Concours Centrale-Supélec, France

Session 2005, filière PSI

Sciences industrielles de l'ingénieur

Ce que traite le sujet

- Partie I : analyse système
- Partie II : modèle de comportement mécanique
- Partie III : non-dérapage et non-basculement en virage
- Partie IV : équations du mouvement et accélération
- Partie V : stabilisation et asservissement d'inclinaison

Sujet reproduit sans retouche à partir de la page suivante.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/psi/2005/si

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UN VEHICULE AUTO-BALANCÉ DE TYPE SEGWAY®

Partie I - Analyse système





Photographies 1

Le support de l'étude est le véhicule auto-balancé Segway® . Il s'agit d'un moyen de transport motorisé qui permet de se déplacer en ville. En termes de prestations, il est moins rapide qu'une voiture ou qu'un scooter, plus maniable, plus écologique, moins encombrant et nettement plus moderne.

La conduite du Segway® se fait par inclinaison du corps vers l'avant ou vers l'arrière, afin d'accélérer ou freiner le mouvement (comme pour la marche à pied dans laquelle le piéton s'incline vers l'avant pour débuter le mouvement). Les virages à droite et à gauche sont quant à eux commandés par la rotation de la poignée directionnelle située sur la droite du guidon (voir photographies 1).

La spécificité de ce véhicule est d'avoir deux roues qui ont le même axe de rotation, avec son centre de gravité situé au-dessus de l'axe commun des roues, si

Filière PSI

bien qu'on se demande comment rester à l'équilibre une fois monté sur la plate-forme. Tout comme le cerveau permet à l'individu de tenir debout sans tomber grâce à l'oreille interne, le système comporte un dispositif d'asservissement d'inclinaison, maintenant la plate-forme du véhicule à l'horizontale ou encore la barre d'appui, supposée orthogonale à cette plate-forme, à la verticale.

Le Segway® comporte à cet effet des capteurs et des microprocesseurs commandant les deux moteurs électriques équipant les deux roues.

L'objectif de cette étude est de vérifier le non-dérapage des roues en virage, les performances de vitesse et d'accélération et enfin la stabilité en ligne droite.

Le diagramme des interacteurs du Segway® , présenté figure 1, précise les fonctions assurées par le système.

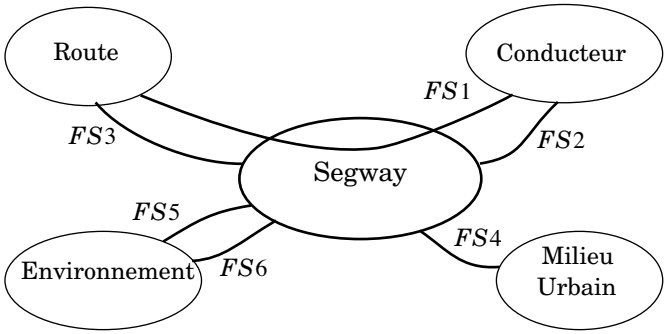


Figure 1 : diagramme des interacteurs du système

Énoncé des Fonctions de Service :

- FS1 : permettre au conducteur de se déplacer aisément sur la route.
- FS2 : donner au conducteur une sensation de stabilité.
- FS3 : rester insensible aux perturbations provenant de la route.
- FS4 : rester manœuvrable dans la circulation.
- FS5 : être peu encombrant.
- FS6 : contribuer au respect de l'environnement.

La caractérisation de chacune des fonctions de service sera donnée au début de chaque partie.

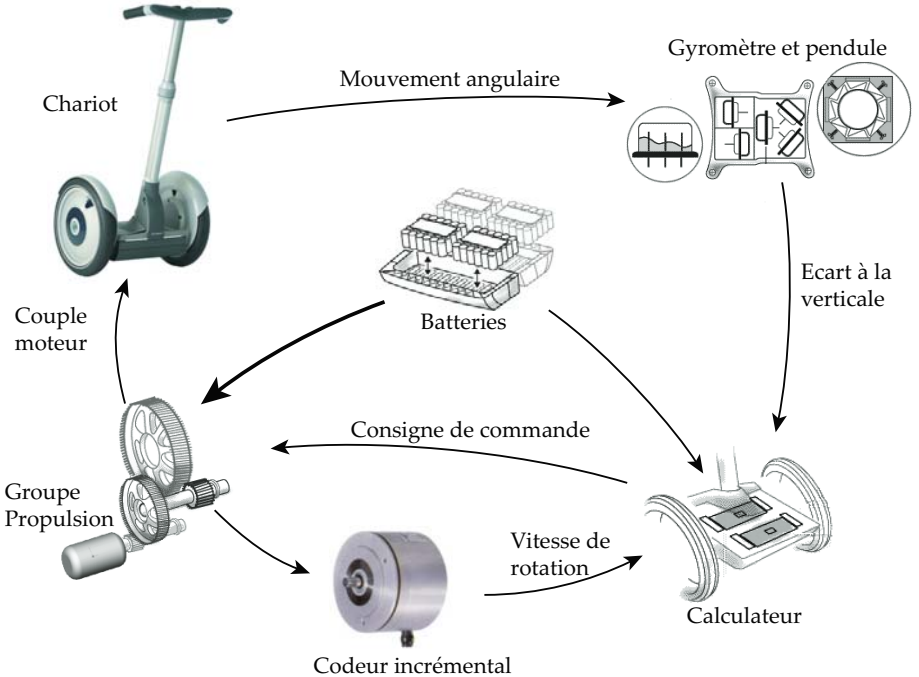


Figure 2 : schéma d'organisation structurelle

On propose de s'appuyer sur une description structurelle du véhicule, composé (voir figure 2) :

- d'un **chariot** (châssis + 2 roues uniquement), transportant le conducteur,
- de deux **moto-réducteurs** entraînant les roues (un par roue),
- d'un ensemble constitué d'un **gyromètre** et d'un **pendule** délivrant une information sur l'angle d'inclinaison du châssis par rapport à la verticale et sur sa dérivée,
- d'un **calculateur** élaborant, à partir des informations issues des capteurs, les consignes de **commande** des groupes moto-réducteurs.
- de **batteries** fournissant l'énergie aux divers composants.

I.A - Questions préliminaires

L'énergie maximale stockée dans les batteries vaut $E_b = 2\ \text{MJ}$. Les moto-réducteurs ont un rendement global de $0,8$. La résistance moyenne à l'avancement du véhicule peut être assimilée à un effort de $60\ \text{N}$.

I.A.1) Déterminer la distance maximale que peut parcourir le Segway® entre deux recharges des batteries. Justifier la pertinence de ce moyen de transport.

Le schéma d'organisation structurelle comporte des codeurs incrémentaux, fournissant au calculateur une image de la vitesse de rotation des moteurs.

I.A.2) Rappeler en quelques lignes le principe de fonctionnement d'un codeur incrémental. Citer aussi un autre moyen d'acquisition d'une vitesse de rotation.

I.A.3) Rappeler quelle est la grandeur physique mesurée par un gyromètre mécanique et le principe de la mesure associée.

I.B - Étude Système

Le système étudié est l'ensemble mobile (chariot, moto-réducteurs, capteurs, calculateur et batteries), sans le conducteur. Son diagramme SADT A-0 est donné figure 3.

