Concours Centrale-Supélec, France

Session 2007, filière PSI

Mathématiques 2

Durée : 4 heures

Ce que traite le sujet

- Partie 1 : généralités
- Partie 2 : l'image d'une sphère
- Partie 3 : balayage de p(S) par des cercles

Copie non officielle du sujet, à partir de la page suivante.

Copie recomposée du sujet officiel, sans retouche de son contenu ; la mise en page diffère de l'original.

Résumé des parties, chapitres de cours liés et autres années :
prepahelp.com/annales/centrale/psi/2007/maths2

Prepa Help ne revendique aucun droit sur le sujet, propriété de l'organisateur du concours.

Centrale PSI2 2007
durée : 4 heures

la représentation plane de figures tridimensionnelles suppose le choix d'une application p de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, grâce à laquelle une figure $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ devient, dans $\mathbb{R}^2$, le *croquis* : $p(\mathcal{F})$. Ici, on fait le choix d'une application p **linéaire**, connue sous le nom de *perspective cavalière*. Toutefois, pour la commodité des calculs, on a préféré faire jouer aux vecteurs de la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$ des rôles différents de ceux qu'ils ont l'habitude dans ce type de perspective.
Dans tout le problème, les espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont munis de leur structure euclidienne canonique orientée et pourront être considérés comme des espaces vectoriels réels de vecteurs colonnes, ou des espaces affines réels de vecteurs colonnes. Aussi bien pour ce qui concerne $\mathbb{R}^2$ que $\mathbb{R}^3$, le produit scalaire sera noté $< , >$ et la norme euclidienne canonique sera notée $\|.\|$.
On donne deux réels strictement psoitifs α et β et on considère l'application, notée p, de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ qui au vecteur colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ associe $\begin{pmatrix} x - \alpha z \\ y - \beta z \end{pmatrix}$. Si $\mathcal{P}$ est une partie de $\mathbb{R}^3$, on dira qu'elle est *représentée en vraie grandeur* par p si, quels que soient M et M' dans $\mathcal{P}$, on a $\|\overrightarrow{p(M)p(M')}\| = \|\overrightarrow{MM'}\|$.

1 Généralités.

I.A.

I.A.1) Montrer que p est une application linéaire. Déterminer la matrice de p relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
Déterminer le noyau et l'image de p.

Pour toute la suite du problème, on note $\vec{\nu}$ le vecteur $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$.

I.A.2) Représenter sur un même dessin les images par p des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Ce dessin donne une représentation en perspective de la base formée par ces trois vecteurs.

I.B. Interprétation géométrique de p.

Pour cette seule question, on introduit l'endomorphisme $\overline{p}$ de $\mathbb{R}^3$ qui au vecteur colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ associe $\begin{pmatrix} x - \alpha z \\ y - \beta z \\ 0 \end{pmatrix}$.
Interpréter géométriquement p grâce à $\overline{p}$ (on pourra former $\overline{p} \circ \overline{p}$).
Est-il vrai que $\|p(X)\| \leq \|X\|$ pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^3$?

I.C.

I.C.1) Soit M_0 un point et $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.
On considère la droite affine $D = M_0 + \mathbb{R}\vec{u} = \{M_0 + \lambda\vec{u}\}$.
Montrer que $p(D) = p(M_0) + \mathbb{R}p(\vec{u})$.

I.C.2) Soit D une droite affine de $\mathbb{R}^3$. Montrer que son image par p est une droite affine ou est réduite à un point, en discutant selon un vecteur directeur de D.

I.C.3) Soient D et D' deux droites affines de $\mathbb{R}^3$ dont les images par p sont des droites affines de $\mathbb{R}^2$.

a) Si D et D' sont sécantes, montrer que leurs images par p le sont aussi. La réciproque est-elle vraie ?

b) Si D et D' sont parallèles, montrer que leurs images par p le sont aussi. La réciproque est-elle vraie ?

I.C.4) Soit Π un plan affine de $\mathbb{R}^3$. Discuter la nature de $p(\Pi)$ suivant $\vec{\nu}$ et Π.

I.D. Une propriété métrique de p.

Soit un vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$; on pose $q(X- = \|X\|^2 - \|p(X)\|^2$.

I.D.1) Montrer que l'ensemble des $X \in \mathbb{R}^3$ tels que $q(X) = 0$ est la réunion e deux plans Π_1 et Π_2 que l'on caractérisera par leurs équations cartésiennes.
En déduire que les plans affines parallèles à l'un ou l'autre de ces deux plans sont représentés en vraie grandeur par p.

