Concours Centrale-Supélec, France

Session 2006, filière PSI

Mathématiques 1

Ce que traite le sujet

- Partie I : étude de l'équation y'' + y = h
- Partie II : comportement à l'infini des solutions pour alpha > 1
- Partie III : étude de la stabilité pour alpha > 1
- Partie IV : comportement à l'infini pour alpha = 1
- Partie V : étude de la stabilité pour alpha = 1

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie recomposée du sujet officiel, sans retouche de son contenu ; la mise en page diffère de l'original.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/psi/2006/maths1

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Centrale PSI - 2006
épreuve 1

Notations et définitions.

- $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.
- On note $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et L^1 l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ intégrables sur $\mathbb{R}^+$. Si $f \in L^1$, on pose $\|f\|_1 = \int_0^{+\infty} |f|$.
- On note B l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ bornées sur $\mathbb{R}^+$. Si $f \in B$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}^+} |f|$.
- Si $\alpha \in [1,+\infty[$, on convient que $0^\alpha = 0$; ainsi, $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto t^\alpha$ est continue.
- On pose, lorsque cela a un sens, $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\, dt$.
- Si $\alpha \in [1,+\infty[$ et h est une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, on note $E_{\alpha,h}$ l'équation différentielle linéaire
$$(E_{\alpha,h}) \ : \ y'' - \frac{1}{1+t^\alpha} y' + y = h$$
Par définition, une solution de $(E_{\alpha,h})$ est une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de la variable t de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $(E_{\alpha,h})$.
- Pour une équation différentielle linéaire du second ordre (E), de second membre h, on définit les propriétés de stabilité suivantes :
  - on dira que (E) est **stable par rapport aux conditions initiales** si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si f est une solution de (E) vérifiant $\|(f(0), f'(0))\| \leq \eta$, alors $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leq \varepsilon$.
  - on dira que (E) est **stable par rapport au second membre au sens 1** si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $h \in L^1$ est tel que $\|h\|_1 \leq \eta$ et f est solution de (E) vérifiant $(f(0), f'(0)) = (0,0)$, alors $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leq \varepsilon$.
  - on dira que (E) est **stable par rapport au second membre au sens** ∞ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $h \in B$ est tel que $\|h\|_\infty \leq \eta$ et f est solution de (E) vérifiant $(f(0), f'(0)) = (0,0)$, alors $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leq \varepsilon$.

  De plus, dans le cas de l'équation $(E_{\alpha,0})$:
  - on dira que (E) est **stable par rapport au paramètre** si et seulement si pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que : si $\beta \in [1,+\infty[$ vérifie $|\alpha - \beta| \leq \eta$, f est solution de $(E_{\alpha,0})$ et g est solution de $(E_{\beta,0})$ avec $(f(0), f'(0)) = (g(0), g'(0)) = (a,b)$, alors $f - g \in B$ et $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$.

Objectifs et dépendances des parties.

- L'objectif du problème est d'étudier le comportement des solutions de $(E_{\alpha,0})$ vers $+\infty$, ainsi que différentes notions de stabilité.
- La partie I étudie le cas de l'équation "limite à l'infini" $y'' + y = h$.
- La partie II, indépendante de I, étudie le comportement à l'infini des solutions de $(E_{\alpha,0})$ pour $\alpha > 1$.
- La partie III, qui étudie les problèmes de stabilité pour $\alpha > 1$, utilise des résultats de II.A, II.C et I.5.
- La partie IV qui étudie le comportement à l'infini des solutions de $(E_{1,0})$ utilise II.B.
- La partie V, qui étudie les problèmes de stabilité pour $\alpha = 1$, utilise les parties IV et II.

Partie I. Etude de l'équation $y'' + y = h$.

Si $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, on note (F_h) l'équation différentielle $y'' + y = h$. Par définition, une solution de (F_h) est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (F_h)?

I.A.

A.1. Donner l'ensemble des solutions de (F_0).

A.2. Dans cette question uniquement, on prend pour $h : x \mapsto \cos(x)$. Donner l'ensemble des solutions de (F_h) dans ce cas.

A.3. Dans cette question uniquement, on prend pour h la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}^+$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{si } x \in]\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Démontrer que h est continue sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer l'ensemble des solutions de (F_h).