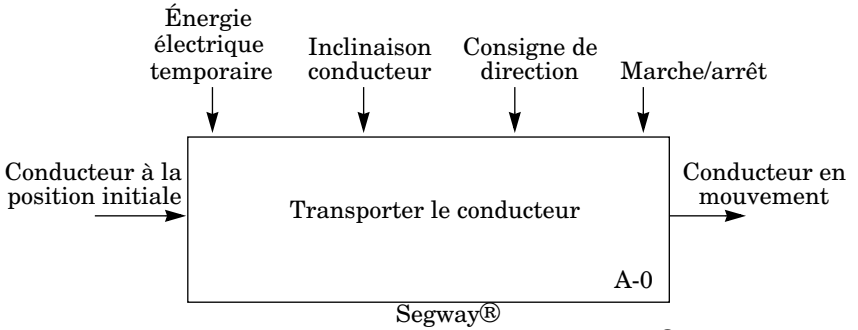


Figure 3 : diagramme A-0 du Segway®

I.B.1) Compléter le SADT de niveau A0 proposé dans le document réponse.

Partie II - Modèle de comportement mécanique

Objectif : Proposer des relations cinématiques entre les paramètres du mouvement.

II.A - Modèle et paramétrage

- Soit $R_0(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ un repère supposé galiléen lié à la route tel que $\vec{z_0}$ soit dirigé suivant la verticale ascendante.
- $R_1(A, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_0})$ un repère en rotation par rapport à R_0 autour de $\vec{z_0}$ tel que $\vec{x_1}$ soit colinéaire à l'axe commun des roues et A le point milieu de l'axe des roues. On pose $\varphi = (\vec{x_0}, \vec{x_1}) = (\vec{y_0}, \vec{y_1})$ l'angle de virage.

- $R_2(A, \vec{x_1}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$ un repère lié au châssis du chariot, en rotation autour de $(A, \vec{x_1})$ par rapport à R_1 tel que $\vec{z_2}$ soit colinéaire à la barre d'appui. On pose $\psi = (\vec{y_1}, \vec{y_2}) = (\vec{z_0}, \vec{z_2})$ l'angle d'inclinaison du châssis par rapport à la verticale. La régulation consiste à maintenir cet angle nul.
- $R_3(A, \vec{x_1}, \vec{y_3}, \vec{z_3})$ un repère intermédiaire en rotation par rapport à R_2, autour de $(A, \vec{x_1})$. On pose $\alpha = (\vec{y_2}, \vec{y_3}) = (\vec{z_2}, \vec{z_3})$ l'angle d'inclinaison arrière-avant du conducteur.

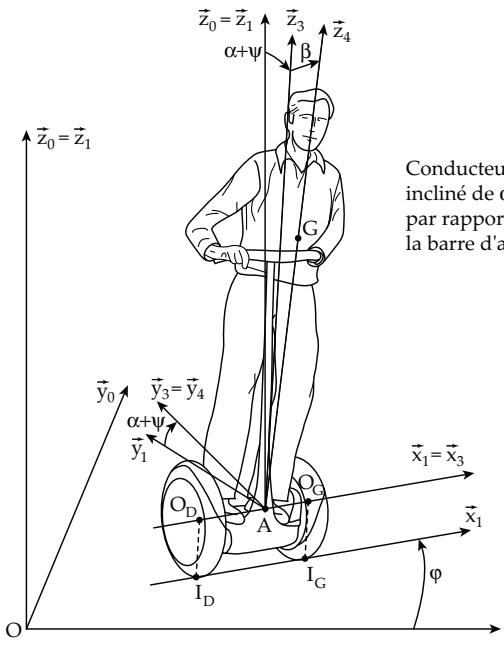


Figure 4 : paramétrage cinématique du système

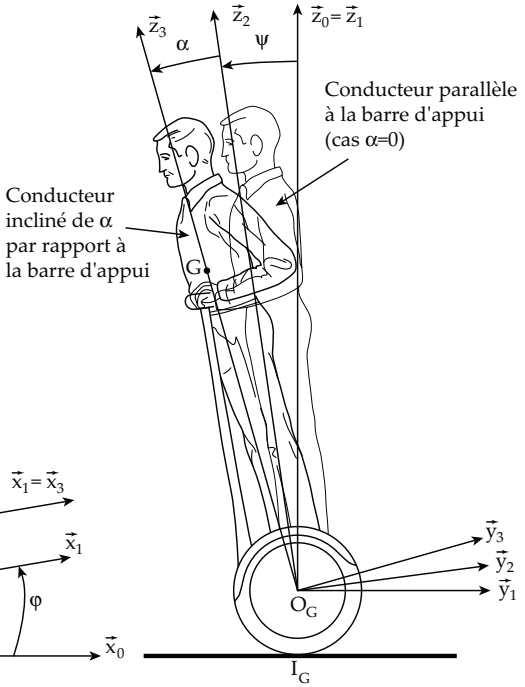


Figure 5 : figure simplifiée dans le cas $\beta = 0$ soit $\vec{z}_3 = \vec{z}_4$

- $R_4(A, \vec{x_4}, \vec{y_3}, \vec{z_4})$ un repère lié au conducteur, considéré comme un solide indéformable, en rotation par rapport à R_3 autour de $(A, \vec{y_3})$ tel que l'axe $(A, \vec{z_4})$ passe par le centre de gravité G du conducteur. On pose $\beta = (\vec{x_3}, \vec{x_4}) = (\vec{z_3}, \vec{z_4})$ l'angle d'inclinaison droite-gauche du conducteur et $\overrightarrow{AG} = h\vec{z_4}$ avec h constante positive.

- $R_D(O_D, \vec{x_1}, \vec{y_D}, \vec{z_D})$ un repère lié à la roue Droite, en rotation autour de $(A, \vec{x_1})$ par rapport à R_2 où O_D est le centre de gravité de la roue droite. $\theta_D = (\vec{y_2}, \vec{y_D}) = (\vec{z_2}, \vec{z_D})$ est l'angle de rotation de la roue droite par rapport au châssis. I_D est le point de contact de la roue droite avec la route tel que $\overrightarrow{I_D O_D} = R\vec{z_0}$. On suppose que la roue droite roule sans glisser sur le sol au point I_D.
- $R_G(O_G, \vec{x_1}, \vec{y_G}, \vec{z_G})$ un repère lié à la roue Gauche, en rotation autour de $(A, \vec{x_1})$ par rapport à R_2 où O_G est le centre de gravité de la roue gauche. $\theta_G = (\vec{y_2}, \vec{y_G}) = (\vec{z_2}, \vec{z_G})$ est l'angle de rotation de la roue gauche par rapport au châssis. I_G est le point de contact de la roue gauche avec la route et on suppose que la roue gauche roule sans glisser sur le sol au point I_G (les deux roues ont même rayon R).

On note L l'empattement du chariot tel que $\overrightarrow{O_D O_G} = L\vec{x_1}$ et $\overrightarrow{O_D A} = \frac{L}{2}\vec{x_1} = \overrightarrow{A O_G}$.

II.B - Étude cinématique préalable

II.B.1) Proposer un graphe des liaisons du système restreint à l'ensemble de solides {Route, Roue Gauche, Roue Droite, Châssis}. Préciser pour chaque liaison ses caractéristiques géométriques.

II.B.2) En s'appuyant sur le paramétrage et en utilisant de la couleur, proposer un schéma cinématique du système {Roue Gauche, Roue Droite, Plate-forme, Conducteur}, en complétant l'épure du document réponse (ne pas schématiser le contact roue/route).