I.D.2)

a) Montrer, en le déterminant, qu'il existe un unique endomorphisme autoadjoint u de $\mathbb{R}^3$ tel que $q(X) =< u(X), X >$ pour tout X de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer le polynôme caractéristique χ_u de u puis le signe des valeurs propres non nulles de u.

I.E. Une généralisation.

I.E.1) Soit P un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$; montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dont les deux premiers vecteurs soient dans P.

I.E.2) Soit u' un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^3$; on pose $q'(X) =< u'(X), X >$ pour tout X de $\mathbb{R}^3$, on suppose qu'il existe P, plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$, tel que $q'(X) = 0$ pour tout $X \in P$ et, P étant supposé choisi, on choisit $\mathcal{B}$ comme dans la question $I.E.1$). Montrer que la matrice de u' relativement à la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

I.E.3) Si $(a, b) \neq (0, 0)$, montrer que l'ensemble des $X \in \mathbb{R}^3$ tels que $q'(X) = 0$ est la réunion de deux plans puis étudier le signe des valeurs propres non nulles de u'.

I.E.4) Discuter le rang de u en fonction de (a, b, c).

Dans les parties **II** et **III**, on se limite au cas où $\alpha = \cos(\theta)$ et $\beta = \sin(\theta)$ pour un $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ supposé choisi et, $R > 0$ éatnt donné, on considère la sphère S d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

2 L'image d'une sphère.

Le but de cette partie est d'étudier l'image $p(S)$ de S par p.

II.A. Une inéquation définissant le domaine $p(S)$.

II.A.1) Soit $\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Montrer que l'image réciproque $p^{-1}(\{\xi\})$ est la droite affine D_ξ passant par le point $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{\nu}$. En conclure que

$$\xi \in p(S) \iff S \cap D_\xi \neq \emptyset$$

et que cela équivaut à dire que l'équation en t

$$(x + t\cos(\theta))^2 + (y + t\sin(\theta))^2 + t^2 - R^2 = 0$$

admet au moins une racine réelle.

II.A.2) En déduire que $p(S)$ est définie par l'inéquation $\Phi(x, y) \leq 2R^2$, où l'on a posé

$$\Phi(x, y) = 2(x^2 + y^2) - (x\cos(\theta) + y\sin(\theta))^2$$

On désigne par $\mathcal{E}$ la partie de $\mathbb{R}^2$ d'équation $\Phi(x, y) - 2R^2 = 0$.

II.A.3) On considère le repère affine $\mathcal{R}'$ déduit du repère canonique $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^2$ par la rotation d'angle θ autour de l'origine.

a) Soit M un point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$ et de coordonnées (x', y') dans $\mathcal{R}'$. Déterminer x' et y' en fonction de x et y.

b) Montrer que $\mathcal{E}$ est une ellipse et donner son équation cartésienne dans $\mathcal{R}'$.

c) Indiquer les éléments remarquables de $\mathcal{E}$: axe focal, demi-longueur des axes et excentricité. Montrer que le foyers de $\mathcal{E}$ sont les points F et F' dont les coordonnées relatives à $\mathcal{R}'$ sont respectivement $\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -R \\ 0 \end{pmatrix}$.

d) Déterminer une inéquation de $p(S)$ dans le repère $\mathcal{R}'$ et en déduire que $p(S)$ est le domaine borné limité par $\mathcal{E}$. Représenter enfin $p(S)$ soigneusement dans le repère $\mathcal{R}'$.

II.B. Etude du contour apparent de S.

II.B.1) Montrer, en le déterminant, que tout élément $\xi \in \mathcal{E}$ ne possède qu'un seul antécédent par p dans S.

Indication : on pourra déterminer $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\pi(\xi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + t_0\vec{\nu}$.

Cet antécédent sera noté $\pi(\xi)$ et on désignera par Σ l'ensemble des $\pi(\xi)$ lorsque ξ décrit $\mathcal{E}$.

II.B.2) Pour chaque $\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$, calculer $< \pi(\xi), \vec{\nu} >$ et en déduire que Σ est inclus dans, P_0, le plan vectoriel orthogonal à $\vec{\nu}$.

II.B.3) Réciproquement, soit $X \in S$ tel que $< \vec{\nu}, X >= 0$. Montrer que $p(X) \in \mathcal{E}$.

Indication : on pourra calculer $\Phi(p(X))$ ou s'aider d'un dessin.

Conclure quant à la nature de Σ. La représentation de Σ par p est-elle en vraie grandeur ? Quelle conclusion peut-on en tirer en terme de représentation vavalière d'une sphère ?

II.C. De certaines symétries vectorielles laissant stable $\mathcal{E}$.

II.C.1) Montrer que la restriction p_0 de p à P_0 est une bijection de P_0 sur $\mathbb{R}^2$. On en notera p_1 la bijection réciproque.

