcal{P}_n$ et $A \neq 0$, alors il existe un unique polynôme réel que l'on note P_A, tel que degré $(P_A) <$ degré (π_A) et $P_A(A) = {}^tA$.
Si A est la matrice nulle, on convient que P_A est le polynôme nul.
Énoncer le résultat correspondant pour $u \in \mathcal{P}(E)$.

I.C.2) Déterminer les matrices A de $\mathcal{P}_n$ pour lesquelles P_A est un polynôme constant.

I.C.3) Déterminer les matrices A de $\mathcal{P}_n$ pour lesquelles P_A est du premier degré. On rappelle que toute matrice carrée s'écrit comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

I.C.4) Soient A et B deux matrices orthogonalement semblables.
Montrer que si $A \in \mathcal{P}_n$ alors $B \in \mathcal{P}_n$ et $P_A = P_B$.

I.D - Décrire les éléments A de $\mathcal{P}_2$ et calculer les P_A correspondants.

I.E - Soit $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ avec $A_1 \in \mathcal{P}_{n_1}$, $A_2 \in \mathcal{P}_{n_2}$.

I.E.1) On suppose que π_{A_1} et π_{A_2} sont premiers entre eux. Montrer l'existence de deux polynômes U et V tels que :
$$P_{A_1} - (P_{A_1} - P_{A_2})\, U \pi_{A_1} = P_{A_2} + (P_{A_1} - P_{A_2})\, V \pi_{A_2}.$$
Calculer A^m pour m entier positif quelconque, puis $P(A)$ pour $P = P_{A_1} - (P_{A_1} - P_{A_2})\, U \pi_{A_1}$.
En déduire que $A \in \mathcal{P}_{n_1+n_2}$.

I.E.2) Expliciter π_A en fonction de π_{A_1} et π_{A_2}.
Comment trouver P_A connaissant π_{A_1}, π_{A_2} et le polynôme P défini par $P = P_{A_1} - (P_{A_1} - P_{A_2})\, U \pi_{A_1}$?

I.F - Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Vérifier que $A \in \mathcal{P}_4$ et calculer P_A avec la méthode précédente.

Partie II - Étude de $\mathcal{N}(E)$ et $\mathcal{N}_n$

II.A - Montrer que si $u \in \mathcal{N}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $P(u) \in \mathcal{N}(E)$.

II.B - Soient $u \in \mathcal{N}(E)$ et $x \in E$. Montrer que $\|u(x)\|^2 = \|u^\star(x)\|^2$. En déduire que u et $u^\star$ ont le même noyau.

II.C - Soit m un entier, $m > 0$. On suppose donné un endomorphisme f antisymétrique inversible de l'espace $\mathbb{R}^m$ muni de son produit scalaire canonique.

II.C.1) Comparer les déterminants de f et $f^\star$. En déduire que m est pair.

II.C.2) On considère les applications n et g définies sur $\mathbb{R}^m$ par $n(x) = \|x\|^2$ et $g(x) = \|f(x)\|^2$ et l'application

$$q : U = \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \text{ définie par } q(x) = \frac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2}.$$

Montrer que n et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^m$ et que leurs différentielles en x fixé sont les formes linéaires

$$h \mapsto 2\langle x|h\rangle \text{ et } h \mapsto 2\langle f(x)|f(h)\rangle.$$

Montrer que l'application q est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ et déterminer sa différentielle en x, en calculant $dq(x)(h)$ au moyen de produits scalaires et de normes.

On note $S = \{x \in U \mid \|x\| = 1\}$.

Montrer que l'ensemble des valeurs prises par q sur S coïncide avec l'ensemble des valeurs prises par q sur U. Montrer que la fonction q admet un maximum sur $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ et que ce maximum est atteint en un point $x_0 \in S$.

Montrer que, pour tout h, on a $\langle f(x_0)|f(h)\rangle = \|f(x_0)\|^2 \langle x_0|h\rangle$. En déduire que $\Pi = \text{Vect}\,(x_0, f(x_0))$ est un plan stable par f.

Donner une base orthonormale de Π et exprimer la matrice de $f_{|\Pi}$ relative à cette base.

II.C.3) Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^m$ telle que :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tau_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tau_{\frac{m}{2}} \end{pmatrix} \text{ avec } \tau_i = \begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix} \text{ et } b_i \neq 0 \text{ pour } i = 1, \dots, \frac{m}{2}.$$

II.D - Soit $u \in L(E)$ et $E_1 \subset E$ un sous-espace stable par u et $u^\star$. On note E_2 le supplémentaire orthogonal de E_1.

II.D.1) Montrer que E_2 est stable par u et $u^\star$.

II.D.2) Montrer que $\left(u_{|E_1}\right)^\star = u^\star{}_{|E_1}$.

II.D.3) Montrer que si, en outre, $u \in \mathcal{N}(E)$, alors $u_{|E_1} \in \mathcal{N}(E_1)$ et $u_{|E_2} \in \mathcal{N}(E_2)$.