II.B.3) Exprimer, en fonction du paramétrage, les torseurs cinématiques :

- du châssis par rapport au sol : $\{V(2/0)\}$, en notant $\vec{V}(A \in 2/0) = U\vec{x_1} + V\vec{y_1}$,
- de la roue droite par rapport au châssis : $\{V(R_D/2)\}$,
- de la roue gauche par rapport au châssis : $\{V(R_G/2)\}$

II.B.4) Énoncer ensuite les deux relations de roulement sans glissement des roues par rapport à la route et déterminer trois relations scalaires liant les 6 paramètres inconnus $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}_D$, $\dot{\theta}_G$, U et V aux dimensions L et R.

Ces relations seront utilisées dans l'étude dynamique.

II.C - Étude de la transmission de puissance

La transmission de puissance choisie possède deux moteurs électriques (un pour chaque roue), associé chacun à un réducteur de rapport de réduction $|K_r| = \frac{1}{24}$.

II.C.1) Une voiture ne possède généralement qu'un seul moteur et qu'un seul réducteur (la boîte de vitesses). Le différentiel permet de répartir la puissance

motrice sur les deux roues motrices. Expliquer pourquoi le constructeur du Segway® n'a pas adopté cette solution.

Un pré-dimensionnement des réducteurs a conduit à adopter les contraintes suivantes :

- $[OO_M] = 90$ mm (voir document réponse),
- module $m = 1$ mm pour tous les engrenages,
- nombre de dents minimum pour chaque roue dentée : $Z_{i\,\text{mini}} = 15$.

Les points O et O_M correspondent respectivement aux projections, dans le plan $(O_D, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, des axes de rotation d'une roue et du moteur associé.

II.C.2) Proposer, sur le document réponse, une architecture du réducteur s'intégrant dans le carter et dont le rapport de réduction vaut $|K_r| = \frac{1}{24}$ en dessinant une épure de la solution adoptée.

Représenter uniquement les diamètres primitifs des roues dentées, dans le plan du document réponse puis récapituler sous forme de tableau, sur votre copie, les nombres de dents choisis.

Partie III - Validation de la FS4

Objectif : vérifier le non dérapage des roues et le non basculement du Segway® pour les différents rayons de virage.

Le **dérapage** se définit comme le **glissement** suivant $\vec{x}_1$ ou $\vec{y}_1$ des roues par rapport à la route et le **basculement** du Segway® a lieu lorsque l'une des roues n'est plus en contact avec la route. Le tableau 1 est extrait du cahier des charges. Trois configurations de vitesse du Segway® sont étudiées :

- déplacement à la vitesse d'un homme marchant,
- déplacement à la vitesse d'un homme courant,
- déplacement à la vitesse maximale.

Fonction de service	**Critère**	**Niveau**	
FS4 : rester manœuvrable dans la circulation	Dérapage	Aucun	
	Basculement	Aucun	
	Rayon de virage minimum admissible	**Vitesse**	**Rayon minimum**
		5 km/h	$\rho = 0,5$ m
		10 km/h	$\rho = 2,5$ m
		20 km/h	$\rho = 10$ m

Tableau 1 : extrait du CdCF relatif à FS4

III.A - Analyse du modèle de calcul des actions mécaniques

Le système étudié est celui de la question II.B.1, constitué des solides {Route, Roue Gauche, Roue Droite, Châssis}. Seuls les paramètres V, φ et Ψ sont considérés, les autres paramètres étant fixes ou n'intervenant pas. Les contacts roue/route en I_G et I_D sont modélisés par des liaisons sphère plan avec frottement. Cette modélisation conduit aux torseurs d'actions mécaniques exercées par la route sur les roues suivants :

$$\{T_{(\text{Route}\to R_G)}\} = \begin{Bmatrix} X_G\vec{x}_1 + Y_G\vec{y}_1 + Z_G\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_G} \quad \{T_{(\text{Route}\to R_D)}\} = \begin{Bmatrix} X_D\vec{x}_1 + Y_D\vec{y}_1 + Z_D\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_D}$$

III.A.1) En s'appuyant sur le graphe des liaisons de la question II.B.1, déterminer le nombre de mobilités m du système {Route, Roue Gauche, Roue Droite, Châssis}. En déduire alors le degré d'hyperstatisme h du mécanisme.

Dans la suite de cette partie, l'asservissement d'inclinaison est considéré comme parfaitement réalisé, c'est à dire que $\Psi = 0$. De plus, le conducteur est supposé uniquement incliné d'un angle β constant vers l'intérieur du virage. On impose de plus $\alpha \equiv 0$, ce qui impose aussi V constant où V est négatif en marche avant. Enfin, le virage est pris à vitesse de rotation $\dot{\varphi}$ constante et $\dot{\varphi} > 0$.

III.B - Détermination de l'inclinaison du conducteur en virage

La position naturelle d'un individu en virage (cas de la bicyclette, des rollers, ...) est de s'incliner vers l'intérieur du virage. L'application du Principe Fondamental de la Dynamique au conducteur montre alors que cette condition est équivalente à $\vec{g} - \vec{\Gamma}(G \in 4/0)$ colinéaire à $\vec{z}_4$.

Après calcul de $\vec{\Gamma}(G \in 4/0)$, la figure du document réponse donne les trois projections de $\vec{g} - \vec{\Gamma}(G \in 4/0)$ dans la base $(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ en fonction de l'inclinaison β du conducteur, avec les paramètres :

$\dot{\varphi} = 0,8 \text{ rad/s}$, $h = 0,95 \text{ m}$, $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $V = -10 \text{ km/h}$ (soit $\rho = 3,5 \text{ m}$)

III.B.1) Par un tracé sur le document réponse, justifié sur la copie, donner alors la valeur de β qui permet de vérifier la condition exposée ci-dessus.

III.C - Étude dynamique simplifiée du Segway® en virage

Dans ce paragraphe, un modèle simplifié où le conducteur est assimilé à une masse concentrée m_H en G et le chariot assimilé à une masse concentrée m_S en A est adopté. De plus, l'inertie des roues et l'inertie en rotation du Segway® sont négligées devant les termes liés à la masse du conducteur et du chariot. Les hypothèses V = constante, β = constante, $\dot{\varphi}$ = constante et $\Psi \equiv 0$ avec β tel que

$\vec{g} - \vec{\Gamma}(G \in 4/0)$ soit colinéaire à $\vec{z}_4$ (comme défini en III.B) sont conservées. On isole alors le système complet {Conducteur, Châssis, Roue Droite, Roue Gauche}.

III.C.1) Faire le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures qui s'exercent sur ce système.

L'application du Principe Fondamental de la Dynamique à ce système dans son mouvement par rapport au sol permet d'obtenir, après réduction au point A, les équations suivantes projetées sur la base : $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$:

Théorème de la résultante dynamique selon $\vec{x}_1$:

$$-m_H\dot{\varphi}(V + h\dot{\varphi}\sin\beta) - m_S V\dot{\varphi} = X_G + X_D$$

Théorème de la résultante dynamique selon $\vec{z}_0$:

$$0 = Z_G + Z_D - (m_H + m_S)g$$

Théorème du moment dynamique en A en projection selon $\vec{y}_1$:

$$\frac{L}{2}Z_G + RX_G - \frac{L}{2}Z_D + RX_D = 0$$

III.C.2) Expliquer pourquoi le système d'équations obtenu ne permet pas de déterminer toutes les inconnues d'effort et recenser celles qui ne peuvent pas être calculées sans hypothèse complémentaire. Expliquer l'origine de cette impossibilité.