II.C.2) Soit σ une application linéaire de P_0 sur lui même, supposée involutive, c'est àdire vérifiant $\sigma \circ \sigma = Id_{P_0}$.

a) Montrer que $s = p_0 \circ \sigma \circ p_1$.

b) Comment obtient-on les sous-espaces propres de s en fonction de ceux de σ ?

c) Montrer que s laisse stable $\mathcal{E}$ si, et seulement si, σ laisse stable Σ.

3 Balayage de $p(S)$ par des cercles.

III.A. Question préliminaire.

On suppose donné un intervalle ouvert I non vide et un arc Γ de classe C^1 de I dans $\mathbb{R}^3$. On suppose que, pour un $t_0 \in I$, le vecteur dérivé $\Gamma'(t_0)$ n'appartient pas à $Vect(\vec{\nu})$. Dans ces conditions, montrer que le point $p(\Gamma(t_0))$ est régulier pour l'arc $p \circ \Gamma$, de I dans $\mathbb{R}^2$, et donner un vecteur directeur de la tangente à l'arc en ce point.

III.B.

III.B.1) Soit un réel $\delta \in [-\pi/2, \pi/2]$; montrer que l'intersection de S et du plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = R\sin(\delta)$ est le cercle C_δ paramétré par

$$\phi \in \mathbb{R} \mapsto M_\delta(\phi) = \begin{pmatrix} R\cos(\delta)\cos(\phi) \\ R\cos(\delta)\sin(\phi) \\ R\sin(\delta) \end{pmatrix}$$

En donner le centre et le rayon.

III.B.2) Montrer que l'intersection de P_0 et de C_δ est non vide si, et seulement si, $|\delta| \leq \frac{\pi}{4}$. Montrer plus précisément que cette intersection se compose alors de deux points lorsque

$|\delta| < \frac{\pi}{4}$.

III.B.3) Soit $\delta \in [-\pi/4, \pi/4]$ et un point $M \in P_0 \cap C_\delta$. On choisit un réel ϕ_0 tel que $M = M_\delta(\phi_0)$. Montrer que $M \in \Sigma$ puis que sont orthogonaux à $\overrightarrow{OM}$: le vecteur $\vec{\nu}$, le vecteur $\left[\frac{dM_\delta}{d\phi}\right]_{\phi=\phi_0}$ ainsi que tout vecteur tangent en M à Σ.

III.B.4) Montrer que les $p(C_\delta)$, où δ décrit $[-\pi/2, \pi/2]$, sont des cercles et que $p(S)$ en est la réunion. Déterminer le centre Ω_δ et le rayon R_δ du cercle $p(C_\delta)$.

En utilisant en particulier III/A et $III.B.3$), montrer que lorsque $|\delta| < \pi/4$, le cercle $p(C_\delta)$ est tangent à $\mathcal{E}$ en deux points distincts. Etudier aussi le cas de $p(C_{\pi/4})$.

III.B.5) Lorsque $0 \leq \delta < \delta' \leq \frac{\pi}{4}$, montrer que $p(C_{\delta'})$ et $p(C_\delta)$ sont sécants. Lorsque $\frac{\pi}{4} \leq \delta < \delta' \leq \frac{\pi}{2}$, montrer que $p(C_{\delta'})$ est intérieur à $p(C_\delta)$

III.C. La récompense finale.

Représenter sur un même dessin : $\mathcal{E}$, un cercle $p(C_\delta)$ avec $0 \leq \delta < \frac{\pi}{4}$, le cercle $p(C_{\pi/4})$ et un cercle $p(C_\delta)$ avec $\frac{\pi}{4} < \delta < \frac{\pi}{2}$.

III.D. Montrer qu'il existe une seconde famille de cercles inclus dans S dont les images par p soient des cercles et dont la réunion des images par p soit encore $p(S)$.

Travailler les chapitres de ce sujet

Prepa Help suit le programme de PSI chapitre par chapitre : cours détaillé, méthodes, pièges, exercices et problèmes corrigés pas à pas, tirés des concours. L'essai gratuit donne accès aux chapitres offerts de ta filière, sans carte bancaire.

Chapitres liés à ce sujet

- Compléments d'algèbre linéaire
- Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens
- Réduction des endomorphismes et des matrices carrées
- Nombres complexes et trigonométrie
- Fonctions vectorielles et arcs paramétrés

Ouvrir l'essai gratuit

Scanne le code ou clique sur le bouton.

prepahelp.com/#essai

Une question sur le concours ou sur ta filière : **écrire sur WhatsApp**

Les autres années et épreuves : prepahelp.com/annales/centrale/psi