Concours Centrale-Supélec, France

Session 2006, filière PSI

Mathématiques 2

Ce que traite le sujet

- Partie I : généralités
- Partie II : les ensembles R et S
- Partie III : définition de l'ensemble H
- Partie IV : représentation graphique de H

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie recomposée du sujet officiel, sans retouche de son contenu ; la mise en page diffère de l'original.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/psi/2006/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Centrale PSI - 2006
épreuve 2

Notations. Dans tout le problème, on ne considère que des matrices carrées réelles. On désigne par E l'espace vectoriel réel des matrices carrées (réelles) d'ordre 2, c'est à dire à deux lignes et deux colonnes. Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$, on rappelle la définition de sa *trace* $Tr(M) = a + d$ et de son *polynôme caractéristique*

$$\chi_M : x \in \mathbb{R} \mapsto \det(xI_2 - M)$$

où I_2 désigne la matrice identité et det le déterminant d'ordre 2.
En outre, on identifie les espaces vectoriels réels $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et on munit $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire canonique et de la norme euclidienne associée.
On pose donc, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.
On rappelle enfin qu'une matrice carrée réelle A d'ordre 2 est orthogonale si et seulement si ${}^tAA = I_2$.
L'ensemble des matrices orthogonales réelles d'ordre 2 est noté O_2.
On désigne par $\mathcal{S}_2$ l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre 2.

Partie I. Généralités.

I.A.

I.A.1. Démontrer que si deux matrices de E sont semblables, elles ont même trace et même polynôme caractéristique. La réciproque est-elle vraie ? Justifier la réponse.

I.A.2. Démontrer que $\Phi : (M_1, M_2) \mapsto Tr({}^tM_1M_2)$ définit un produit scalaire sur E. Pour la suite du problème, E pourra être muni de la norme associée à ce produit scalaire.

I.A.3. Démontrer que, pour toute matrice $M \in E$, on a $|\det(M)| \leq \frac{1}{2}Tr({}^tMM)$. Quand y-a-t-il égalité ?

I.A.4. Pour $M \in E$ et $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\chi_M(x)$ en fonction de x, $Tr(M)$ et $\det(M)$. En conclure que 1 est une valeur propre de M si et seulement si $Tr(M) = 1 + \det(M)$.

I.B. **La décomposition UDV.**

On donne dans cette question $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ élément de E avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

I.B.1. Si $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $\phi(\theta) = Tr(MP(\theta))$.
Démontrer que ϕ est une application bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et qu'il existe $\theta_1 \in \mathbb{R}$ en lequel ϕ atteint son maximum. En choisissant alors un tel θ_1 et en considérant $\phi'(\theta_1)$ démontrer que $MP(\theta_1)$ est une matrice symétrique.

I.B.2. En déduire que $M \in E$ peut se mettre sous la forme $P(t_1)DP(t_2)$, où $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ et où D est une matrice diagonale de E.

Remarque : *on a établi que toute matrice $M \in E$ peut se mettre sous la forme $M = UDV$, où D est diagonale et U, V orthogonales.*

I.B.3. **Exemple** *: décomposer la matrice $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sous la forme $P(t_1)DP(t_2)$, où $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$.*

I.C. Soit $A \in E$, U et V des matrices orthogonales d'ordre 2 et $B = UAV$. Démontrer que ${}^tAA$ et ${}^tBB$ sont semblables.
On ne demande pas de démontrer le résultat suivant, qui est admis : toute matrice $M \in E$ peut

se mettre sous la forme $P(t_1)DP(t_2)$, *où* $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ *et où* $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in E$ *vérifie en outre* $\alpha \leq \beta$ *et* $\beta \geq 0$.

Partie II. Les ensembles $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$.

On désigne par $\mathcal{R}$ l'ensemble des matrices $M \in E$ telles que $\|MX\| \leq \|X\|$ pour tout vecteur colonne $X \in \mathbb{R}^2$.

II.A. Reformuler la définition de $\mathcal{R}$ en utilisant la notion de *norme subordonnée*.

II.B.