Le modèle de frottement de Coulomb de coefficient f est choisi pour le contact roue/sol et, en raison du déchargement de la roue gauche, l'hypothèse $X_G = 0$ est adoptée.

III.C.3) Énoncer les lois de Coulomb en utilisant les notations du III.A pour une roue, dans les cas d'adhérence et de glissement.

La stabilité du Segway® impose de garantir un effort tangentiel minimal transmissible suivant $\vec{y}_1$. Par conséquent, on suppose $Y_G = Y_D = Y_{\min}$ donné.

Le cahier des charges précise les valeurs minimales des rayons de courbure du virage ρ, définis par $|V| = \rho\dot{\varphi}$, pour différentes valeurs de vitesse. Compte tenu des valeurs des paramètres de géométrie et de masse du Segway®, on trace sur la figure du document réponse, avec $Y_{\min} = 100$ N et $f = 0,6$, deux graphiques :

- $\dfrac{\sqrt{Y^2_{\min} + X_D^2}}{Z_D}$ en fonction de ρ, rayon de courbure du virage en mètre,
- $\dfrac{Y_{\min}}{Z_G}$ en fonction de ρ, rayon de courbure du virage en mètre.

III.C.4) En expliquant votre démarche et en complétant le document réponse, vérifier les performances attendues vis-à-vis des rayons de virage minimums tout en garantissant les critères de non basculement et de non dérapage.

Partie IV - Validation de la FS1

Objectif : Déterminer la relation entre l'inclinaison du conducteur et l'accélération du Segway® en ligne droite ainsi que les équations mécaniques nécessaires au modèle d'asservissement d'inclinaison.

Pour une utilisation confortable et sûre, le Segway® doit satisfaire les performances de vitesse et d'accélération énoncées dans le tableau 2 extrait du cahier des charges.

Fonction de service	**Critère**	**Niveau**
FS1 : permettre au conducteur de se déplacer aisément dans un milieu urbain	Vitesse	0 – 20 km/h
	Accélération et décélération en fonctionnement normal	$1,5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ minimum
	Distance d'arrêt maximale	3 m à 20 km/h
	Manipulation intuitive	Commande naturelle pour les réflexes humains

Tableau 2 : extrait du CdCF relatif à FS1

Hypothèses :

- le Segway® se déplace en ligne droite : $\varphi \equiv 0$ et $\beta = 0$. On note donc pour simplifier $\theta_D = \theta_G = \theta$,
- l'angle α d'inclinaison du conducteur est constant : $\alpha =$ constante. Dans ce cas, $\vec{V}(A \in 2/0) = V\vec{y}_1 = -R(\dot{\psi} + \dot{\theta})\vec{y}_1$.

IV.A - Détermination des équations mécaniques régissant le système

On pose pour la suite les notations suivantes :

Conducteur : *H*	
Centre de gravité G avec $\overrightarrow{AG} = h\vec{z}_4$ $h = 0,95$ m $m_H = 80$ kg	$I_G(H) = \begin{pmatrix} A_H & 0 & 0 \\ 0 & B_H & 0 \\ 0 & 0 & C_H \end{pmatrix}_{\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4}$ $A_H = 18\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ $B_H = 20\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ $C_H = 1,2\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

Châssis : S	
Centre de gravité A $m_s = 25$ kg	$I_A(S) = \begin{pmatrix} A_S & 0 & 0 \\ 0 & B_S & 0 \\ 0 & 0 & C_S \end{pmatrix}_{\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2}$ $A_S = 0,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $B_S = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $C_S = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Roue gauche : R_G	
Centre de gravité O_G, avec $\overrightarrow{AO_G} = \frac{L}{2}\vec{x}_1$ Rayon $R = 240$ mm $L = 650$ mm $m_R = 5$ kg	$I_{O_G}(R_G) = \begin{pmatrix} A_R & 0 & 0 \\ 0 & B_R & 0 \\ 0 & 0 & C_R \end{pmatrix}_{\vec{x}_1, \vec{y}_G, \vec{z}_G}$ $A_R = 0,28 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $B_R = 0,05 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $C_R = 0,05 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Roue droite : R_D	
Centre de gravité O_D, avec $\overrightarrow{O_DA} = \frac{L}{2}\vec{x}_1$ Rayon $R = 240$ mm $L = 650$ mm $m_R = 5$ kg	$I_{O_D}(R_D) = \begin{pmatrix} A_R & 0 & 0 \\ 0 & B_R & 0 \\ 0 & 0 & C_R \end{pmatrix}_{\vec{x}_1, \vec{y}_D, \vec{z}_D}$ $A_R = 0,28 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $B_R = 0,05 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $C_R = 0,05 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

La masse et l'inertie de la motorisation et de son réducteur associé sont supposées négligeables. Le moto-réducteur fait partie du châssis.

- l'action mécanique exercée par la route sur les roues est modélisée par

$$\{T(\text{Route} \to R_G)\} = \left\{ \begin{matrix} Y_G\vec{y}_1 + Z_G\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{I_G} \text{ et } \{T(\text{Route} \to R_D)\} = \left\{ \begin{matrix} Y_D\vec{y}_1 + Z_D\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{I_D}$$

- l'action mécanique exercée par l'arbre de sortie du moto-réducteur sur la roue, identique pour chaque roue est modélisée par :

$$\{T(\text{Moto-réducteur} \to R_D)\} = \{T(\text{Moto-réducteur} \to R_G)\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ C_S\vec{x}_1 \end{matrix} \right\}_A$$

Dans cette partie, le problème est supposé plan dans $(A, \vec{y_1}, \vec{z_0})$.

IV.A.1) Justifier l'hypothèse de problème plan du point de vue des efforts.

IV.A.2) Déterminer pour chaque solide (Conducteur, Châssis, Roue Gauche et Roue Droite) dans leur mouvement par rapport au repère galiléen R_0 :

- la projection sur $\vec{y_1}$ de la résultante du torseur dynamique notée, pour un solide S_i, $\vec{R}_D(S_i/0)\cdot\vec{y}_1$,
- la projection sur $\vec{x_1}$ du moment dynamique en A notée, pour un solide S_i, $\vec{\delta}_A(S_i/0)\cdot\vec{x}_1$.

On recherche les équations liant les couples moteurs aux mouvements du système, c'est-à-dire V, Ψ et leurs dérivées.

IV.A.3) En exposant la séquence d'isolement et en appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique, montrer que l'on peut obtenir le système de deux équations suivant :

$$\begin{cases}(m_H h^2 + A_H + A_S)\ddot{\Psi} - m_H h\dot{V}\cos(\alpha+\Psi) = m_H hg\sin(\alpha+\Psi) - 2C_s \\ (m_S + m_H + 2m_R)\dot{V} - m_H h\ddot{\Psi}\cos(\alpha+\Psi) + m_H h\dot{\Psi}^2\sin(\alpha+\Psi) = -2\dfrac{A_R}{R^2}\dot{V} - 2\dfrac{C_S}{R}\end{cases}$$

Préciser clairement pour chaque isolement le système considéré et l'équation scalaire choisie. La relation cinématique suivante, issue de la question II.B.4 pourra être utilisée : $V = -R(\dot{\theta}+\dot{\Psi})$.

IV.A.4) Énoncer les hypothèses qui permettent d'envisager de linéariser le système précédent. Sous ces hypothèses, montrer alors que le système linéarisé peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases}A\ddot{\Psi}(t) - B\dot{V}(t) = -2C_S(t) + C(\alpha(t)+\Psi(t)) \\ B\ddot{\Psi}(t) - D\dot{V}(t) = \dfrac{2C_S(t)}{R}\end{cases}$$

où vous préciserez les expressions des constantes A, B, C et D. Réaliser les applications numériques.