I.B. **Stabilité par rapport aux conditions initiales.**
Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et f est la solution de (F_0) vérifiant $(f(0), f'(0)) = (a, b)$, montrer que $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leq \|(a, b)\|$.

I.C. Si $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, montrer que $f_0 : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^t h(u) \sin(t - u)\, du$ est solution de (F_h) et en déduire l'ensemble des solutions de (F_h).

I.D. **Stabilité par rapport au second membre au sens 1.**
On donne $h \in L^1$. Déterminer la solution f de (F_h) vérifiant $(f(0), f'(0)) = 0$, montrer que $f \in B$ et $\|f\|_\infty \leq \|h\|_1$.
En déduire que (F_h) est stable par rapport au second membre au sens 1.

I.E. **Stabilité par rapport au second membre au sens ∞.**
Soit $\delta > 0$. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \delta \cos(t)$ et montrer que ses solutions sont non bornées, et plus précisément, ne sont pas en $o(t)$ quand $t \to +\infty$.
En déduire la non stabilité de (F_0) par rapport au second membre au sens ∞.

Partie II. Comportement à l'infini des solutions de $(E_{\alpha,0})$ pour $\alpha > 1$.

II.A. Démontrer l'existence de $I(\alpha)$, pour $\alpha > 1$, et sa continuité par rapport à α.

II.B. **Relèvement angulaire.**
On donne $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^*$ de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 2$.

B.1. Justifier l'existence d'une primitive A de $\frac{g'}{g}$ et montrer que ge^{-A} est constante.

B.2. En écrivant la fonction A sous la forme $A = B + iC$, où B et C sont des fonctions à valeurs réelles, justifier qu'existent $r \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^*)$ et $\theta \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ tels que $g = re^{i\theta}$.

II.C. **Comportement à l'infini pour $\alpha > 1$.**
Soit $\alpha > 1$ et f une solution non nulle de $(E_{\alpha,0})$. On note $q : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha}$.

C.1. En appliquant II.B, montrer qu'existent $r \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^*)$ et $\theta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telles que $f = r\cos(\theta)$ et $f' = r\sin(\theta)$. Exprimer r en fonction de f et f'.
Les fonctions r et θ sont fixées ainsi pour la suite de cette partie.

C.2. Démontrer que $\theta' = -1 + q\sin(\theta)\cos(\theta)$.

C.3. Démontrer que $r' = qr\sin^2(\theta)$.

C.4. Démontrer que r a une limite strictement positive en $+\infty$ vérifiant $\lim_{+\infty} r \leq r(0)\exp(I(\alpha))$.
Démontrer que f et f' sont bornées par $\|(f(0), f'(0))\| \exp(I(\alpha))$.

C.5. Démontrer que $\theta(t) + t$ tend vers une limite réelle quand $t \to +\infty$.

C.6. Démontrer qu'existent $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $f(t) - a\cos(t+b) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$.

C.7. Tracer l'allure du graphe de f vers $+\infty$.

Partie III. Etude de la stabilité pour $\alpha > 1$.

Dans toute la partie, $\alpha > 1$, et (f_1, f_2) est un système fondamental de solutions de $(E_{\alpha,0})$.
$w = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}$ *est le wronskien associé.*
On pensera à utiliser les résultats de II.

III.A. **Stabilité par rapport aux conditions initiales.**
Démontrer que ($E_{\alpha,0}$ est stable par rapport aux conditions initiales.

III.B. **Stabilité par rapport au second membre au sens 1.**

B.1. Déterminer une équation différentielle vérifiée par w, et montrer qu'existent a, b réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $0 < a \leq |w(x)| \leq b$.

B.2. Si $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, montrer que les solutions de $(E_{\alpha,h})$ sont les fonctions du type $f = -C_1 f_1 + C_2 f_2$, où C_1 est une primitive de $\frac{hf_2}{w}$ et C_2 une primitive de $\frac{hf_1}{w}$.

B.3. Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes requises sur C_1 et C_2 dans la question précédente pour avoir $(f(0), f'(0)) = (0,0)$?

B.4. Démontrer l'existence de $C \in \mathbb{R}^+$ telle que : pour tout $h \in L^1$, la solution f de $(E_{\alpha,h})$ vérifiant $(f(0), f'(0)) = (0,0)$ est dans B, et $\|f\|_\infty \leq C\|h\|_1$. En déduire que $(E_{\alpha,0})$ est stable par rapport au second membre au sens 1.