Jusqu'à la fin de la partie II, u désigne un élément de $\mathcal{N}(E)$.

II.E - Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$; montrer que $\|u(x) - \lambda x\|^2 = \|u^\star(x) - \lambda x\|^2$. En déduire que u et $u^\star$ ont les mêmes sous-espaces propres et que ceux-ci sont en somme directe orthogonale.

Si λ est une valeur propre de u, on note $E_u(\lambda)$ le sous-espace propre associé. Soit F le supplémentaire orthogonal du sous-espace :

$$\bigoplus_{\lambda} E_u(\lambda), \text{ où la somme porte sur l'ensemble des valeurs propres de } u.$$

Montrer que F est stable par u et $u^\star$. En considérant la restriction de u à F, montrer que la dimension de F ne peut être impaire. On notera $\dim F = 2p$.

II.F - On suppose que p est non nul. Soit $v \in \mathcal{N}(F)$. On pose

$$s = \frac{v + v^\star}{2} \text{ et } a = \frac{v - v^\star}{2}.$$

II.F.1) Justifier que le polynôme caractéristique de s est scindé.On le note :

$$\chi_s(X) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - X)^{n_i}.$$

II.F.2) Montrer que $s \circ a = a \circ s$ et $s \circ v = v \circ s$.

Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}'$ de F telle que la matrice de v dans $\mathcal{B}'$ soit diagonale par blocs :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_k \end{pmatrix}$$

avec, pour $i = 1, \dots, k$, M_i de la forme $\lambda_i I_{n_i} + A_i$ où A_i est antisymétrique.

II.F.3) On suppose en outre que v n'admet aucune valeur propre réelle. Montrer que les A_i sont inversibles.

II.G - Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tau_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tau_p \end{pmatrix} \text{ avec } D \text{ matrice diagonale, } \tau_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix} \text{ et } b_i \neq 0$$

pour $i = 1, \dots, p$.

II.H - Donner une caractérisation des matrices $A \in \mathcal{N}_n$.

II.I - Préciser la matrice obtenue dans II.G quand $u \in O(E)$.

Partie III - Relation entre $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{N}_n$

III.A - Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

III.A.1) Soit

$$\Delta = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_k \end{pmatrix} \text{ une matrice réelle diagonale par blocs.}$$

Montrer que $P(\Delta) = {}^t\Delta$ si et seulement si $P(M_i) = {}^tM_i$, pour $i = 1, \dots, k$.

III.A.2) Donner les expressions de P_A, χ_A et π_A pour une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ où } b \neq 0.$$

Montrer que $P(A) = {}^tA$ si et seulement si $P(a + ib) = a - ib$ et $P(a - ib) = a + ib$.

Dans les questions qui suivent, on fixe $A \in \mathcal{N}_n$. D'après II.H, A est orthogonalement semblable à une matrice B telle que celle représentée dans II.G.

III.A.3) Montrer que $P(A) = {}^tA$ si et seulement si :
$$\begin{cases} P(\lambda) = \lambda \text{ pour toute valeur propre réelle } \lambda \text{ de } A \\ P(z) = \overline{z} \text{ pour toute racine complexe non réelle } z \text{ de } A \end{cases}$$

III.A.4) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré minimal, vérifiant les conditions ci-dessus (sur $P(\lambda)$ et $P(z)$) et que ce polynôme est, en fait, à coefficients réels.
En déduire que $\mathcal{N}_n = \mathcal{P}_n$.

III.B - Montrer que le polynôme P trouvé dans III.A.4 est, en fait, P_A.
Retrouver, avec la méthode précédente, le polynôme P_A de la question I.F.

III.C - Dans cette question, on suppose $n \geqslant 3$ et on note $C(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice circulante
$$C(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \ddots & \ddots & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-1} & \alpha_0 \end{pmatrix} \text{ et } J = C(0, 1, 0, \ldots, 0).$$

III.C.1) Montrer que $J \in \mathcal{P}_n$.
En déduire que toute matrice circulante appartient à $\mathcal{P}_n$.

III.C.2) À toute matrice circulante non nulle $A = C(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$, on associe les polynômes
$$P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i X^i \text{ et } Q(X) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i X^{n-i}.$$
Donner l'expression de π_J. Comparer Q et le reste de la division euclidienne de $P_A \circ P$ par π_J.
En déduire les étapes d'une méthode de calcul de P_A. Détailler le calcul pour $A = C(1, 1, 0)$.

III.D - Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ avec $a_2 \neq 0$.
Montrer qu'il existe un entier $n \geqslant 3$ et une matrice $A \in \mathcal{P}_n$ telle que $P = P_A$ si et seulement si $(a_1 - 1)^2 - 4a_0a_2 \in [0, 4[$.
Indication : montrer que, si n et A existent, χ_A admet au moins une racine réelle et exactement deux racines complexes, conjuguées l'une de l'autre.

FIN

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Calcul algébrique : sommes, produits, binôme et systèmes linéaires
- Espaces vectoriels normés
- Nombres complexes et trigonométrie

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/psi