IV.B - Relation entre l'inclinaison du conducteur et l'accélération du Segway®

On souhaite trouver la relation entre l'inclinaison $\alpha(t)$ du conducteur et l'accélération du Segway®. L'asservissement est ici considéré comme parfaitement réalisé, c'est à dire $\Psi \equiv 0$.

IV.B.1) Montrer que cette relation s'écrit sous la forme $\dot{V}(t) = K\alpha(t)$ où vous préciserez la valeur numérique de K.

IV.B.2) Vérifier les performances attendues du cahier des charges en vous appuyant sur les configurations proposées figure 6. On utilisera ici $K = -7\ \mathrm{m \cdot s^{-2}/rad}$ et on se souviendra que V est négatif en marche avant.

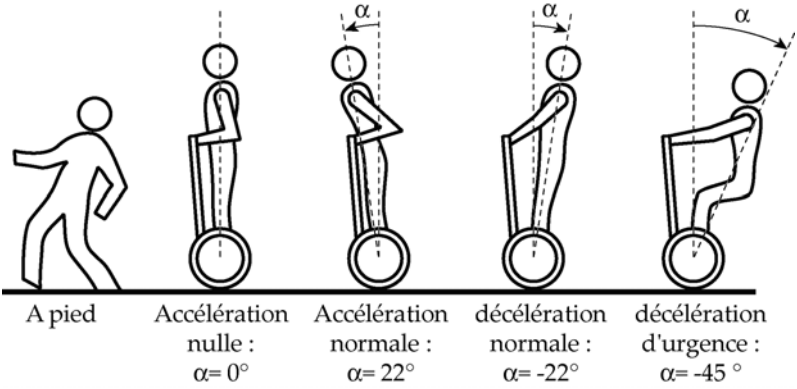


Figure 6 : configurations angulaires proposées

Partie V - Validation de la FS2 et de la FS3

Objectif : vérifier les performances de l'asservissement d'inclinaison par rapport à la verticale

Pour une utilisation confortable et sûre, le Segway® doit satisfaire les performances énoncées dans le tableau 3 extrait du cahier des charges.

Fonction de service	**Critère**	**Niveau**
FS2 : donner au conducteur une sensation de stabilité	Temps de réponse de 0 à 5 km/h	1 s maximum
	Dépassement d'inclinaison	< 30%
	Inclinaison du châssis par rapport à la verticale	Nulle à convergence $\lim_{t \to \infty} \Psi(t) = 0$
FS3 : rester insensible aux perturbations provenant de la route	Hauteur de la marche de trottoir franchissable à 5 km/h	5 cm maximum
	Perturbations dues à la route, nature du sol (pavés, franchissement d'un trottoir, ...)	Plage de fréquences de 0 à 300 Hz

Tableau 3 : extrait du CdCF relatif à FS2 et FS3

La régulation d'inclinaison du Segway® est réalisée par :

- un moto-réducteur qui permet de délivrer un couple $C_m(t) = K_m u(t)$ où $u(t)$ est une grandeur de commande et $K_m = 24\ \text{N} \cdot \text{m} \cdot V^{-1}$
- le système mécanique dont les équations ont été déterminées question IV.A.4 et qui peuvent, dans le cas où l'angle $\alpha(t)$ n'est pas supposé constant, se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{V}(t) = \dfrac{1}{D}\left(B\ddot{\chi}(t) + 2\dfrac{C_m(t)}{R}\right) \\ (DA - B^2)\ddot{\chi}(t) = 2\left(\dfrac{B}{R} + D\right)C_m(t) + DC\chi(t) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} A = 90\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \\ B = 75\ \text{kg} \cdot \text{m} \\ C = 750\ \text{kg} \cdot \text{m}^2\text{s}^{-2} \\ D = 125\ \text{kg} \\ R = 240\ \text{mm} \\ \chi(t) = \alpha(t) + \Psi(t) \end{cases}$$

Par commodité de signe, la notation $C_m(t) = -C_S(t)$ est utilisée dans les équations ci-dessus. Les conditions initiales sont toutes nulles.

V.A - Stabilisation du système

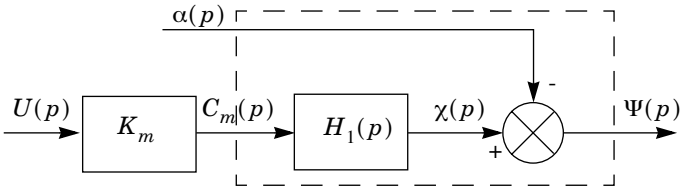


Figure 7 : schéma bloc 1

V.A.1) Montrer que le schéma bloc du système peut se mettre sous la forme présentée figure 7 en déterminant l'expression littérale de $H_1(p)$.

Analyser la stabilité du système d'entrée $u(t)$ et de sortie $\Psi(t)$ en étudiant la fonction de transfert $F_1(p) = \dfrac{\Psi(p)}{U(p)}$. Pouvait-on s'attendre à ce résultat ?

On note alors $H_1(p) = \dfrac{K_1}{\dfrac{p^2}{\omega_1^2} - 1}$.

Les valeurs numériques utilisées par la suite seront : $\omega_1 = 4,1\text{rad/s}$ et $K_s = K_m K_1 = 0,24\ \text{rad V}^{-1}$.

Afin de stabiliser le système, la grandeur de commande $U(p)$ est élaborée à partir des mesures de $\dot{\Psi}$ (réalisée par le gyromètre), et de Ψ (réalisée par combi-

naison de la mesure du gyromètre et du pendule). Le schéma bloc obtenu est celui du document réponse.

V.A.2) Dans le cas où $\alpha \equiv 0$, déterminer, en fonction de K_s, k_p, k_v et ω_1 la fonction de transfert

$$F_2(p) = \frac{\Psi(p)}{W(p)}.$$

Déterminer les conditions sur k_v et sur k_p pour que le système soit stable.

$F_2(p)$ est une fonction de transfert du second ordre pouvant se mettre sous la forme :

$$F_2(p) = \frac{\Psi(p)}{W(p)} = \frac{K_2}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

V.A.3) Déterminer, en fonction de K_s, k_p, k_v et ω_1 les expressions de K_2, ξ, ω_0.

On choisit une pulsation propre ω_0 proche de celle du système mécanique, c'est à dire $\omega_0 = 1,5\omega_1 = 6,15 \text{ rad/s}$.

V.A.4) Déterminer les valeurs de k_v et de k_p telles que le temps de réponse à 5% soit minimal.

V.B - Asservissement d'inclinaison du chariot

La consigne de la régulation de l'inclinaison $\Psi(t)$ du châssis par rapport à la verticale est notée $\Psi_C(t)$. On introduit un correcteur de fonction de transfert $C(p)$ qui élabore le signal $w(t)$ (de transformée de Laplace $W(p)$) à partir de l'écart $\varepsilon(t) = \Psi_C(t) - \Psi(t)$.

V.B.1) Compléter le schéma bloc de l'asservissement fourni sur le document réponse en faisant apparaître la régulation de l'inclinaison.

La régulation d'inclinaison du Segway® consiste à maintenir la consigne $\Psi_C(t)$ nulle. Cette régulation est réalisée si, quelle que soit l'inclinaison $\alpha(t)$ du conducteur, la sortie $\Psi(t)$ converge vers $\Psi_C(t)$, valeur nulle ici.