II.B.1. Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{R}$, démontrer que (a, b, c, d) appartient à $[-1, 1]^4$. Démontrer que $\mathcal{R}$ est un compact de E.

Si $(M_1, M_2) \in E^2$, *on définit le segment* $[M_1, M_2]$ *comme l'ensemble des matrices de la forme* $(1-t)M_1 + tM_2$, *où* t *décrit* $[0, 1]$.

II.B.2. Démontrer que $\mathcal{R}$ est aussi un *convexe* de E, c'est à dire que, si M_1 et M_2 sont deux matrices de $\mathcal{R}$, le segment $[M_1, M_2]$ est inclus dans $\mathcal{R}$.

II.C.

II.C.1. Démontrer que $M \in \mathcal{R} \iff \forall X \in \mathbb{R}^2,\ {}^tX{}^tMMX \leq {}^tXX$.

II.C.2.

a. Si $M \in E$, justifier le fait que le polynôme caractéristique de la matrice ${}^tMM$ est de la forme $(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$, avec λ_1 et λ_2 réels. Démontrer ensuite que ces réels sont positifs ou nuls.
On pourra considérer des expressions de la forme ${}^tX{}^tMMX$.

b. Démontrer que $M \in \mathcal{R}$ si et seulement si les valeurs propres de ${}^tMM$ appartiennent à $[0, 1]$.

II.D. Déduire en particulier de $II.C.2.a$ que

$$M \in \mathcal{R} \iff \begin{cases} Tr({}^tMM) \leq 1 + (\det(M))^2 \\ Tr({}^tMM) \leq 2 \end{cases}$$

II.E. On définit $\mathcal{S}$ comme :

$$\mathcal{S} = \{M \in \mathcal{R} / \ \exists X_0 \in \mathbb{R}^2,\ X_0 \neq 0,\ \|MX_0\| = \|X_0\|\}$$

II.E.1. En reprenant les calculs de $II.C.2.a$, démontrer que M appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si le polynôme caractéristique de ${}^tMM$ est de la forme $(x - \lambda)(x - 1)$ où $\lambda \in [0, 1]$.

II.E.2. Si $M \in E$, on l'écrit sous la forme $M = P(t_1)DP(t_2)$, où $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ et où $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha \leq \beta$ et $\beta \geq 0$.

a. Déterminer les valeurs propres de ${}^tMM$ en fonction de α et β.

b. Démontrer que $M \in \mathcal{S}$ si et seulement si il existe U et V, matrices orthogonales d'ordre 2 et $\gamma \in [-1, 1]$ tels que $M = U \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V$.

II.E.3. En déduire que, si M est une matrice *non orthogonale* de $\mathcal{S}$, il existe des matrices orthogonales W et W' d'ordre 2 telles que M appartiennent au segment $[W, W']$.

On pourra montrer d'abord que si M *est de la forme* $\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *avec* $\gamma \in]-1, 1[$, *on peut choisir* W *et* W' *orthogonales et diagonales telles que* M *appartienne au segment* $[W, W']$.

II.F. On désigne par E_1 l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et par E_2 l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$, avec $(c,d) \in \mathbb{R}^2$.

II.F.1. Démontrer que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E orthogonaux au sens du produit scalaire Φ défini en $I.A.2$.

II.F.2. Démontrer que E_1 contient toutes les matrices orthogonales d'ordre 2 et de déterminant 1 et que E_2 contient toutes les matrices orthogonales d'ordre 2 et de déterminant -1.

II.F.3. Lorsque M est une matrice *non orthogonale* de $\mathcal{S}$, déduire de ce qui précède le nombre de segments $[W, W']$ - où W et W' sont orthogonales - contenant M.

Partie III. Définition de l'ensemble $\mathcal{H}$.

III.A.

III.A.1. Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, démontrer que $M \in \mathcal{S}$ implique

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 + (ad - bc)^2$$

On désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble des matrices $M \in E$ vérifiant cette dernière relation.

III.A.2.

a. Réciproquement, à quelle condition, vérifiée par son déterminant, une matrice $M \in \mathcal{H}$ appartient-elle à $\mathcal{S}$?

b. Démontrer qu'une matrice $M \in \mathcal{H}$ appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si $Tr({}^tMM) \leq 2$.