III.C. **Instabilité par rapport au second membre au sens ∞.**
On fixe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
Soit g solution de $y'' + y = \lambda\cos(t)$.
Soit f la solution sur $\mathbb{R}^+$ de $y'' - \frac{1}{1+t^\alpha}y' + y = \lambda\cos(t)$ telle que $(f(0), f'(0)) = (0,0)$. On pose $\Phi = f - g$.

C.1. Démontrer que Φ est solution de $(E_{\alpha,h})$ pour une fonction $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ vérifiant $h(t) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$.

C.2. Démontrer que $h(t) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ implique que $\displaystyle\int_0^t |h| \underset{t\to+\infty}{=} o(t)$.

C.3. Utilisant la résolution de $(E_{\alpha,h})$ vue en III.B, montrer que $\Phi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(t)$.

C.4. Démontrer que $(E_{\alpha,0})$ n'est pas stable par rapport au second membre au sens ∞.

III.D. **Stabilité par rapport au paramètre.**
On fixe pour la suite de la question $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Soit $\beta \in]1, +\infty[$.
Soit f la solution de $(E_{\alpha,0})$ vérifiant $(f(0), f'(0)) = (a, b)$, g la solution de $(E_{\beta,0})$ vérifiant $(g(0), g'(0)) = (a, b)$.
On pose $\Phi = f - g$.
Si $\lambda > 1$, on pose $J(\lambda) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\lambda}$ et $K(\lambda) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\lambda}$.
Comme pour I, les fonctions J et K sont bien définies et continues sur $]1, +\infty[$ (on ne demande pas de le montrer).

D.1. Démontrer que Φ est une solution de l'équation différentielle $(E_{\alpha,h})$ avec

$$h : t \mapsto \left(\frac{1}{1+t^\alpha} - \frac{1}{1+t^\beta}\right) g'(t)$$

D.2. Démontrer que $h \in L^1$ et

$$\|h\|_1 \leq \|(a,b)\| e^{I(\beta)} \left(|J(\alpha) - J(\beta)| + |K(\alpha) - K(\beta)|\right)$$

D.3. Démontrer que $(E_{\alpha,0})$ est stable par rapport au paramètre.

Partie IV. Etude du comportement vers $+\infty$ pour $\alpha = 1$.

f est une solution non nulle de $(E_{1,0})$.
On pose $g : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{f(t)}{\sqrt{t+1}}$.

IV.A. Etablir que pour tout $t \geq 0$, $g''(t) + \left(1 - \frac{3}{4(1+t)^2}\right) g(t) = 0$.

IV.B. Démontrer qu'existent $\rho \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+^*)$ et $\beta \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telles que $g = \rho\cos(\beta)$ et $g' = \rho\sin(\beta)$.

IV.C. Déterminer une équation différentielle vérifiée par β et montrer que $\beta(x) + x$ tend vers une limite réelle lorsque $x \to +\infty$.

IV.D. Déterminer une équation différentielle vérifiée par ρ et démontrer que ρ tend vers une limite réelle $a > 0$ en $+\infty$.

IV.E. Démontrer qu'il existe un réel b tel que $f(t) - a\sqrt{t}\cos(t+b) \underset{t\to+\infty}{=} o(\sqrt{t})$, où a est le réel défini ci-dessus.

IV.F. Tracer l'allure du graphe de f vers $+\infty$.

Partie V. Etude de la stabilité pour $\alpha = 1$.

V.A. Démontrer que $(E_{1,0})$ n'est pas stable par rapport aux conditions initiales et au paramètre.

V.B. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f_\lambda : x \mapsto \lambda x \sin(x)$, calculer $f_\lambda''(x) - \frac{1}{1+x} f_\lambda'(x) + f_\lambda(x)$. Qu'en déduire concernant la stabilité de $(E_{1,0})$ par rapport au second membre au sens ∞ ?

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Équations différentielles linéaires
- Intégration sur un intervalle quelconque
- Nombres complexes et trigonométrie
- Intégrales dépendant d'un paramètre
- Techniques fondamentales de calcul en analyse

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/psi