Le conducteur agit directement sur la valeur de $\alpha(t)$ pour accélérer ou décélérer. Pour le système Segway®, conducteur exclu, le parmètre $\alpha(t)$ peut être considéré comme une perturbation.

Un correcteur proportionnel $C(p) = K_C$ est envisagé.

V.B.2) Calculer l'inclinaison $\Psi(t)$ du châssis en régime permanent, lorsque la perturbation $\alpha(t)$ est un échelon d'amplitude α_0. Le cahier des charges est-il satisfait ?

Un correcteur proportionnel intégral $C(p) = K_i\left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$ est envisagé.

V.B.3) Démontrer que ce correcteur permet de satisfaire le cahier des charges vis-à-vis de l'écart en régime permanent pour une perturbation en échelon.

On souhaite dimensionner le correcteur. Pour cela, on étudie le schéma bloc construit en V.B.1. et on considère alors $\alpha(t) \equiv 0$. La Fonction de Transfert en Boucle Ouverte est pour cet asservissement : $FTBO(p) = C(p)F_2(p)$.

V.B.4) Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques et réels (allure uniquement) de la fonction de transfert $F_2(p)$ et tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de la fonction de transfert du correcteur $C(p)$, en utilisant les paramètres K_i et T_i. Préciser les valeurs caractéristiques sur les diagrammes.

On impose $\omega_i = \frac{1}{T_i} = \frac{\omega_C}{10}$ où ω_C est la pulsation de coupure à 0dB de la $FTBO$ corrigée par le correcteur proportionnel intégral.

V.B.5) Déterminer ω_C telle que la marge de la $FTBO(p)$ soit $M_\varphi = 45°$. En déduire la valeur de T_i.

V.B.6) Déterminer alors K_i tel que ω_C soit effectivement la pulsation de coupure à 0dB de la $FTBO$ corrigée.

V.C - Vérification graphique des performances attendues

Le modèle de comportement précédent est utilisé en simulation pour vérifier le pré-dimensionnement. Les performances de la correction sont étudiées grâce aux évolutions de $\chi(t) = \alpha(t) + \Psi(t)$, qui représente l'angle d'inclinaison du conducteur par rapport à la verticale. La consigne $\alpha(t)$, imposée par le conducteur, est un échelon d'amplitude 20°. Après réglages définitifs l'évolution temporelle est obtenue figure 8.

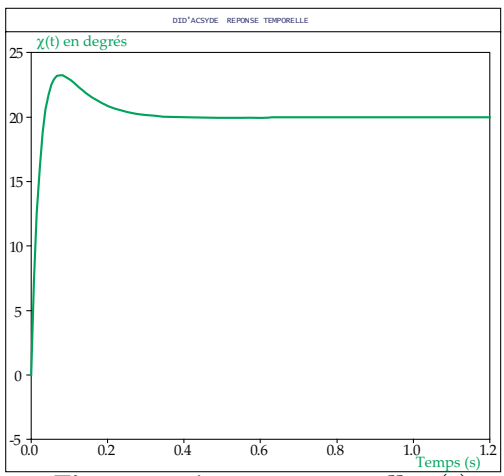


Figure 8 : réponse temporelle $\chi(t)$

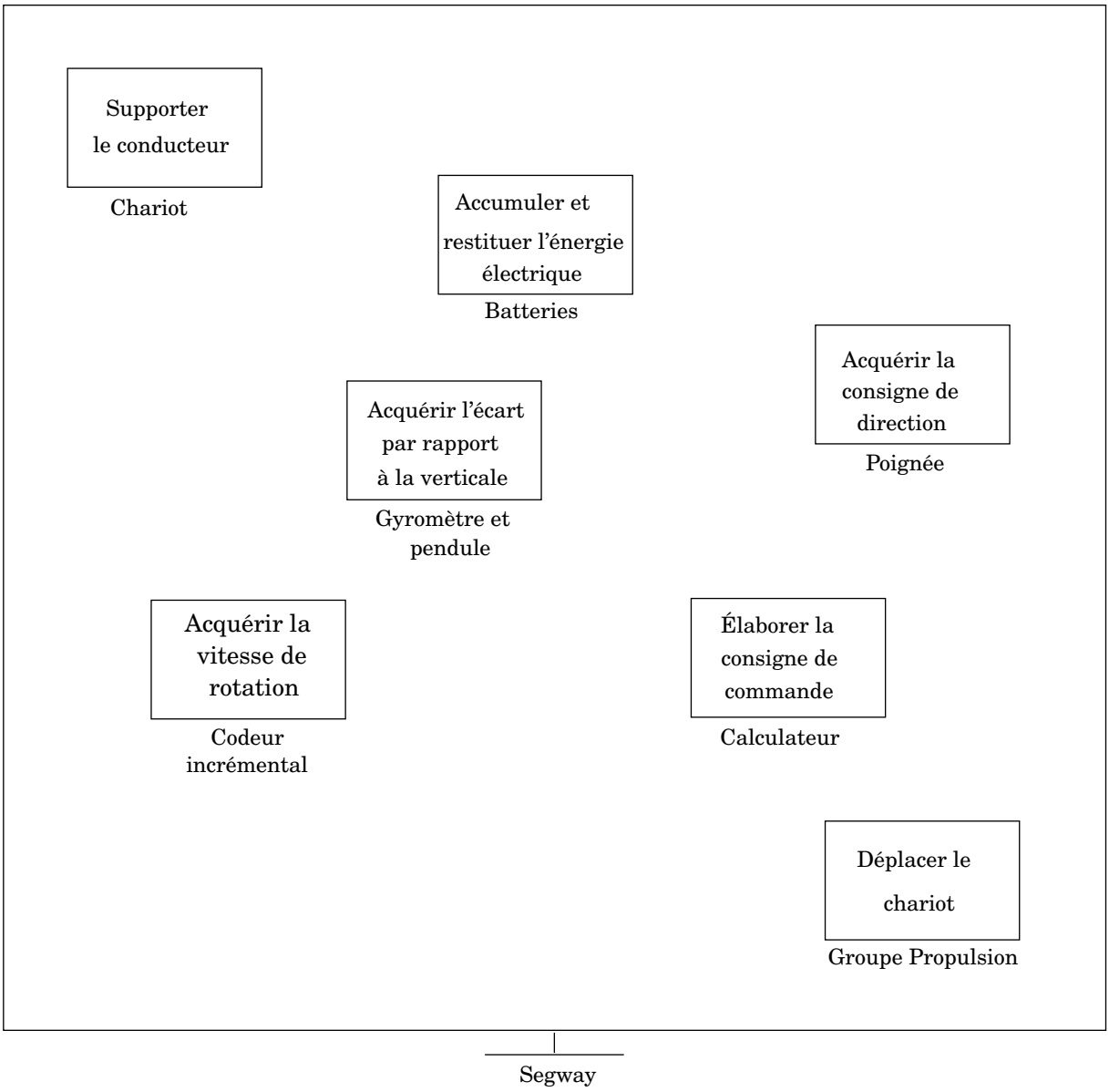
V.C.1) Conclure quant au respect des critères de dépassement et de précision associés à la fonction de service FS2.