III.B.

III.B.1. Si $(A,B) \in E_1 \times E_2$, calculer $\det(A+B)$ en fonction de $\det(A)$ et de $\det(B)$.

Si $(M_1, M_2) \in E^2$, avec $M_1 \neq M_2$, on définit la droite affine(M_1M_2) comme l'ensemble des matrices de la forme $(1-t)M_1 + tM_2$, où t décrit $\mathbb{R}$. Dans la suite, on l'appellera droite (M_1M_2).

III.B.2. Démontrer que, si W et W' sont des matrices orthogonales éléments de E, telles que $\det(W) = 1$ et $\det(W') = -1$, la droite (WW') est incluse dans $\mathcal{H}$. Réciproquement, $\mathcal{H}$ est-elle réunion de droites de cette forme ?

Partie IV. Représentation graphique de $\mathcal{H}$.

IV.A. Si $M \in E$, on rappelle que le polynôme caractéristique de ${}^tMM$ est de la forme $(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$, avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda_1 \geq 0$ et $\lambda_2 \geq 0$. Pour fixer les idées, on suppose $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$.
On suppose $M \neq 0$. Déterminer en fonction de λ_1 et λ_2 le nombre de réels t **positifs** tels que $tM \in \mathcal{H}$. **On en trouvera "en général" deux, et on interprétera les cas particuliers.**

On étudie à partir de cette question l'intersection de $\mathcal{H}$ avec certains sous-espaces vectoriels de E. On commence par des exemples de plans vectoriels.

IV.B. Soit P_1 l'ensemble des matrices de la forme $M_1(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{2}} & y \\ 0 & \frac{x}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

IV.B.1. Déterminer les matrices orthogonales qui sont dans P_1.

IV.B.2. **Dans cette question, on identifie $M_1(x,y)$ avec le point (x,y) de $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique et de son repère orthonormal canonique. On procédera à des identifications analogues dans les questions suivantes.**

a. Démontrer que $\mathcal{H} \cap P_1$ est la réunion de deux coniques $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Déterminer $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$.

b. Représenter par un dessin $\mathcal{H} \cap P_1$ et $\mathcal{S} \cap P_1$ dans le plan P_1.

IV.C. Soit P_2 l'ensemble des matrices de la forme $M_2(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{2}} & \frac{x}{\sqrt{2}} \\ 0 & y \end{pmatrix}$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; on ne demande pas de vérifier que la relation du $III.A.1$ implique

$$M_2(x,y) \in \mathcal{H} \cap P_2 \iff x^2y^2 - 2(x^2+y^2-1) = 0$$

Etudier et représenter par un dessin $\mathcal{H} \cap P_2$ et $\mathcal{S} \cap P_2$ dans le plan P_2 *(on pourra discuter et résoudre l'équation par rapport à la variable y).*

IV.D. **Exemple d'intersection de $\mathcal{H}$ avec un sous-espace de dimension 3.**
On désigne par S_2 l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre 2.

IV.D.1. Démontrer qu'une matrice $M \in S_2$ appartient à $\mathcal{H}$ si et seulement elle admet une valeur propre égale à 1 ou à -1.
On admet qu'une base orthonormale de S_2 est $\mathcal{B} = (M_1, M_2, M_3)$ avec

$$M_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ M_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ M_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IV.D.2. En écrivant une matrice de S_2 sous la forme $M(x,y,z) = xM_1 + yM_2 + zM_3$, décrire l'ensemble C_a des matrices de S_2 admettant le réel donné a comme valeur propre. En déduire une description de $\mathcal{H} \cap S_2$.

IV.D.3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $N = P(\theta)M(x,y,z)P(\theta)^{-1}$; démontrer que c'est une matrice de la forme $M(u,v,w)$ et exprimer (u,v,w) en fonction de (x,y,z). Interpréter certains des résultats de la question $IV.D.2$.

IV.D.4. Représenter par un dessin $\mathcal{H} \cap S_2$ et $\mathcal{S} \cap S_2$.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Espaces vectoriels normés
- Compléments d'algèbre linéaire

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/psi