••• FIN •••

Annexe du sujet de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

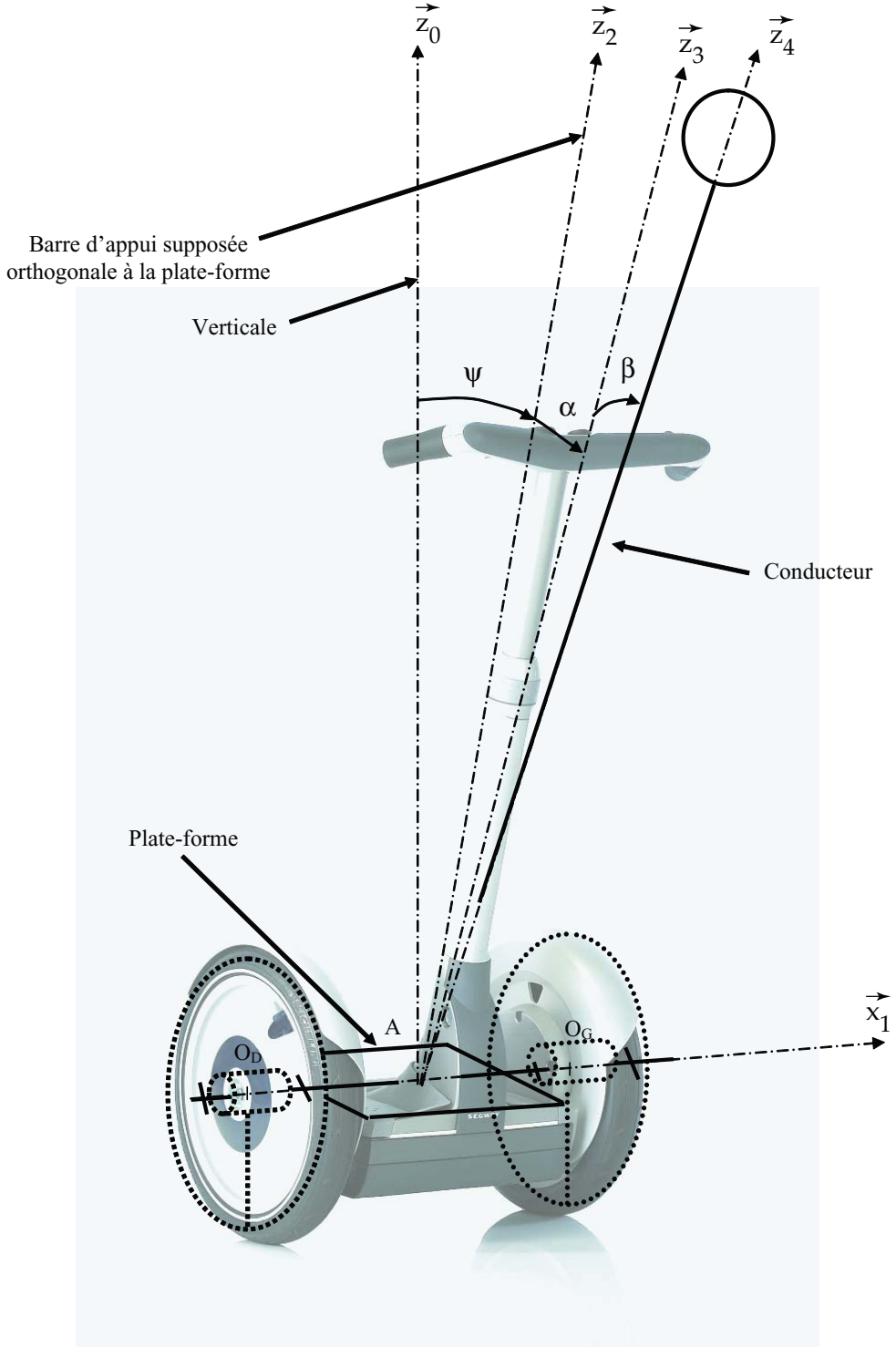
Cette annexe doit être rendue avec les autres copies. Attention, il ne pourra pas être délivré d'autres exemplaires de ce document.

Réponse à la question I.B.1)

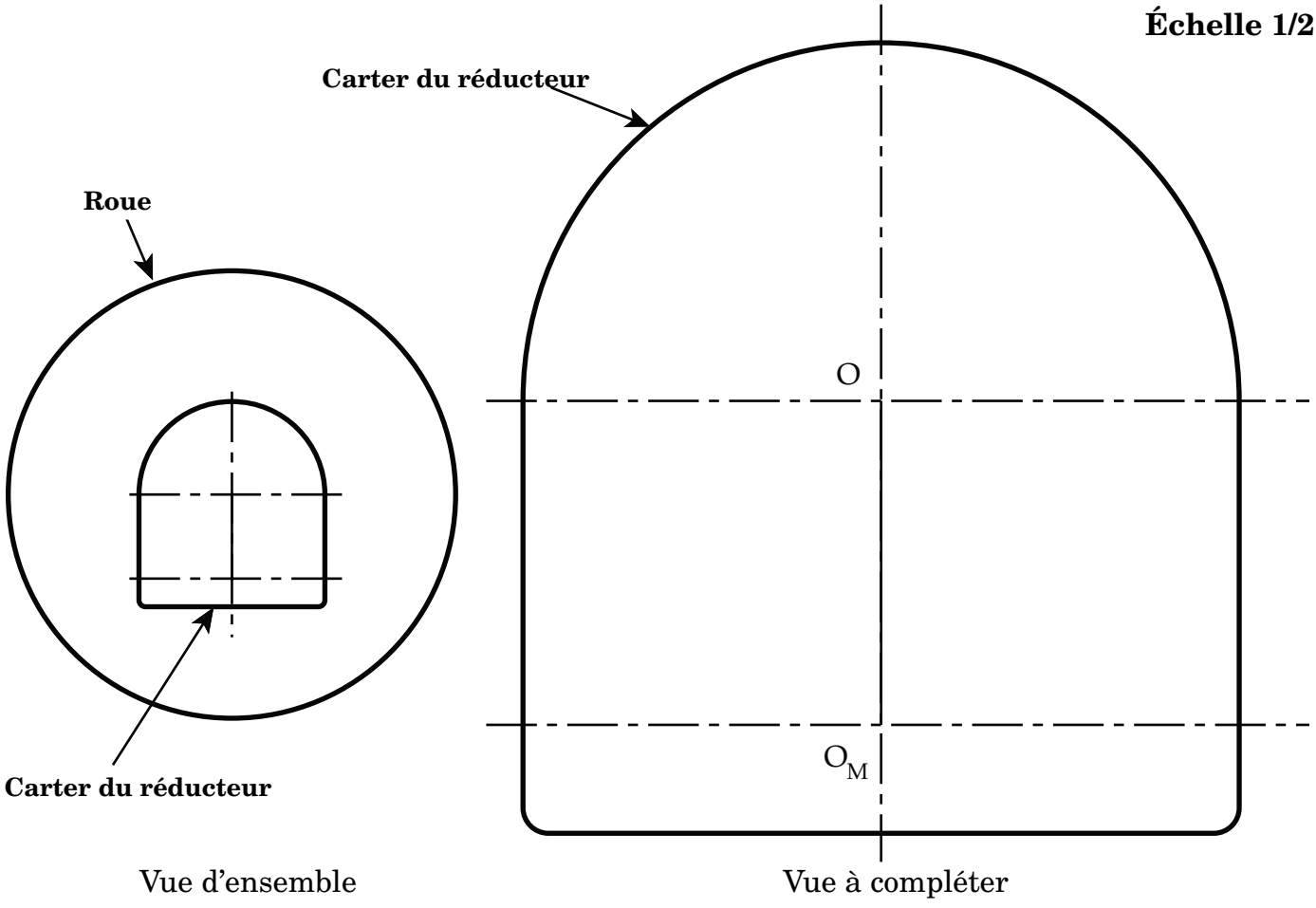


Filière PSI

Réponse à la question II.B.2)

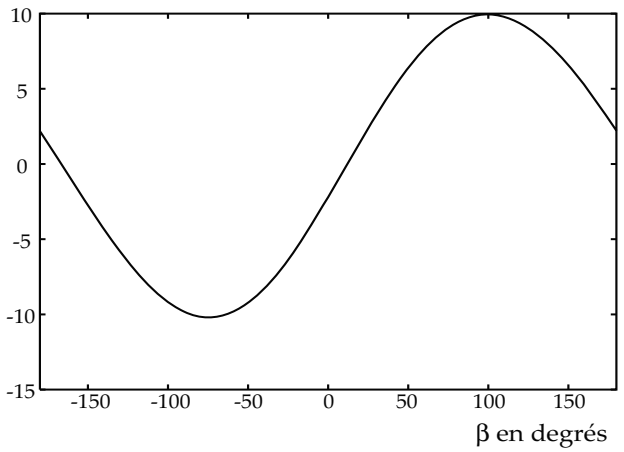


Réponse à la question II.C.2)

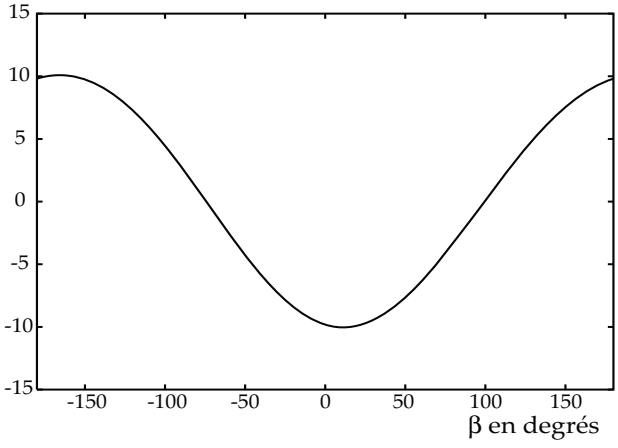


Réponse à la question III.B.1) $[\vec{g} - \vec{\Gamma}(G \in 4/0)] \cdot \vec{y}_4 = 0$

$[\vec{g} - \vec{\Gamma}(G \in 4/0)] \cdot \vec{x}_4$ en $m \cdot s^{-2}$

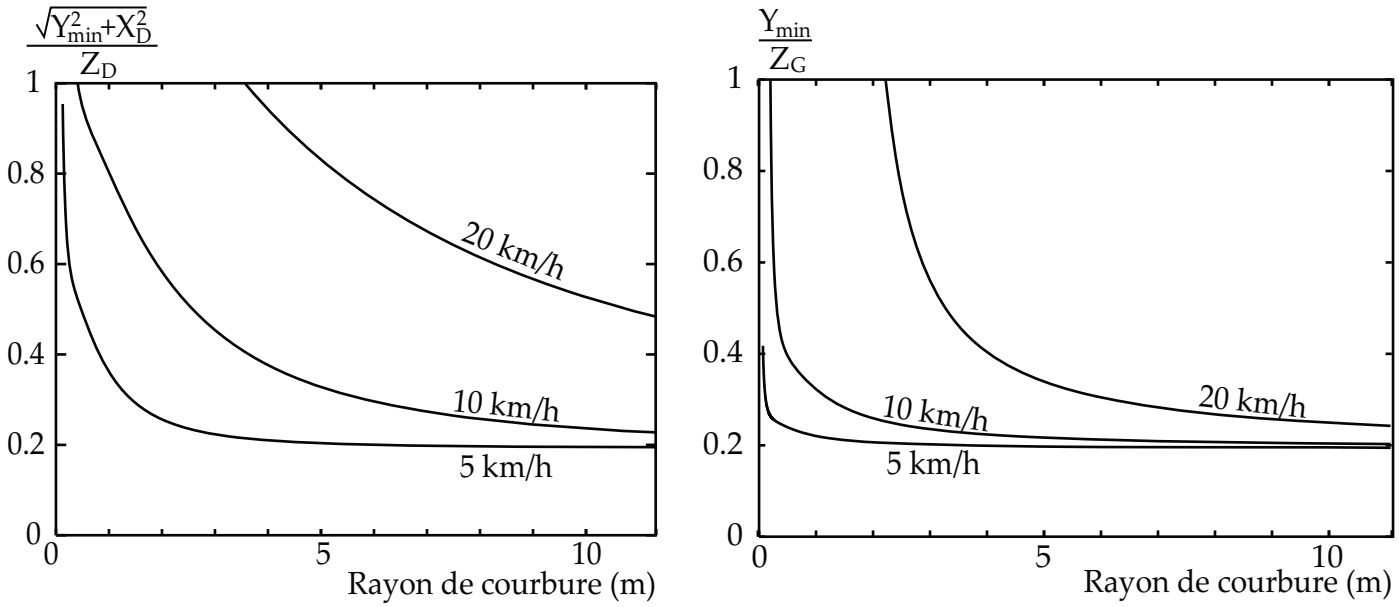


$[\vec{g} - \vec{\Gamma}(G \in 4/0)] \cdot \vec{z}_4$ en $m \cdot s^{-2}$



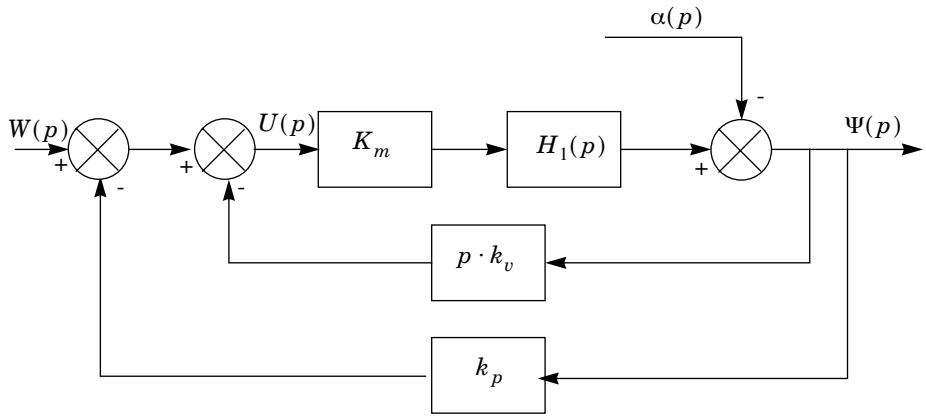
Réponse à la question III.C.4)

Évolution des rapports des composantes d'efforts de la route sur les roues



Réponse aux questions V.A.2) et V.B.1)

Schéma bloc de l'asservissement



Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Ingénierie système : besoin, exigences et diagrammes SysML
- Architecture fonctionnelle et structurelle : chaînes d'information et de puissance
- Modélisation des liaisons, graphe des liaisons et schéma cinématique
- Cinématique du solide : paramétrage, vitesse, taux de rotation et torseur cinématique
- Transmetteurs de puissance et trains d'engrenages
- Dynamique des systèmes de solides : principe fondamental, stratégie d'isolement, équilibrage
- Modélisation des actions mécaniques : modèles local et global, frottement, torseurs des liaisons
- Mobilité, hyperstatisme et petits déplacements

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière :
écrire sur WhatsApp

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/psi